

ЛИНЕЙНЫЕ ПРОСТРАНСТВА

Множество E называется *линейным пространством* (ЛП) над полем \mathbb{K} , если в нем определены две операции:

1) $\forall x, y \in E$ определен элемент $x + y \in E$ – *сумма*;

2) $\forall x \in E \quad \forall \lambda \in \mathbb{K}$ определен элемент $\lambda x \in E$

так, что выполнены аксиомы $\forall x, y, z \in E \quad \forall \lambda, \mu \in \mathbb{K}$:

1) $x + y = y + x$;

2) $x + (y + z) = (x + y) + z$;

3) $\exists \mathbf{0} \in E$ такой, что $x + \mathbf{0} = x$;

4) $\lambda(\mu x) = (\lambda\mu)x$;

5) $1 \cdot x = x$ и $0 \cdot x = \mathbf{0}$, где $0, 1 \in \mathbb{K}$;

6) $\lambda(x + y) = \lambda x + \lambda y$;

7) $(\lambda + \mu)x = \lambda x + \mu x$.

Замечание. \mathbb{K} не обязательно числовое множество. Пространства над вещественным или комплексным полем, обычно называют *вещественным* или *комплексным ЛП*.

Пусть $\forall k \alpha_k \in \mathbb{K}$. Тогда $\sum_{k=1}^n \alpha_k x_k$ – *линейная комбинация элементов* $x_1, x_2, \dots, x_n \in E$.

Элементы x_1, x_2, \dots, x_n *линейно зависимыми*, если существует их линейная комбинация $\sum_{k=1}^n \alpha_k x_k = \mathbf{0}$, где $\sum_{k=1}^n |\alpha_k| > 0$.

ЛП называется *m -мерным*, если в нем существует m линейно независимых векторов, а всякие $m+1$ векторов линейно зависимы.

Набор любых m линейно независимых векторов в m -мерном линейном пространстве E называется *базисом* в E .

Если $\{e_k\}_{k=1}^m$ произвольный базис в E , то $\forall x \in E$ существуют скаляры $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_m$ такие, что $x = \sum_{k=1}^m \xi_k e_k$.

ЛП E называется *бесконечномерным*, если для каждого натурального n в E существует n линейно независимых элементов.

НОРМИРОВАННЫЕ ПРОСТРАНСТВА

ЛП E называется *нормированным* (ЛНП), если $\forall x \in E$ поставлено в соответствие неотрицательное число $\|x\|$ так, что выполнены следующие 4 аксиомы:

- 1) Неотрицательность: $\forall x \in E \quad \|x\| \geq 0$.
- 2) Однородность: $\forall \lambda \in \mathbb{R} \quad \|\lambda x\| = |\lambda| \|x\|$.
- 3) Неравенство треугольника: $\forall x, y \in E \quad \|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$.
- 4) Невырожденность: $\|x\| = 0 \Leftrightarrow x = \mathbf{0}$.

Следствия:

1) $\|\mathbf{0}\| = 0$. $\square \quad \|\mathbf{0}\| = \|0 \cdot x\| = 0 \cdot \|x\| = 0. \square$

2) Обратное неравенство треугольника: $\|x - y\| \geq | \|x\| - \|y\| |$.

$$\square \quad \begin{cases} \|x\| = \|(x - y) + y\| \leq \|x - y\| + \|y\|, \\ \|y\| = \|(y - x) + x\| \leq \|y - x\| + \|x\|. \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \|x\| - \|y\| \leq \|x - y\|, \\ \|y\| - \|x\| \leq \|y - x\|. \end{cases} \Rightarrow \|x - y\| \geq | \|x\| - \|y\| | \square$$

Замечание. Если выполняются аксиомы 1)-3), а 4)-я аксиома не выполняется, то говорят, что задана *полунорма*.

Например, в пространстве интегрируемых на сегменте $[a, b]$ функция $\|x\| = \int_a^b |f(x)| dx$ является полунормой. Однако если функции, для которых $\|f - g\| = 0$ считать равными, то функция станет нормой.

ЛНП \Rightarrow ЛП

ЛНП \Rightarrow МП

ЛП $\not\Rightarrow$ МП

ЛП $\not\Leftarrow$ МП

Норма $\|x\|_2$ в ЛНП X *подчинена* норме $\|x\|_1$, если

$$\exists c \in \mathbb{R}, c > 0, \forall x \in X \quad \|x\|_2 \leq c \|x\|_1.$$

Две нормы $\|x\|_1$ и $\|x\|_2$ в ЛНП X *эквивалентны*, если существуют такие постоянные $c_1 > 0$ и $c_2 > 0$, что

$$\forall x \in X \quad c_1 \|x\|_1 \leq \|x\|_2 \leq c_2 \|x\|_1.$$

Если норма $\|x\|_2$ подчинена норме $\|x\|_1$ и

- $\{x_n\}$ **сходится** к x_0 по норме $\|x\|_1$, то **сходится** и по норме $\|x\|_2$,
- $\{x_n\}$ **расходится** по норме $\|x\|_2$, то она **расходится** и по норме $\|x\|_1$.

Если нормы $\|x\|_1$, $\|x\|_2$ эквивалентны, то последовательность либо в обеих нормах сходится, либо в обеих нормах расходится.

Норма $\|x\|_2$ в ЛНП X *подчинена* норме $\|x\|_1$, если

$$\exists c \in \mathbb{R}, c > 0, \forall x \in X \quad \|x\|_2 \leq c \|x\|_1.$$

1. Пусть $\{x_n\}$ **сходится** к x_0 по норме $\|x\|_1$, тогда

$$\forall \varepsilon > 0 \exists n_0 \forall n > n_0 \quad \|x_n - x_0\|_1 < \varepsilon$$

Следовательно,

$$\forall \varepsilon > 0 \exists n_0 \forall n > n_0 \quad \|x_n - x_0\|_2 \leq c \|x_n - x_0\|_1 < c\varepsilon,$$

т.е. $\{x_n\}$ **сходится** и по норме $\|x\|_2$,

2. Пусть $\{x_n\}$ **расходится** по норме $\|x\|_2$, тогда

$$\exists \varepsilon > 0 \forall n_0 \exists n > n_0 \quad \|x_n - x_0\|_2 \geq \varepsilon$$

Следовательно,

$$\exists \varepsilon > 0 \forall n_0 \exists n > n_0 \quad \|x_n - x_0\|_1 \geq \frac{1}{c} \|x_n - x_0\|_2 \geq \frac{\varepsilon}{c}.$$

т.е. $\{x_n\}$ **расходится** и по норме $\|x\|_1$.

1. В конечномерных пространствах все нормы эквивалентны. ▶

2. Норма $\|x\|_A$ подчинена норме $\|x\|_B$, т.е. $\exists c > 0 \quad \|x\|_A \leq c \|x\|_B$.

$\ x\ _A$	$\ x\ _B$
Последовательности	
$\sup_i x_i $	$\sqrt[p]{\sum_{i=1}^{\infty} x_i ^p}, p > 1$
$\sqrt[p+q]{\sum_{i=1}^{\infty} x_i ^{p+q}}, q > 0$	$\sqrt[p]{\sum_{i=1}^{\infty} x_i ^p}$
Функции	
$\sqrt[p]{\int_{\Omega} f(x) ^p dx}, p > 1$	$\sup_{x \in \Omega} f(x) $
$\sqrt[p]{\int_{\Omega} f(x) ^p dx}$	$\sqrt[p+q]{\int_{\Omega} f(x) ^{p+q} dx}, q > 0$

Теорема. Произвольная сфера $\|x - x_0\| = r$ является в E^m замкнутым и ограниченным множеством.

☐ *Замкнутость.* Пусть a – предельная точка сферы $S_r(x_0)$, т.е.

$$x_n \rightarrow a, \quad x_n \in S_r(x_0)$$

По неравенству треугольника

$$\|a - x_0\| \leq \|a - x_n\| + \|x_n - x_0\| = \|a - x_n\| + r,$$

$$r = \|x_n - x_0\| \leq \|x_n - a\| + \|a - x_0\|.$$

При $n \rightarrow \infty$, получим

$$\begin{aligned} \|a - x_0\| \leq r \\ r \leq \|a - x_0\| \end{aligned} \Rightarrow r = \|a - x_0\| \Rightarrow a \in S_r(x_0) \Rightarrow S_r(x_0) \text{ – замкнутое множество.}$$

Ограниченность.

$$x \in S_r(x_0) \Rightarrow \|x - x_0\| = r < r + 1 \Rightarrow S_r(x_0) \subset D_{r+1}(x_0),$$

где $D_{r+1}(x_0)$ открытый шар. ☐

Теорема. Во всяком конечномерном ЛП все нормы эквивалентны.

☒ Пусть E^m – m -мерное ЛНП с базисом $\{e_k\}_{k=1}^m$ и некоторой нормой $\|x\|$.

Для произвольного $x = \sum_{k=1}^m \xi_k e_k \in E$ определим в E евклидову норму $\|x\|_c = \sqrt{\sum_{k=1}^m (\xi_k)^2}$.

1) $\|x\|$ подчинена $\|x\|_c$:

$$\|x\| = \left\| \sum_{k=1}^m \xi_k e_k \right\| \leq \sum_{k=1}^m |\xi_k| \cdot \|e_k\| \leq \left[\begin{array}{c} \text{неравенство} \\ \text{Гельдера} \end{array} \right] \leq \sqrt{\sum_{k=1}^m |\xi_k|^2} \sqrt{\sum_{k=1}^m \|e_k\|^2} = \|x\|_c \beta = \beta \|x\|_c \quad (*)$$

2) $\|x\|_c$ подчинена $\|x\|$.

Рассмотрим функцию $\|x\|$ на сфере $S_1(\mathbf{0}) = \{x \mid \|x\|_c = 1\}$.

$$\left| \|x'\| - \|x''\| \right| \leq \left[\text{обратное неравенство треугольника} \right] \leq \|x' - x''\| \stackrel{(*)}{\leq} \beta \|x' - x''\|_c.$$

\Rightarrow функция $\|x\|$ удовлетворяет условию Липшица $\Rightarrow \|x\|$ непрерывна в E^m .

Сфера $S_1(\mathbf{0})$ – замкнутое в E^m множество $\Rightarrow \|x\|$ достигает на $S_1(\mathbf{0})$ минимума, т.е.

$$\exists x_0 \in S_1(\mathbf{0}) \quad \lambda = \|x_0\| = \min_{x \in S_1(\mathbf{0})} \|x\| \stackrel{x_0 \neq \mathbf{0}}{>} 0.$$

Пусть x – произвольный элемент пространства E^m , тогда

$$\frac{x}{\|x\|_c} \in S_1(\mathbf{0}) \Rightarrow \left\| \frac{x}{\|x\|_c} \right\| \geq \lambda \Rightarrow \lambda \|x\|_c \leq \|x\|. \quad \square$$

Связь между сходимостью в бесконечномерных пространствах

"Сходится в B " \Rightarrow "Сходится в A "	
B	A
Последовательности	
c_0	c, m
c	m
$l_p, p > 1$	$c_0, c, m, l_{p+q}, q > 0$
Функции	
$C^{k+m}(\bar{\Omega}), k, m \in \mathbb{N}$	$C^k(\bar{\Omega}), C(\bar{\Omega}), M(\bar{\Omega}),$ $CL_p(\bar{\Omega}), L_p(\bar{\Omega}), p > 1$
$C(\bar{\Omega})$	$M(\bar{\Omega}),$ $CL_p(\bar{\Omega}), L_p(\bar{\Omega}), p > 1$
$CL_p(\bar{\Omega}), p > 1$	$CL_{p+q}(\bar{\Omega}), L_{p+q}(\bar{\Omega}), q > 0$
$L_p(\Omega), p > 1$	$L_{p+q}(\Omega), q > 0$

Фундаментальные и сходящиеся последовательности

Последовательность $\{x_n\}$ элементов МП X называется *сходящейся в себе* (или *фундаментальной*, или *последовательностью Коши*), если

$$: \quad \forall \varepsilon > 0 \exists n_0(\varepsilon) \forall n, m \geq n_0 \rho(x_n, x_m) < \varepsilon$$

$$\text{или } \forall \varepsilon > 0 \exists n_0(\varepsilon) \forall n \geq n_0 \forall k \rho(x_{n+k}, x_n) < \varepsilon$$

В ЛНП последовательность $\{x_n\}$ называется *фундаментальной относительно нормы пространства*, если она фундаментальна относительно метрики, порожденной этой нормой ($\rho_X(x, y) = \|x - y\|_X$), т.е.

$$\forall \varepsilon > 0 \exists n_0(\varepsilon) \forall n, m \geq n_0 \|x_n - x_m\| < \varepsilon$$

$$\text{или } \forall \varepsilon > 0 \exists n_0(\varepsilon) \forall n \geq n_0 \forall k \|x_{n+k} - x_n\| < \varepsilon$$

Свойства фундаментальных последовательностей (ФП)

1. Всякая ФП ограничена.
2. Всякая сходящаяся последовательность фундаментальна.
3. Любая подпоследовательность ФП является ФП.
4. Если подпоследовательность ФП сходится к x , то и сама последовательность сходится к x .
5. Если $\{x_n\}$ – ФП, то $\{\lambda x_n\}$ – ФП.
6. Если $\{x_n\}, \{y_n\}$ – ФП, то $\{x_n + y_n\}$ – ФП.

Свойства сходящихся в ЛНП последовательностей

1. Если $x_n \rightarrow x$, то в любой окрестности точки x находятся все члены последовательности $\{x_n\}$, за исключением, быть может, их конечного числа.

2. Предел единственен.

3. Любая подпоследовательность сходящейся последовательности сходится к тому же пределу, что и сама последовательность.

4. Сходящаяся последовательность ограничена.

5. Если $x_n \rightarrow x$ и $\lambda_n \rightarrow \lambda$, где $\{\lambda_n\}$ последовательность скаляров, то $\lambda_n x_n \rightarrow \lambda x$.

6. Если $x_n \rightarrow x$ и $y_n \rightarrow y$, то $x_n + y_n \rightarrow x + y$.

7. Если $x_n \rightarrow x$, то $\|x_n\| \rightarrow \|x\|$.

8. Если $x_n \rightarrow x$, то $\forall y \ \|x_n - y\| \rightarrow \|x - y\|$.

9. Если $x_n \rightarrow x$ и $\|x_n - y_n\| \rightarrow 0$, то $y_n \rightarrow x$.

10. Если $x_n \rightarrow x$ и $y_n \rightarrow y$, то $\|x_n - y_n\| \rightarrow \|x - y\|$.

МП X называется *полным*, если в нем всякая ФП сходится.

ЛНП называется *полным*, если оно является полным в смысле метрики, порождаемой нормой данного пространства. Полное ЛНП называется *банаховым* (или *B -пространством*).

Если X **полное** пространство, то

« $\{x_n\}$ сходится» \Leftrightarrow « $\{x_n\}$ фундаментальна»

« $\{x_n\}$ **не** фундаментальна» \Leftrightarrow « $\{x_n\}$ **рас**сходится»

Если X **не** является **полным** пространством, то

« $\{x_n\}$ сходится» \Rightarrow « $\{x_n\}$ фундаментальна»

« $\{x_n\}$ **не** фундаментальна» \Rightarrow « $\{x_n\}$ **рас**сходится»

« $\{x_n\}$ сходится» $\not\Leftarrow$ « $\{x_n\}$ фундаментальна»

« $\{x_n\}$ **не** фундаментальна» $\not\Leftarrow$ « $\{x_n\}$ **рас**сходится»

Примеры банаховых (полных) пространств

1. Все конечномерные пространства
2. Пространства последовательностей: $c_0, c, l_p, l_\infty = m$.
3. Пространства функций: $M(\bar{\Omega}), C(\bar{\Omega}), L_p(\Omega)$.

Замечание: Пространства $C^k(\bar{\Omega})$ и $CL_p(\bar{\Omega})$ **не** являются банаховыми (полными).

Теорема о вложенных шарах. Пусть в *полном* МП X дана последовательность замкнутых шаров $\bar{D}_{\varepsilon_n}(a_n), n=1,2,\dots$, вложенных друг в друга, радиусы которых стремятся к нулю, т.е.

$$\forall m > n \quad \bar{D}_{\varepsilon_m}(a_m) \subset \bar{D}_{\varepsilon_n}(a_n) \quad \text{и} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \varepsilon_n = 0.$$

Тогда $\exists! a \in X \quad \forall n \in \mathbb{N} \quad a \in \bar{D}_{\varepsilon_n}(a_n)$.

\square *Существование.* При $m > n \quad a_m \in \bar{D}_{\varepsilon_m}(a_m) \subset \bar{D}_{\varepsilon_n}(a_n) \Rightarrow \rho(a_n, a_m) \leq \varepsilon_n \Rightarrow$
 $\Rightarrow a_n - \PhiП. \quad \xrightarrow{X\text{-полное}} \Rightarrow \exists a \in X \quad a = \lim_{n \rightarrow \infty} a_n.$

Радиусы шаров стремятся к нулю и $\forall n, p \in \mathbb{N} \quad a_{n+p} \in \bar{D}_{\varepsilon_n}(a_n) \Rightarrow$
 $\Rightarrow a_{n+p} \rightarrow a \text{ при } p \rightarrow \infty.$

Шары замкнуты, поэтому $\forall n \in \mathbb{N} \quad a \in \bar{D}_{\varepsilon_n}(a_n)$.

Единственность. От противного. Пусть существует $b \neq a$, принадлежащая всем шарам, тогда

$$\rho(a, b) = \delta > 0 \quad \text{и} \quad \delta = \rho(a, b) \leq \rho(a, a_n) + \rho(a_n, b) \leq 2\varepsilon_n \rightarrow 0,$$

что невозможно. \square

Подпространства

1. Подпространством МП X – называют множество $Y \subset X$, имеющее ту же метрику, что и X .

2. Подпространством ЛП X называют множество $Y \subset X$, являющееся ЛП с теми же операциями, что и X .

Множество L в ЛП X называется *линейным многообразием (линейным множеством)*, если $\forall x, y \in L$ и любых скаляров λ, μ $\lambda x + \mu y \in L$.

Лемма. Всякое линейное многообразие в ЛП X является ЛП с теми же операциями, что и X , а значит, всякое линейное многообразие L в ЛП X является подпространством ЛП X .

3. Подпространством ЛНП X – называют **замкнутое** множество $Y \subset X$, имеющее ту же норму и те же операции, что и пространство X .

Лемма. В конечномерном ЛНП всякое линейное многообразие является подпространством. В бесконечномерном случае это не так (например, в пространстве $C[a, b]$ многочлены образуют линейное многообразие, но не подпространство (так как не замкнуто)).

Всякое линейное многообразие в конечномерном ЛНП
есть подпространство.

Всякое конечномерное линейное многообразие в ЛНП
есть подпространство.

В ЛНП замыкание линейного многообразия
есть подпространство.

Примеры подпространств ЛНП:

1) c_0 – подпространство c ;

2) c – подпространство m ;

3) пространство всех многочленов степени $\leq k$ –
подпространство $C[a, b]$.

Линейные многообразия плотные в ЛНП

Линейное многообразие $L \subset E$, называется *плотным в ЛНП E* , если

$$\forall x \in E \quad \forall \varepsilon > 0 \quad \exists u \in L \quad \|x - u\| < \varepsilon,$$

Замечание. Если L плотно в E , то

1) $\bar{L} = E$,

2) $\forall x \in E \quad \exists$ последовательность $\{u_n\}$ такая, что $u_n \in L$, $\lim_{n \rightarrow \infty} u_n = x$.

Теоремы Вейерштрасса:

1. Линейное многообразие всех полиномов $\sum_{k=0}^n a_k t^k$ плотно в $C[a, b]$.
2. Линейное многообразие всех тригонометрических многочленов

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^n (a_k \cos(kx) + b_k \sin(kx))$$

плотно в ЛНП непрерывных на $[-\pi, \pi]$ функций, удовлетворяющих граничному условию $f(-\pi) = f(\pi)$, с нормой $\|f\| = \max_{t \in [-\pi, \pi]} |f(t)|$.

Теорема о пополнении метрических пространств

Любое МП X можно пополнить, точнее: оно всегда может быть вложено в другое полное метрическое пространство X' такое, что в нем существует всюду плотное в X' подпространство X_0 , изометричное пространству X . Пространство X' называют *пополнением* или *замыканием* пространства X .

Теорема о пополнении ЛНП

Всякое ЛНП E можно рассматривать как линейное многообразие, плотное в некотором банаховом пространстве \hat{E} . Пространство \hat{E} называют *пополнением* пространства E .

Построение для произвольного ЛНП E пополнения \hat{E}

Рассмотрим всевозможные ФП $\{x_n\}$ пространства E .

Если $\|x_n - \tilde{x}_n\| \rightarrow 0, n \rightarrow \infty$, то последовательности $\{x_n\}$ и $\{\tilde{x}_n\}$ будем называть эквивалентными (и писать $\{x_n\} \sim \{\tilde{x}_n\}$).

Множество всех ФП разобьем на классы эквивалентности:

две последовательности $\{x_n\}$ и $\{\tilde{x}_n\}$ включаем в один класс тогда и только тогда, когда $\{x_n\} \sim \{\tilde{x}_n\}$).

Классы обозначим через \hat{x}, \hat{y}, \dots . Если $\{x_n\} \in \hat{x}$, то $\{x_n\}$ – представитель класса \hat{x} .

Элементами пространства \hat{E} будут классы эквивалентности фундаментальных в E последовательностей.

Операции сложения и умножения в \hat{E}

- $\hat{x} + \hat{y}$ – класс, содержащий $\{x_n + y_n\}$, где $\{x_n\} \in \hat{x}$ и $\{y_n\} \in \hat{y}$.
- $\lambda\hat{x}$ – класс, содержащий $\{\lambda x_n\}$, где $\{x_n\} \in \hat{x}$.

Замечание 1. Определение классов $\hat{x} + \hat{y}$, $\lambda\hat{x}$ не зависит от выбора представителей классов.

$$\begin{aligned} \boxtimes \quad & \left\{ \begin{array}{l} \{\mathbb{X}_n\} \in \hat{x} \\ \{\mathbb{Y}_n\} \in \hat{y} \end{array} \right. \Rightarrow \{\mathbb{X}_n + \mathbb{Y}_n\} \boxtimes \{x_n + y_n\} \Rightarrow \{\mathbb{X}_n + \mathbb{Y}_n\} \in \hat{x} + \hat{y}; \end{aligned}$$

Для класса $\lambda\hat{x}$ аналогично. \boxtimes

Замечание 2. Классы $\{x_n + y_n\}$, $\{\lambda x_n\}$ состоят из ФП.

Нуль в \hat{E} – класс $\{\mathbf{0}\}$, представителем которого является $\mathbf{0} \in E$.

Норма в \hat{E} : $\|\hat{x}\|_{\hat{E}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \|x_n\|_E$, где $\{x_n\} \in \hat{x}$.

Замечание 1. Предел существует, т.к. $\{\|x_n\|\}$ – числовая ФП:

$$\left| \|x_n\| - \|x_m\| \right| \leq \|x_n - x_m\|.$$

Замечание 2. Предел не зависит от выбора представителей класса \hat{x} :

$$\boxtimes \text{ Если также } \{\mathbb{X}_n\} \in \hat{x}, \text{ то } \left| \|\mathbb{X}_n\| - \|x_n\| \right| \leq \|\mathbb{X}_n - x_n\| \rightarrow 0, n \rightarrow \infty. \boxtimes 22$$