ЛИНЕЙНЫЕ ПРОСТРАНСТВА

Множество E называется ***линейным пространством*** (**ЛП**) над полем ⊠ , если в нем определены две операции:

1) $\forall x, y \in E$ определен элемент $x + y \in E$ – ***сумма***;

2) $\forall x \in E \;\; \forall \lambda \in$ ⊠ определен элемент $\lambda x \in E$

так, что выполнены аксиомы $\forall x, y, z \in E \;\; \forall \lambda, \mu \in$ ⊠ :

1) $x + y = y + x$;

2) $x + (y + z) = (x + y) + z$;

3) $\exists \mathbf{0} \in E$ такой, что $x + \mathbf{0} = x$;

4) $\lambda(\mu x) = (\lambda\mu)x$;

5) $1 \cdot x = x$ и $0 \cdot x = \mathbf{0}$, где $0, 1 \in$ ⊠ ;

6) $\lambda(x + y) = \lambda x + \lambda y$;

7) $(\lambda + \mu)x = \lambda x + \mu x$.

З а м е ч а н и е. ⊠ не обязательно числовое множество. Пространства над вещественным или комплексным полем, обычно называют ***вещественным*** или ***комплексным ЛП.***

Пусть $\forall k \ \alpha_k \in \square$. Тогда $\sum\limits_{k=1}^{n} \alpha_k x_k$ – ***линейная комбинация элементов*** $x_1, x_2, \ldots, x_n \in E$.

Элементы $x_1, x_2, \ldots, x_n$ ***линейно зависимыми,*** если существует их линейная комбинация $\sum\limits_{k=1}^{n} \alpha_k x_k = \mathbf{0}$, где $\sum\limits_{k=1}^{n} |\alpha_k| > 0$.

ЛП называется m***-мерным***, если в нем существует m линейно независимых векторов, а всякие $m+1$ векторов линейно зависимы.

Набор любых m линейно независимых векторов в m-мерном линейном пространстве E называется ***базисом*** в E .

Если $\{e_k\}_{k=1}^{m}$ произвольный базис в E , то $\forall x \in E$ существуют скаляры $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_m$ такие, что $x = \sum\limits_{k=1}^{m} \xi_k e_k$.

ЛП E называется ***бесконечномерным***, если для каждого натурального n в E существует n линейно независимых элементов.

НОРМИРОВАННЫЕ ПРОСТРАНСТВА

ЛП E называется ***нормированным*** (ЛНП), если $\forall x \in E$ поставлено в соответствие неотрицательное число $\|x\|$ так, что выполнены следующие 4 аксиомы:

1) Неотрицательность: $\forall x \in E \ \ \|x\| \geq 0$.

2) Однородность: $\forall \lambda \in$ ⊠ $\quad \|\lambda x\| = |\lambda| \|x\|$**.**

3) Неравенство треугольника: $\forall x, y \in E \ \ \|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$.

4) Невырожденность: $\|x\| = 0 \Leftrightarrow x = \mathbf{0}$.

Следствия:

1) $\|\mathbf{0}\| = 0$. ⊠ $\|\mathbf{0}\| = \|0 \cdot x\| = 0 \cdot \|x\| = 0$.⊠

2) Обратное неравенство треугольника: $\|x - y\| \geq \big|\, \|x\| - \|y\| \,\big|$.

⊠ $$\begin{cases} \|x\| = \|(x - y) + y\| \leq \|x - y\| + \|y\|, \\ \|y\| = \|(y - x) + x\| \leq \|y - x\| + \|x\|. \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \|x\| - \|y\| \leq \|x - y\|, \\ \|y\| - \|x\| \leq \|y - x\|. \end{cases} \Rightarrow \ \|x - y\| \geq \big|\|x\| - \|y\|\big|$$ ⊠

З а м е ч а н и е. Если выполняются аксиомы 1)-3), а 4)-я аксиома не выполняется, то говорят, что задана ***полунорма***.

Например, в пространстве интегрируемых на сегменте $[a, b]$ функция $\|x\| = \int\limits_a^b |f(x)|\,dx$ является полунормой. Однако если функции, для которых $\|f - g\| = 0$ считать равными, то функция станет нормой.

$$\textbf{ЛНП} \Rightarrow \textbf{ЛП}$$

$$\textbf{ЛНП} \Rightarrow \textbf{МП}$$

$$\textbf{ЛП} \not\Rightarrow \textbf{МП}$$

$$\textbf{ЛП} \not\Leftarrow \textbf{МП}$$

Норма $\|x\|_2$ в ЛНП X ***подчиненна норме*** $\|x\|_1$, если

$$\exists c \in \mathbb{R},\, c > 0,\, \forall x \in X \ \|x\|_2 \le c\|x\|_1.$$

Две нормы $\|x\|_1$ и $\|x\|_2$ в ЛНП X ***эквивалентны***, если существуют такие постоянные $c_1 > 0$ и $c_2 > 0$, что

$$\forall x \in X \ c_1\|x\|_1 \le \|x\|_2 \le c_2\|x\|_1.$$

Если норма $\|x\|_2$ подчинена норме $\|x\|_1$ и

– $\{x_n\}$ сходится к x_0 по норме $\|x\|_1$, то сходится и по норме $\|x\|_2$,

– $\{x_n\}$ расходится по норме $\|x\|_2$, то она расходится и по норме $\|x\|_1$.

Если нормы $\|x\|_1$, $\|x\|_2$ эквивалентны, то последовательность либо в обеих нормах сходится, либо в обеих нормах расходится.

Норма $\|x\|_2$ в ЛНП X ***подчиненна норме*** $\|x\|_1$, если

$$\exists c \in \mathbb{R}, c > 0, \forall x \in X \ \|x\|_2 \le c\|x\|_1 .$$

1. Пусть $\{x_n\}$ сходится к x_0 по норме $\|x\|_1$, тогда

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists n_0 \ \forall n > n_0 \ \|x_n - x_0\|_1 < \varepsilon$$

Следовательно,

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists n_0 \ \forall n > n_0 \ \|x_n - x_0\|_2 \le c\|x_n - x_0\|_1 < c\varepsilon ,$$

т.е. $\{x_n\}$ сходится и по норме $\|x\|_2$,

2. Пусть $\{x_n\}$ расходится по норме $\|x\|_2$, тогда

$$\exists \varepsilon > 0 \ \forall n_0 \ \exists n > n_0 \ \|x_n - x_0\|_2 \ge \varepsilon$$

Следовательно,

$$\exists \varepsilon > 0 \ \forall n_0 \ \exists n > n_0 \ \|x_n - x_0\|_1 \ge \frac{1}{c}\|x_n - x_0\|_2 \ge \frac{\varepsilon}{c} .$$

т.е. $\{x_n\}$ расходится и по норме $\|x\|_1$.

1. В конечномерных пространствах все нормы эквивалентны.

2. Норма $\|x\|_A$ подчинена норме $\|x\|_B$, т.е. $\exists c > 0 \ \ \|x\|_A \le c\|x\|_B$.

$\|x\|_A$	$\|x\|_B$
Последовательности	
$\sup\limits_i \|x_i\|$	$\sqrt[p]{\sum\limits_{i=1}^{\infty} \|x_i\|^p}, \ p > 1$
$\sqrt[p+q]{\sum\limits_{i=1}^{\infty} \|x_i\|^{p+q}}, \ q > 0$	$\sqrt[p]{\sum\limits_{i=1}^{\infty} \|x_i\|^p}$
Функции	
$\sqrt[p]{\int\limits_{\Omega} \|f(x)\|^p \, dx}, \ p > 1$	$\sup\limits_{x\in\Omega} \|f(x)\|$
$\sqrt[p]{\int\limits_{\Omega} \|f(x)\|^p \, dx}$	$\sqrt[p+q]{\int\limits_{\Omega} \|f(x)\|^{p+q} \, dx}, \ q > 0$

Теорема. Произвольная сфера $\|x - x_0\| = r$ является в E^m замкнутым и ограниченным множеством.

 Замкнутость. Пусть a – предельная точка сферы $S_r(x_0)$, т.е.

$$x_n \to a, \;\; x_n \in S_r(x_0)$$

По неравенству треугольника

$$\|a - x_0\| \le \|a - x_n\| + \|x_n - x_0\| = \|a - x_n\| + r,$$

$$r = \|x_n - x_0\| \le \|x_n - a\| + \|a - x_0\|.$$

При $n \to \infty$, получим

$$\begin{matrix} \|a - x_0\| \le r \\ r \le \|a - x_0\| \end{matrix} \;\Rightarrow\; r = \|a - x_0\| \;\Rightarrow\; a \in S_r(x_0) \;\Rightarrow\; S_r(x_0)$$ - замкнутое множество.

Ограниченность.

$$x \in S_r(x_0) \Rightarrow \|x - x_0\| = r < r + 1 \Rightarrow S_r(x_0) \subset D_{r+1}(x_0),$$

где $D_{r+1}(x_0)$ открытый шар.

Теорема. Во всяком *конечномерном* ЛП все нормы эквивалентны.

□ Пусть E^m – m-мерное ЛНП с базисом $\{e_k\}_{k=1}^m$ и некоторой нормой $\|x\|$.

Для произвольного $x=\sum\limits_{k=1}^m \xi_k e_k \in E$ определим в E евклидову норму $\|x\|_c=\sqrt{\sum\limits_{k=1}^m (\xi_k)^2}$.

1) $\|x\|$ подчинена $\|x\|_c$:

$$\|x\|=\left\|\sum_{k=1}^m \xi_k e_k\right\| \le \sum_{k=1}^m |\xi_k|\cdot\|e_k\| \le \begin{bmatrix}\text{неравество}\\ \text{Гельдера}\end{bmatrix} \le \sqrt{\sum_{k=1}^m |\xi_k|^2}\sqrt{\sum_{k=1}^m \|e_k\|^2}=\|x\|_c\,\beta=\beta\|x\|_c \qquad (*)$$

2) $\|x\|_c$ подчинена $\|x\|$.

Рассмотрим функцию $\|x\|$ на сфере $S_1(\mathbf{0})=\left\{x \mid \|x\|_c=1\right\}$.

$$\big|\,\|x'\|-\|x''\|\,\big| \le [\text{обратное неравенство треугольника}] \le \|x'-x''\| \overset{(*)}{\le} \beta\|x'-x''\|_c .$$

$\Rightarrow$ функция $\|x\|$ удовлетворяет условию Липшица $\Rightarrow$ $\|x\|$ непрерывна в E^m.

Сфера $S_1(\mathbf{0})$ – замкнутое в E^m множество $\Rightarrow$ $\|x\|$ достигает на $S_1(\mathbf{0})$ минимума, т.е.

$$\exists x_0 \in S_1(\mathbf{0}) \quad \lambda=\|x_0\|=\min_{x\in S_1(\mathbf{0})}\|x\| \overset{x_0\ne\mathbf{0}}{>} 0 .$$

Пусть x – произвольный элемент пространства E^m, тогда

$$\frac{x}{\|x\|_c}\in S_1(\mathbf{0}) \;\Rightarrow\; \left\|\frac{x}{\|x\|_c}\right\| \ge \lambda \;\Rightarrow\; \lambda\|x\|_c \le \|x\| . □$$

Связь между сходимостью в бесконечномерных пространствах

"Сходится в B" $\Rightarrow$ "Сходится в A"	
B	A
Последовательности	
c_0	c, m
c	m
l_p, $p>1$	c_0, c, m, l_{p+q}, $q>0$
Функции	
$C^{k+m}\left(\bar{\Omega}\right), k,m\in\mathbb{N}$	$C^k\left(\bar{\Omega}\right), C\left(\bar{\Omega}\right), M\left(\bar{\Omega}\right),$ $CL_p\left(\bar{\Omega}\right), L_p\left(\bar{\Omega}\right),\ p>1$
$C\left(\bar{\Omega}\right)$	$M\left(\bar{\Omega}\right),$ $CL_p\left(\bar{\Omega}\right), L_p\left(\bar{\Omega}\right),\ p>1$
$CL_p\left(\bar{\Omega}\right),\ p>1$	$CL_{p+q}\left(\bar{\Omega}\right), L_{p+q}\left(\bar{\Omega}\right),\ q>0$
$L_p\left(\Omega\right),\ p>1$	$L_{p+q}\left(\Omega\right),\ q>0$

Фундаментальные и сходящиеся последовательности

Последовательность $\{x_n\}$ элементов МП X называется ***сходящейся в себе*** (или ***фундаментальной***, или ***последовательностью Коши***), если

:
$$\forall\varepsilon > 0 \;\exists n_0(\varepsilon)\; \forall n, m \ge n_0 \;\; \rho(x_n, x_m) < \varepsilon$$
$$\text{или } \forall\varepsilon > 0 \;\exists n_0(\varepsilon)\; \forall n \ge n_0 \;\; \forall k \;\; \rho(x_{n+k}, x_n) < \varepsilon$$

В ЛНП последовательность $\{x_n\}$ называется ***фундаментальной относительно нормы пространства,*** если она фундаментальна относительно метрики, порожденной этой нормой ($\rho_X(x, y) = \|x - y\|_X$), т.е.

$$\forall\varepsilon > 0 \;\exists n_0(\varepsilon)\; \forall n, m \ge n_0 \;\; \|x_n - x_m\| < \varepsilon$$
$$\text{или } \forall\varepsilon > 0 \;\exists n_0(\varepsilon)\; \forall n \ge n_0 \;\; \forall k \;\; \|x_{n+k} - x_n\| < \varepsilon$$

Свойства фундаментальных последовательностей (ФП)

1. Всякая ФП ограничена.

2. Всякая сходящаяся последовательность фундаментальна.

3. Любая подпоследовательность ФП является ФП.

4. Если подпоследовательность ФП сходится к x, то и сама последовательность сходится к x.

5. Если $\{x_n\}$ – ФП, то $\{\lambda x_n\}$ – ФП.

6. Если $\{x_n\}$, $\{y_n\}$ – ФП, то $\{x_n + y_n\}$ - ФП.

Свойства сходящихся в ЛНП последовательностей

1. Если $x_n \to x$, то в любой окрестности точки x находятся все члены последовательности $\{x_n\}$, за исключением, быть может, их конечного числа.

2. Предел единственен.

3. Любая подпоследовательность сходящейся последовательности сходится к тому же пределу, что и сама последовательность.

4. Сходящаяся последовательность ограниченна.

5. Если $x_n \to x$ и $\lambda_n \to \lambda$, где $\{\lambda_n\}$ последовательность скаляров, то $\lambda_n x_n \to \lambda x$.

6. Если $x_n \to x$ и $y_n \to y$, то $x_n + y_n \to x + y$.

7. Если $x_n \to x$, то $\|x_n\| \to \|x\|$.

8. Если $x_n \to x$, то $\forall y$ $\|x_n - y\| \to \|x - y\|$.

9. Если $x_n \to x$ и $\|x_n - y_n\| \to 0$, то $y_n \to x$.

10. Если $x_n \to x$ и $y_n \to y$, то $\|x_n - y_n\| \to \|x - y\|$.

МП X называется ***полным***, если в нем всякая ФП сходится.

ЛНП называется ***полным***, если оно является полным в смысле метрики, порождаемой нормой данного пространства. Полное ЛНП называется ***банаховым*** (или B***-пространством***).

Если X **полное** пространство, то

«$\{x_n\}$ сходится» $\Leftrightarrow$ «$\{x_n\}$ фундаментальна»

«$\{x_n\}$ не фундаментальна» $\Leftrightarrow$ «$\{x_n\}$ расходится»

Если X **не** является **полным** пространством, то

«$\{x_n\}$ сходится» $\Rightarrow$ «$\{x_n\}$ фундаментальна»

«$\{x_n\}$ не фундаментальна» $\Rightarrow$ «$\{x_n\}$ расходится»

«$\{x_n\}$ сходится» $\not\Leftarrow$ «$\{x_n\}$ фундаментальна»

«$\{x_n\}$ не фундаментальна» $\not\Leftarrow$ «$\{x_n\}$ расходится»

Примеры банаховых (полных) пространств

1. Все конечномерные пространства

2. Пространства последовательностей: c_0, c, l_p, $l_\infty = m$.

3. Пространства функций: $M(\bar{\Omega})$, $C(\bar{\Omega})$, $L_p(\Omega)$.

Замечание: Пространства $C^k(\bar{\Omega})$ и $CL_p(\bar{\Omega})$ не являются банаховыми (полными).

Теорема о вложенных шарах. Пусть в *полном* МП X дана последовательность замкнутых шаров $\bar{D}_{\varepsilon_n}(a_n), n = 1, 2, \dots$, вложенных друг в друга, радиусы которых стремятся к нулю, т.е.

$$\forall m > n \quad \bar{D}_{\varepsilon_m}(a_m) \subset \bar{D}_{\varepsilon_n}(a_n) \ \text{и} \ \lim_{n\to\infty} \varepsilon_n = 0.$$

Тогда $\exists! \, a \in X \ \ \forall n \in \mathbb{N} \quad a \in \bar{D}_{\varepsilon_n}(a_n)$.

◄ *Существование.* При $m > n$ $a_m \in \bar{D}_{\varepsilon_m}(a_m) \subset \bar{D}_{\varepsilon_n}(a_n) \ \Rightarrow \ \rho(a_n, a_m) \le \varepsilon_n \ \Rightarrow$

$$\Rightarrow \ a_n - \text{ФП.} \ \overset{X-\text{полное}}{\Rightarrow} \ \ \Rightarrow \ \exists a \in X \ \ a = \lim_{n\to\infty} a_n.$$

Радиусы шаров стремятся к нулю и $\forall n, p \in \mathbb{N} \quad a_{n+p} \in \bar{D}_{\varepsilon_n}(a_n) \ \Rightarrow$

$$\Rightarrow a_{n+p} \to a \ \text{при} \ p \to \infty.$$

Шары замкнуты, поэтому $\forall n \in \mathbb{N} \quad a \in \bar{D}_{\varepsilon_n}(a_n)$.

Единственность. От противного. Пусть существует $b \ne a$, принадлежащая всем шарам, тогда

$$\rho(a,b) = \delta > 0 \ \text{и} \ \delta = \rho(a,b) \le \rho(a, a_n) + \rho(a_n, b) \le 2\varepsilon_n \to 0,$$

что невозможно.►

Подпространства

1. ***Подпространством МП*** X – называют множество $Y \subset X$, имеющее ту же метрику, что и X.

2. ***Подпространством ЛП*** X называют множество $Y \subset X$, являющееся ЛП с теми же операциями, что и X.

Множество L в ЛП X называется ***линейным многообразием*** (***линейным множеством***), если $\forall x, y \in L$ и любых скаляров λ, μ $\lambda x + \mu y \in L$.

Лемма. Всякое линейное многообразие в ЛП X является ЛП с теми же операциями, что и X, а значит, всякое линейное многообразие L в ЛП X является подпространством ЛП X.

3. ***Подпространством ЛНП*** X – называют замкнутое множество $Y \subset X$, имеющее ту же норму и те же операции, что и пространство X.

Лемма. В конечномерном ЛНП всякое линейное многообразие является подпространством. В бесконечномерном случае это не так (например, в пространстве $C[a,b]$ многочлены образуют линейное многообразие, но не подпространство (так как не замкнуто).

Всякое линейное многообразие в конечномерном ЛНП есть подпространство.

Всякое конечномерное линейное многообразие в ЛНП есть подпространство.

В ЛНП замыкание линейного многообразия есть подпространство.

Примеры подпространств ЛНП:

1) c_0 – подпространство c;

2) c – подпространство m;

3) пространство всех многочленов степени $\leq k$ – подпространство $C[a,b]$.

Линейные многообразия плотные в ЛНП

Линейное многообразие $L \subset E$, называется ***плотным в ЛНП*** E, если

$$\forall x \in E \ \ \forall \varepsilon > 0 \ \ \exists u \in L \ \ \|x - u\| < \varepsilon,$$

Замечание. Если L плотно в E, то

1) $\overline{L} = E$,

2) $\forall x \in E \ \ \exists$ последовательность $\{u_n\}$ такая, что $u_n \in L$, $\lim\limits_{n\to\infty} u_n = x$.

Теоремы Вейерштрасса:

1. Линейное многообразие всех полиномов $\sum\limits_{k=0}^{n} a_k t^k$ плотно в $C[a,b]$.

2. Линейное многообразие всех тригонометрических многочленов

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{n} \left(a_k \cos(kx) + b_k \sin(kx)\right)$$

плотно в ЛНП непрерывных на $[-\pi, \pi]$ функций, удовлетворяющих граничному условию $f(-\pi) = f(\pi)$, с нормой $\|f\| = \max\limits_{t\in[-\pi,\pi]} |f(t)|$.

Теорема о пополнении метрических пространств

Любое МП X можно пополнить, точнее: оно всегда может быть вложено в другое полное метрическое пространство X' такое, что в нем существует всюду плотное в X' подпространство X_0, изометричное пространству X. Пространство X' называют ***пополнением*** или ***замыканием*** пространства X.

Теорема о пополнении ЛНП

Всякое ЛНП E можно рассматривать как линейное многообразие, плотное в некотором банаховом пространстве $\hat{E}$ Пространство $\hat{E}$ называют ***пополнением*** пространства E.

Построение для произвольного ЛНП E пополнения $\hat{E}$

Рассмотрим всевозможные ФП $\{x_n\}$ пространства E.

Если $\|x_n - \tilde{x}_n\| \to 0,\ n \to \infty$, то последовательности $\{x_n\}$ и $\{\tilde{x}_n\}$ будем называть эквивалентными (и писать $\{x_n\} \sim \{\tilde{x}_n\}$).

Множество всех ФП разобьем на классы эквивалентности:

две последовательности $\{x_n\}$ и $\{\tilde{x}_n\}$ включаем в один класс тогда и только тогда, когда $\{x_n\} \sim \{\tilde{x}_n\}$).

Классы обозначим через $\hat{x}, \hat{y}, \ldots$ Если $\{x_n\} \in \hat{x}$, то $\{x_n\}$ – представитель класса $\hat{x}$.

Элементами пространства $\hat{E}$ будут классы эквивалентности фундаментальных в E последовательностей.

Операции сложения и умножения в $\hat{E}$

- $\hat{x}+\hat{y}$ – класс, содержащий $\{x_n+y_n\}$, где $\{x_n\}\in\hat{x}$ и $\{y_n\}\in\hat{y}$.
- $\lambda\hat{x}$ – класс, содержащий $\{\lambda x_n\}$, где $\{x_n\}\in\hat{x}$.

Замечание 1. Определение классов $\hat{x}+\hat{y}$, $\lambda\hat{x}$ не зависит от выбора представителей классов.

$$\square\ \begin{matrix}\{\tilde{x}_n\}\in\hat{x}\\ \{\tilde{y}_n\}\in\hat{y}\end{matrix}\ \Rightarrow\ \{\tilde{x}_n+\tilde{y}_n\}\sim\{x_n+y_n\}\ \Rightarrow\ \{\tilde{x}_n+\tilde{y}_n\}\in\hat{x}+\hat{y};$$

Для класса $\lambda\hat{x}$ аналогично. $\square$

Замечание 2. Классы $\{x_n+y_n\}$, $\{\lambda x_n\}$ состоят из ФП.

Нуль в $\hat{E}$ – класс $\{\mathbf{0}\}$, представителем которого является $\mathbf{0}\in E$.

Норма в $\hat{E}$: $\|\hat{x}\|_{\hat{E}}=\lim\limits_{n\to\infty}\|x_n\|_E$, где $\{x_n\}\in\hat{x}$.

Замечание 1. Предел существует, т.к. $\{\|x_n\|\}$ – числовая ФП:

$$\big|\,\|x_n\|-\|x_m\|\,\big|\le\|x_n-x_m\|.$$

Замечание 2. Предел не зависит от выбора представителей класса $\hat{x}$:

$\square$ Если также $\{\tilde{x}_n\}\in\hat{x}$, то $\big|\,\|\tilde{x}_n\|-\|x_n\|\,\big|\le\|\tilde{x}_n-x_n\|\to 0$, $n\to\infty$. $\square$