

Тема 6

§1 Решение нелинейного уравнения $f(x) = 0$

Требуется найти все или некоторые корни уравнения

$$f(x) = 0$$

- Исследование характера корней: расположения, количества, кратности корней;
- Отделение корней: выделение областей, в каждой из которых находится единственный корень;
- Уточнение корней: вычисление интересующих корней с наперед заданной точностью.

построение таблицы $f(x)$

x_0	x_1	x_2	x_3	x_4	\dots	x_{n-1}	x_n
+	-	+	+	+		-	-

для многочлена

$$f(x) = a_0 + a_1x + \dots + a_mx^m$$

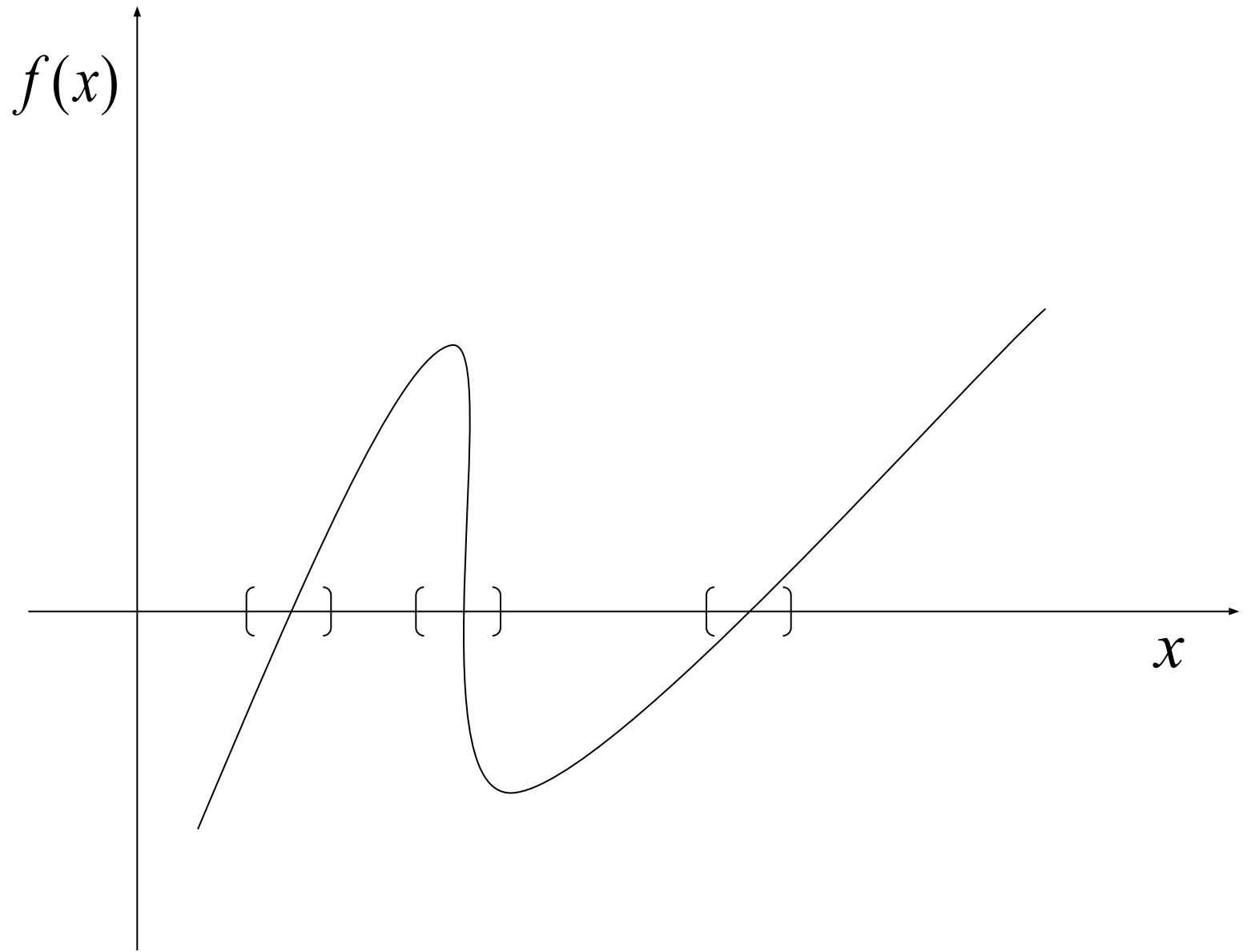
если выполнены неравенства

$$f(x_0) > 0, f'(x_0) > 0, f''(x_0) > 0, \dots, f^{(m)}(x_0) > 0,$$

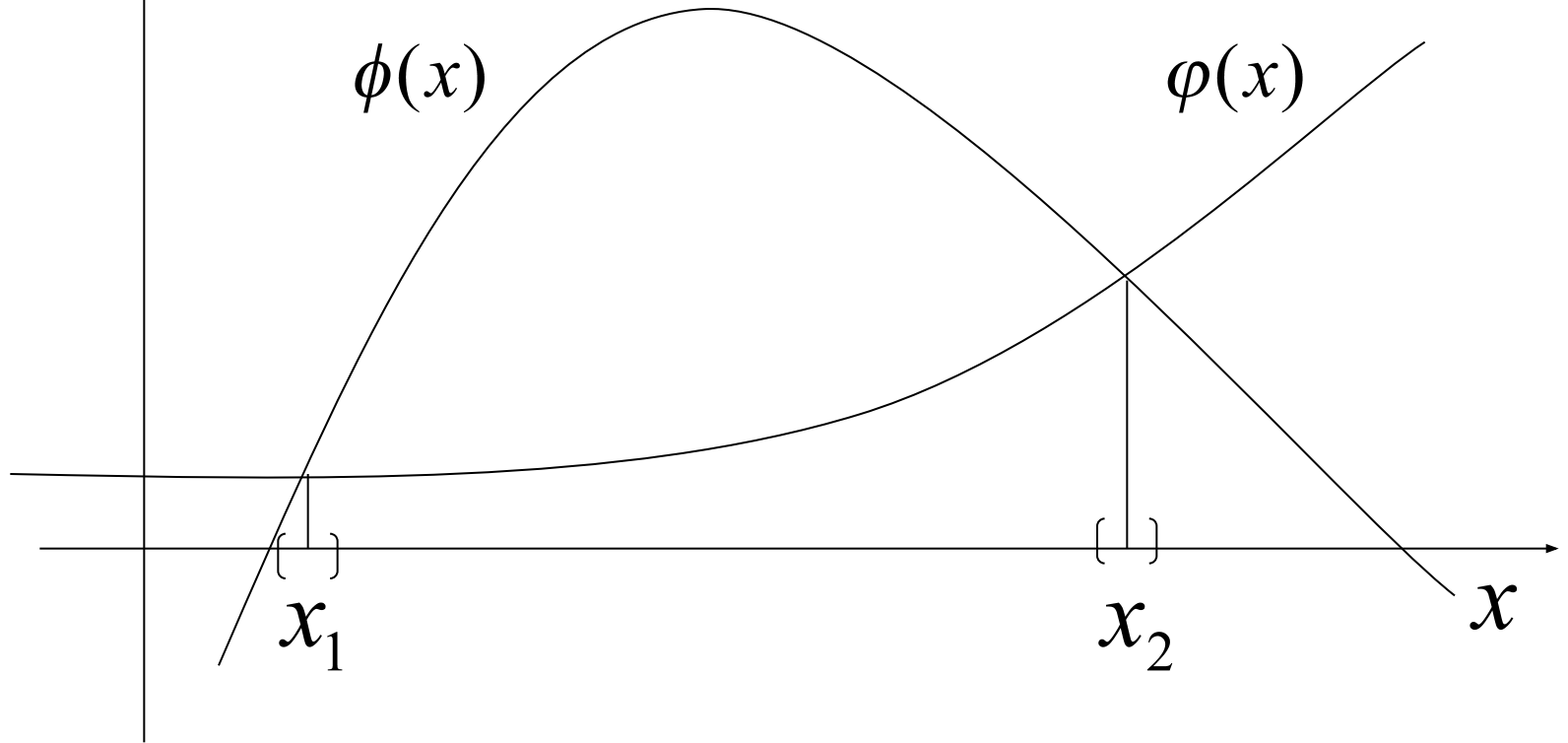
то положительные корни не превосходят x_0

действительно:

$$f(x) = f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1}(x - x_0) + \dots + \frac{f^{(m)}(x_0)}{m!}(x - x_0)^m$$



$$f(x) = \varphi(x) - \phi(x)$$



1. Дихотомия

Метод деления пополам

Метод бисекции

$$x_0, x_1, x_2, \dots, x_m, \rightarrow x^*, |x_m - x_{m-1}| < \varepsilon$$

$$g(x) = \frac{f(x)}{(x - x^*)^k}$$

2. Метод простой итерации

$$x = \varphi(x)$$

$$x_{n+1} = \varphi(x_n), n = 0, 1, 2, \dots$$

$$x_0, x_1, x_2, \dots, x_m, \rightarrow x^*$$

Исследуем условия сходимости:

$$x^* = \varphi(x^*)$$

$$x_{n+1} - x^* = \varphi(x_n) - \varphi(x^*) = \varphi'(\xi)(x_n - x^*)$$

$$|\varphi'(x)| \leq q < 1$$

$$|x_{n+1} - x^*| \leq q|x_n - x^*|$$

Пример $x^2 = a$

$$x = \frac{a}{x}, \varphi(x) = \frac{a}{x} \Rightarrow x_{n+1} = \frac{a}{x_n}$$

метод не сходится вообще $|\varphi'(x^*)| = \left| -\frac{a}{x^{*2}} \right| = 1$

$$x = \frac{1}{2} \left(x + \frac{a}{x} \right), \varphi(x) = \frac{1}{2} \left(x + \frac{a}{x} \right) \Rightarrow x_{n+1} = \frac{1}{2} \left(x_n + \frac{a}{x_n} \right)$$

метод сходится при любом начальном приближении

$$\varphi'(x^*) = \frac{1}{2} \left(1 - \frac{a}{x^2} \right) = 0$$

Условие окончания итерационного цикла

если $\varphi'(x) < 0$ приближения то слева, то справа от корня

$$x_{n+1} - x^* = \varphi(x_n) - \varphi(x^*) = \varphi'(\xi)(x_n - x^*)$$

тогда $|x_n - x_{n-1}| < \varepsilon$

если $\varphi'(x) > 0$ приближения с одной стороны от корня

$$|x_{n+1} - x_n| \leq q|x_n - x_{n-1}| \implies q \approx \left| \frac{x_{n+1} - x_n}{x_n - x_{n-1}} \right|$$

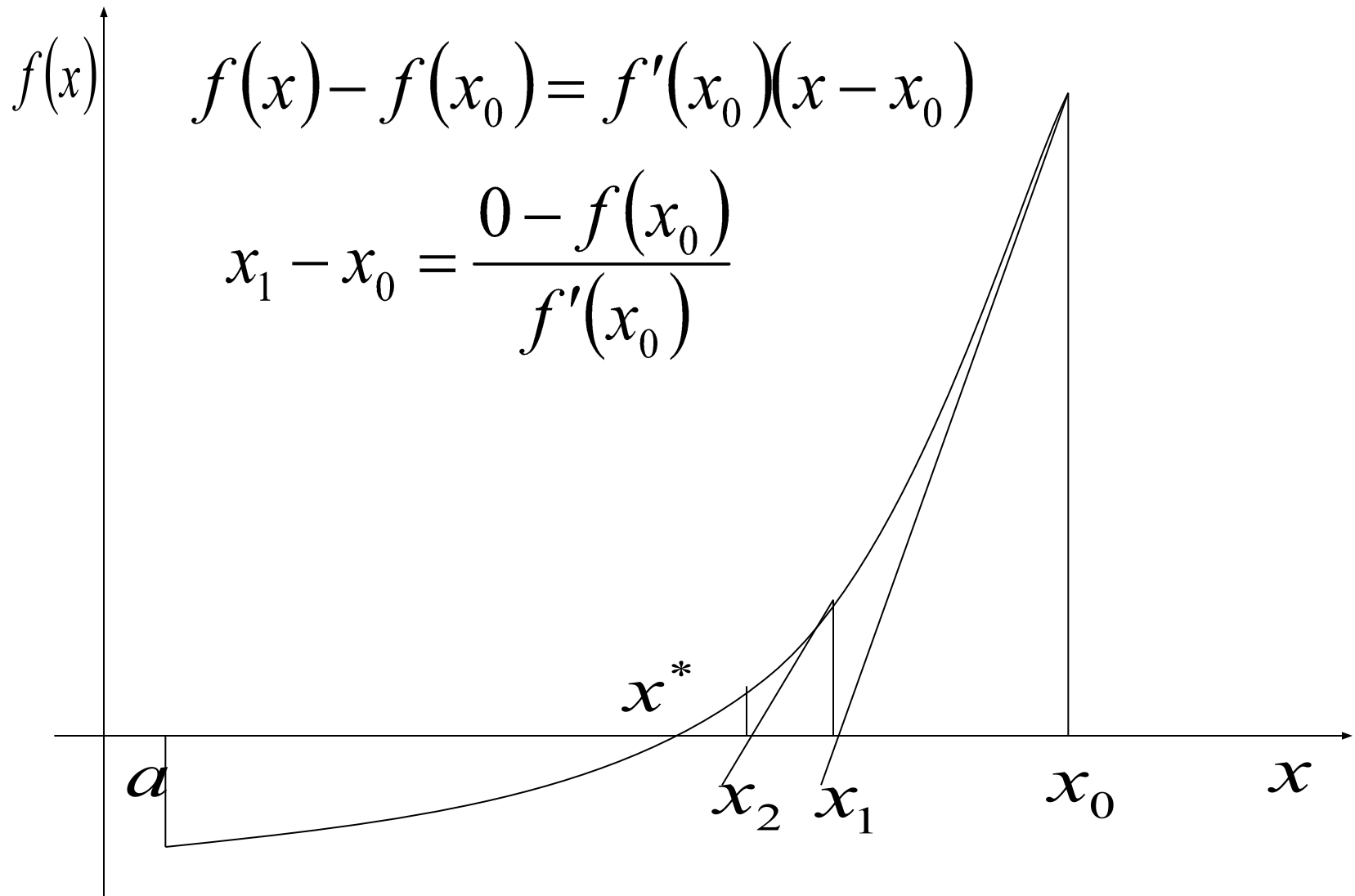
$$\left| \sum_{k=n+1}^{\infty} a_k \right| = \left| \frac{a_{n+1}}{1-q} \right| \cong \left| \frac{(x_{n+1} - x_n)(x_n - x_{n-1})}{2x_n - x_{n-1} - x_{n+1}} \right| < \varepsilon$$

3. Метод Ньютона

*Метод касательных
Метод линеаризации*

$$f(x^*) = f(x_n) + f'(\xi)(x^* - x_n)$$

$$f'(\xi) \approx f'(x_n) \implies x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$$



сходимость метода Ньютона

$$\varphi(x) = x - \frac{f(x)}{f'(x)} \Rightarrow \varphi'(x) = 1 - 1 + \frac{f(x)f''(x)}{(f'(x))^2}$$

$$|\varphi'(x^*)| = 0$$

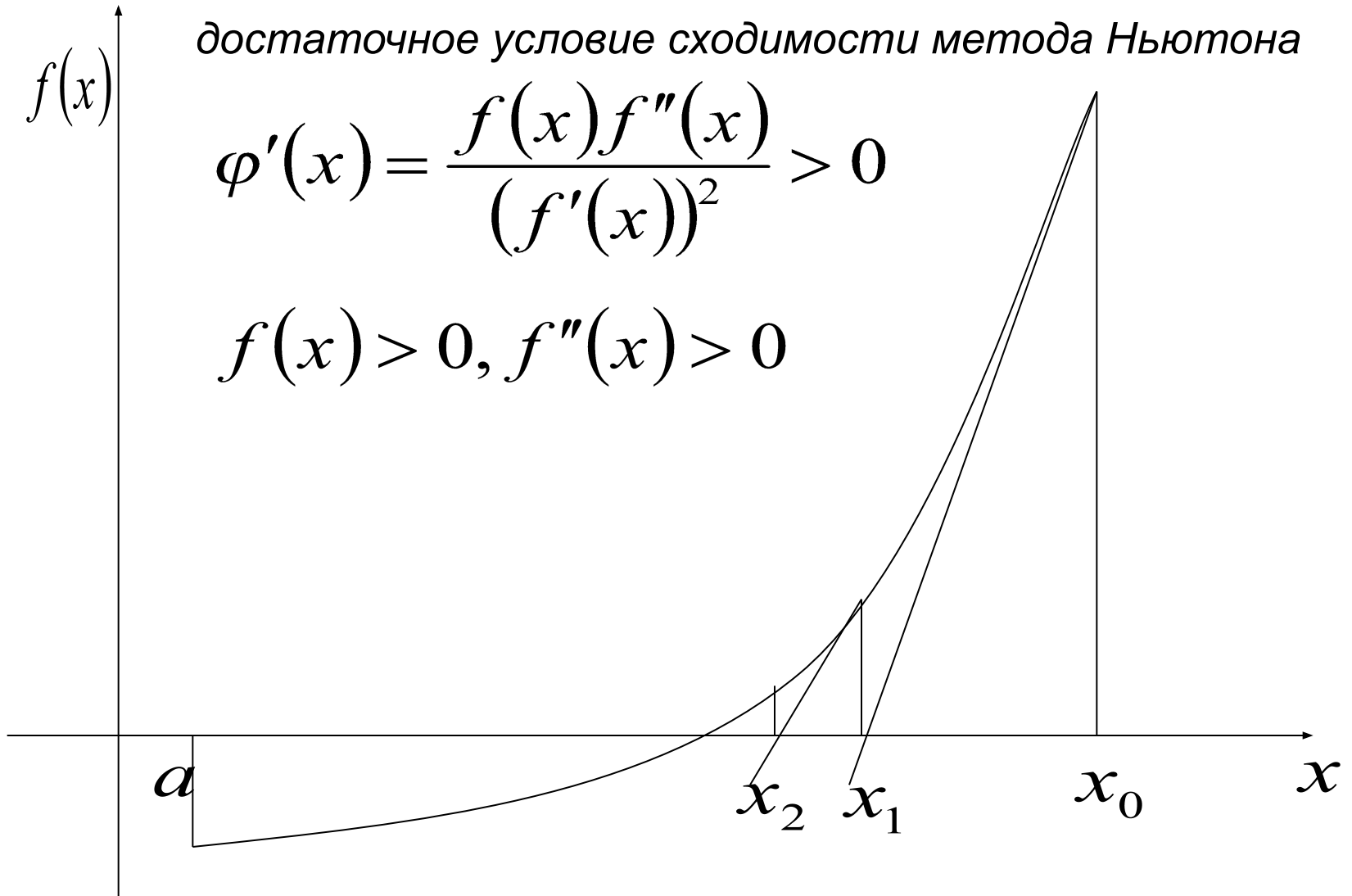
скорость сходимости метода Ньютона

$$\begin{aligned} x_{n+1} - x^* &= \varphi(x_n) - x^* = \\ &= \cancel{\varphi(x^*)} + \cancel{\varphi'(x^*)}(x_n - x^*) + \frac{\varphi''(x^*)}{2}(x_n - x^*)^2 + \dots - \cancel{x^*} = \end{aligned}$$

достаточное условие сходимости метода Ньютона

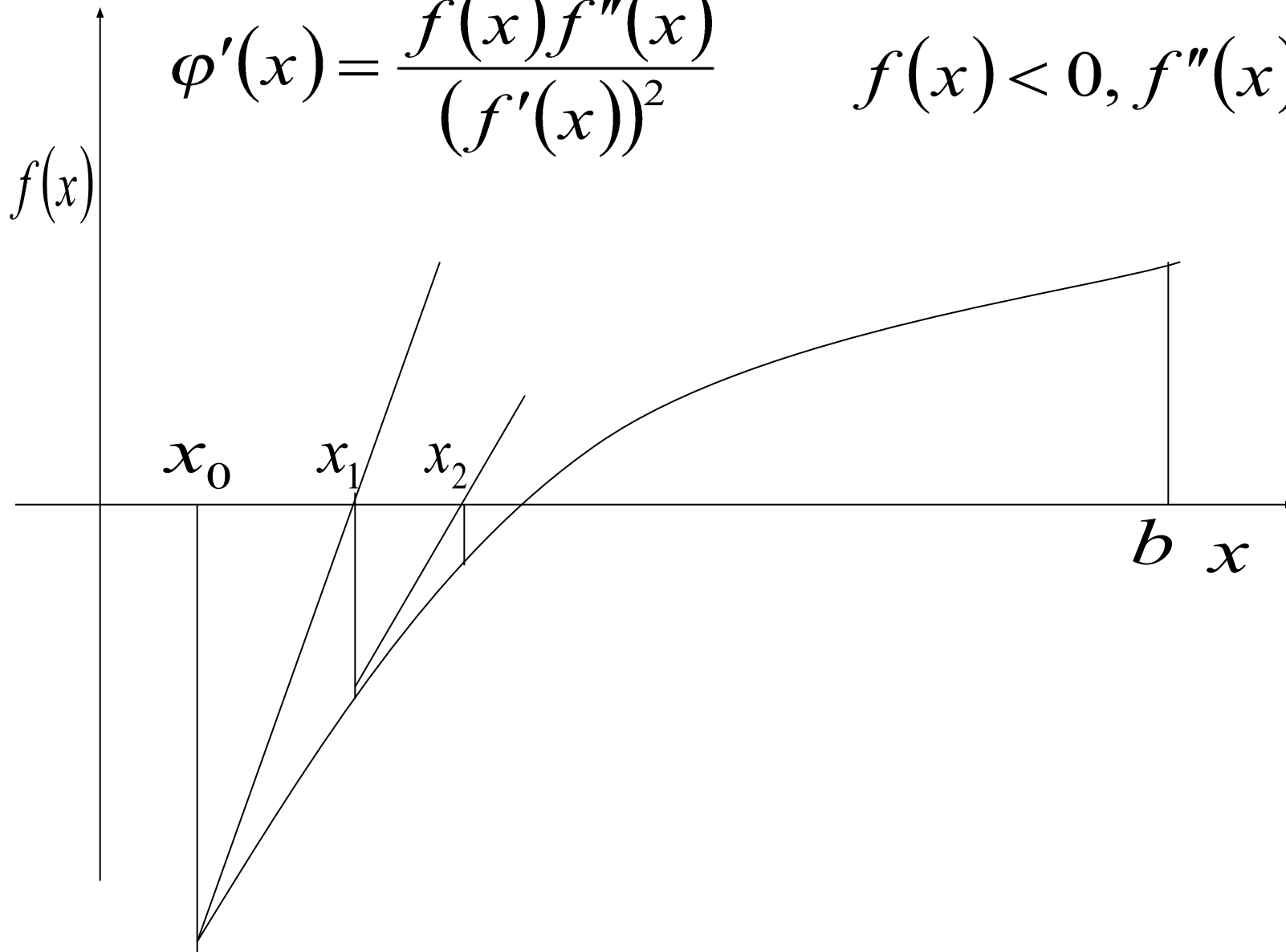
$$\varphi'(x) = \frac{f(x)f''(x)}{(f'(x))^2} > 0$$

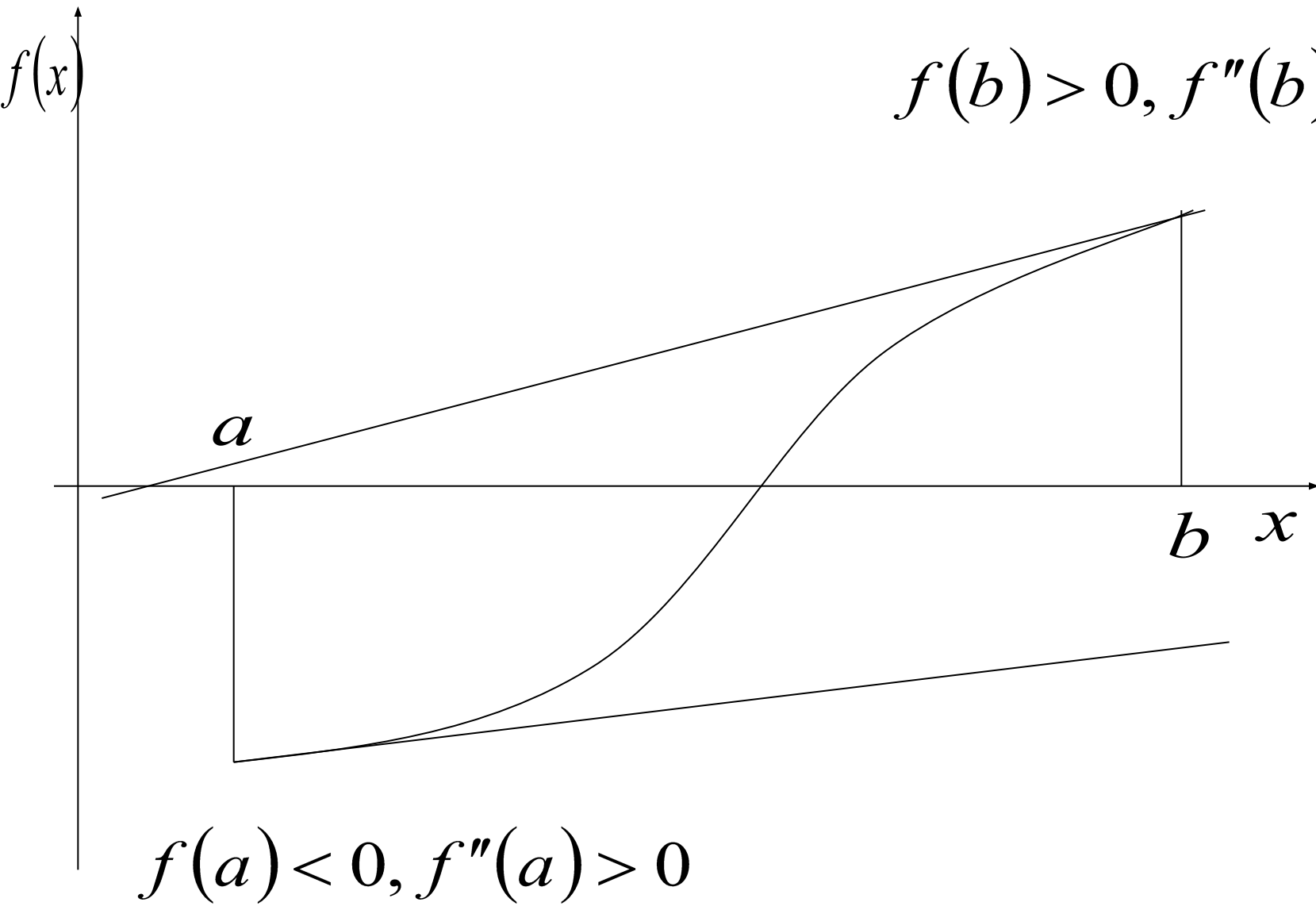
$$f(x) > 0, f''(x) > 0$$



$$\varphi'(x) = \frac{f(x)f''(x)}{(f'(x))^2}$$

$$f(x) < 0, f''(x) < 0$$





4. Модифицированный метод Ньютона

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$$

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_0)}, n = 0, 1, \dots$$

Если

$$f = (f_1(x), f_2(x), \dots, f_m(x))^T$$

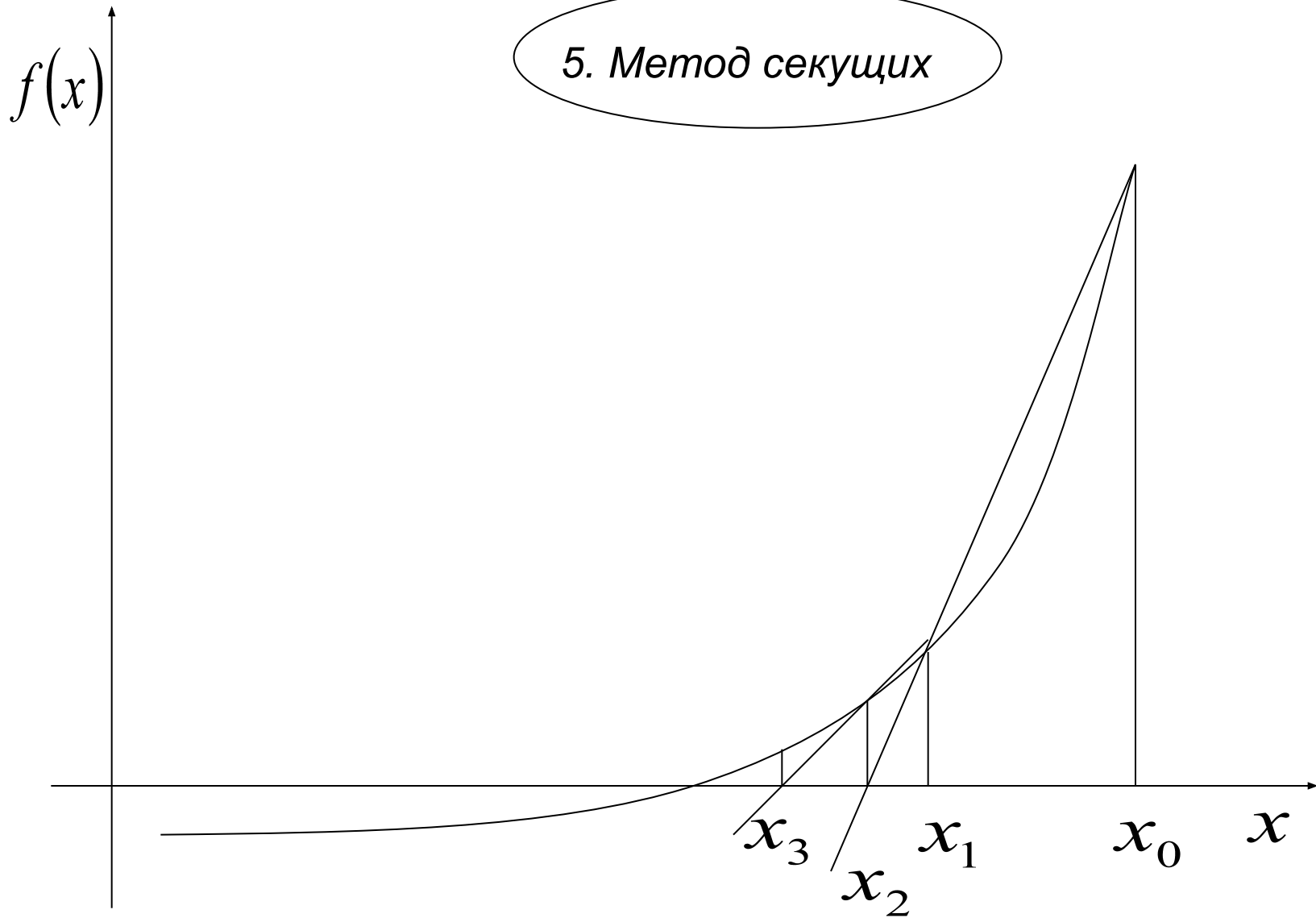
тогда

$$x_{n+1} = x_n - [f'(x_n)]^{-1} f(x_n)$$

для уменьшения количества арифметических операций на одном шаге итерации используется модификация

$$x_{n+1} = x_n - [f'(x_0)]^{-1} f(x_n)$$

5. Метод секущих



Уравнение прямой

$$\frac{x - x_1}{x_0 - x_1} = \frac{f(x) - f(x_1)}{f(x_0) - f(x_1)}$$

$$x_2 - x_1 = (x_0 - x_1) \frac{0 - f(x_1)}{f(x_0) - f(x_1)}$$

$$x_{n+1} = x_n + f(x_n) \frac{x_n - x_{n-1}}{f(x_{n-1}) - f(x_n)}$$

преимущества метода секущих: простота реализации
нет производных

недостатки метода секущих: неизбежные погрешности,
возникающие при вычитании близких чисел в знаменателе
сходимость не более, чем линейная

$$\varphi(x) = x + f(x) \frac{x - x_{n-1}}{f(x_{n-1}) - f(x)} = \frac{f(x_{n-1})x - f(x)x_{n-1}}{f(x_{n-1}) - f(x)}$$

$$\varphi'(x) = \frac{(x_{n-1}f' - f(x_{n-1}))(f - f(x_{n-1})) - f'(x_{n-1}f - f(x_{n-1})x)}{(f - f(x_{n-1}))^2} =$$

$$= \frac{\cancel{x_{n-1}ff'} - f(x_{n-1})f - \cancel{x_{n-1}f(x_{n-1})f'} + f^2(x_{n-1}) - \cancel{x_{n-1}ff'} + f(x_{n-1})xf'}{(f - f(x_{n-1}))^2}$$

$$\varphi' = \frac{f(x_{n-1}) - f + f'(x - x_{n-1})}{(f - f(x_{n-1}))^2} \quad \varphi'(x^*) = \frac{f(x_{n-1}) + f'(x^*)(x^* - x_{n-1})}{f(x_{n-1})}$$

$$\varphi'(x^*) = \frac{f(x_{n-1}) + f'(x^*)(x^* - x_{n-1})}{f(x_{n-1})}$$

но с другой стороны, по формуле Тейлора

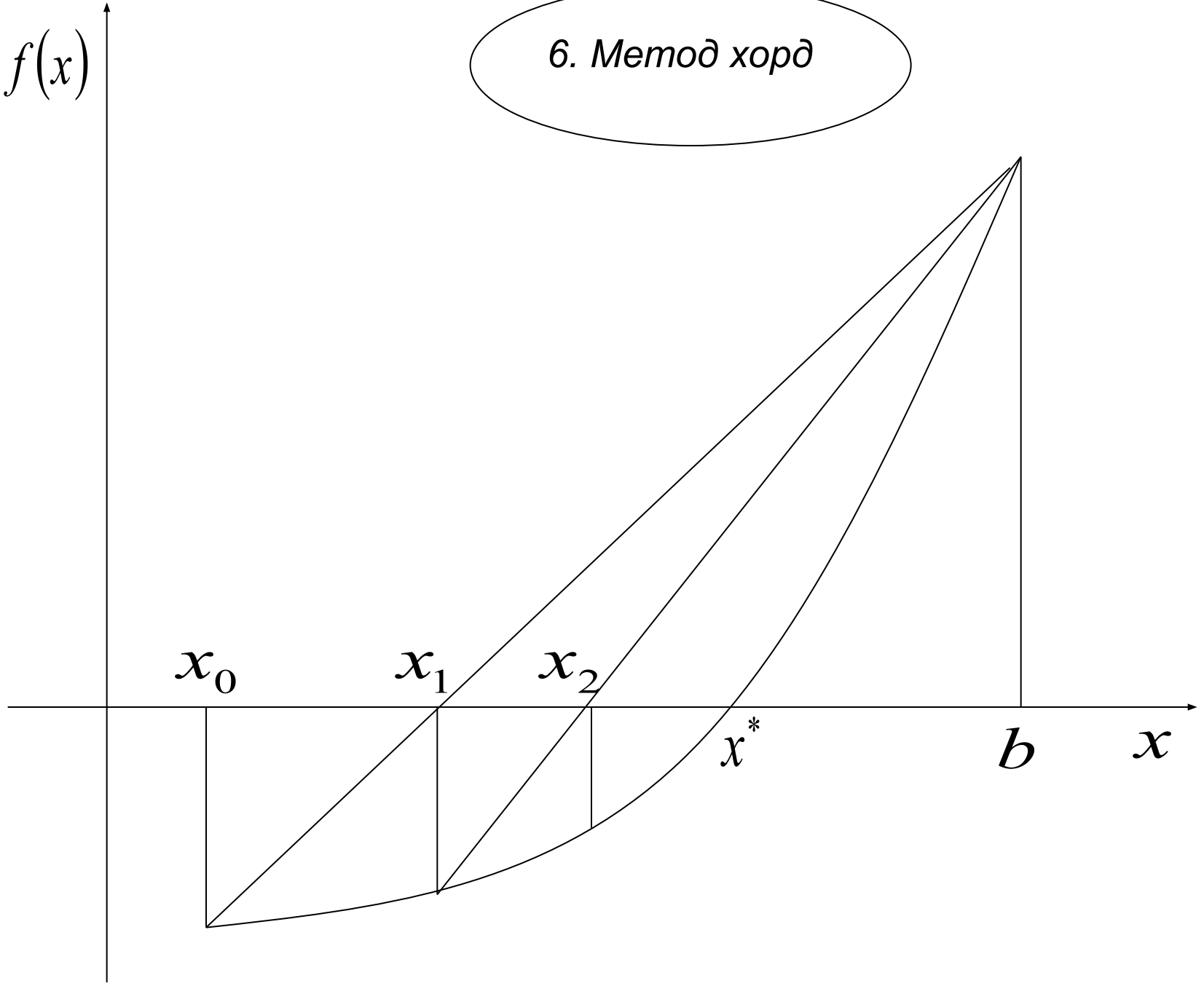
$$f(x_{n-1}) = \cancel{f(x^*) + f'(x^*)(x_{n-1} - x^*)} + \frac{f''(\xi)}{2}(x_{n-1} - x^*)^2$$

числитель равен

$$\text{следовательно } f(x_{n-1}) - f'(x^*)(x_{n-1} - x^*) = \frac{f''(\xi)}{2}(x_{n-1} - x^*)^2$$

$$\varphi'(x^*) = \frac{f''(\xi)(x^* - x_{n-1})^2}{2f(x_{n-1})}$$

6. Метод хорд



Уравнение хорды

$$\frac{x-a}{b-a} = \frac{f(x)-f(a)}{f(b)-f(a)}$$

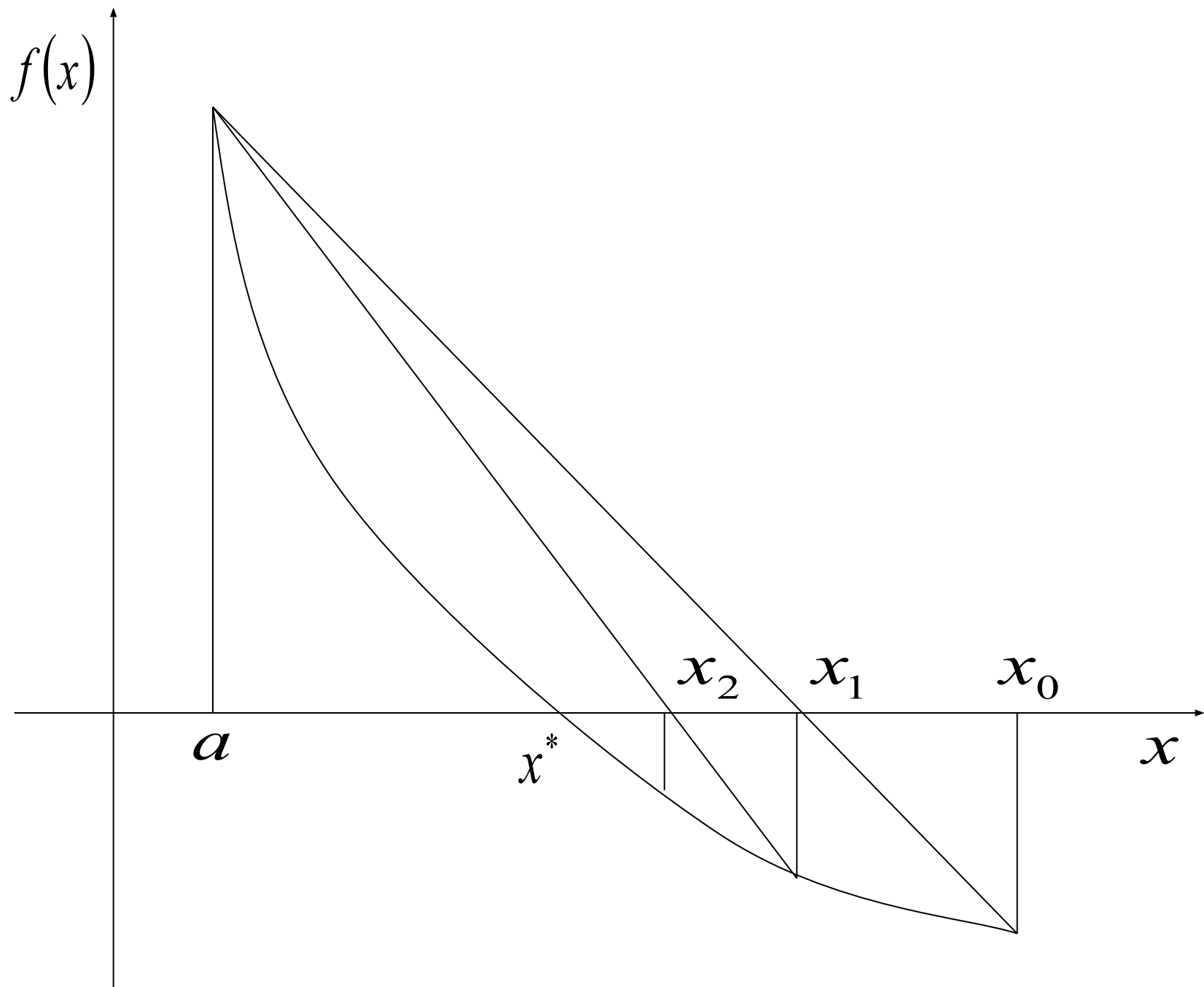
$$x_1 - a = (b - a) \frac{0 - f(a)}{f(b) - f(a)}$$

если неподвижный правый конец отрезка: \mathbf{b}

$$x_{n+1} = x_n - f(x_n) \frac{b - x_n}{f(b) - f(x_n)} \quad x_0 = a, n = 1, 2, \dots$$

получаем ограниченную сверху монотонно возрастающую последовательность приближений

$$a = x_0 < x_1 < x_2 < \dots < x^* < b$$



если неподвижный левый конец отрезка: a

$$x_{n+1} = x_n - f(x_n) \frac{x_n - a}{f(x_n) - f(a)} \quad x_0 = b, n = 1, 2, \dots$$

получаем ограниченную снизу монотонно убывающую последовательность приближений

$$a < x^* < \dots < x_2 < x_1 < x_0 = b$$

возможны варианты:

1. $f'(x) > 0, f''(x) > 0$
2. $f'(x) < 0, f''(x) > 0$
3. $f'(x) > 0, f''(x) < 0$
4. $f'(x) < 0, f''(x) < 0$

неподвижный конец отрезка
для метода хорд:
для которого знак функции
совпадает со знаком
ее второй производной

$$f(x)f''(x) > 0$$

Другие методы решения нелинейного уравнения

Метод Шредера:

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)f'(x_n)}{(f'(x_n))^2 - f(x_n)f''(x_n)}$$

Классификация методов решения

1. Метод простой итерации, послед. приближений $k = 1$
2. Метод секущих $k = \frac{\sqrt{5} + 1}{2} \approx 1.61\dots$
3. Метод Ньютона $k = 2$
4. Метод Галлея $k = 3$
5. Метод Чебышева $k = n \in N$

Найти самостоятельно

Метод Чебышёва построения итерационных процессов высшего порядка

Предположим, что существует функция $g(u)$, обратная к $f(u)$. При этом $u = g[f(u)]$, $U = g(0)$.

Пусть, кроме того, $f(u)$ непрерывна и имеет необходимое число непрерывных производных,

Обратная функция имеет такое же количество непрерывных производных, как и $f(u)$.

Разложим функцию $g(f[u]) = g(h)$ в ряд Тейлора в окрестности корня - точки $w = f(u)$

$$g(h) \approx g(w) + \sum_{i=1}^n \frac{g^{(i)}(w)}{i!} (h - w)^i.$$

Тогда, учитывая, что $u = g[f(u)]$, $w = f(u)$, $h = f(v)$, получим

$$g(0) = U \approx u + \sum_{i=1}^n \frac{g^{(i)}[f(u)]}{i!} [-f(u)]^i + \dots$$

Можно показать, что итерационный метод

$$u_{k+1} = u_k + \sum_{i=1}^n (-1)^i \frac{g^{(i)}[f(u_k)]}{i!} [f(u_k)]^i, u^0 = a$$

имеет порядок сходимости $n + 1$. Для вычисления производных обратной функции $u = g[f(u)]$ воспользуемся правилом дифференцирования сложной функции:

$$1 = g^{(1)}[f(u)] \cdot f^{(1)}(u),$$

$$0 = g^{(2)}[f(u)] \cdot [f^{(1)}(u)]^2 + g^{(1)}[f(u)] \cdot f^{(2)}(u),$$

$$0 = g^{(3)}[f(u)] \cdot [f^{(1)}(u)]^3 + 3g^{(2)}[f(u)] \cdot f^{(2)}(u) \cdot f^{(1)}(u) + g^{(1)}[f(u)] \cdot f^{(3)}(u),$$

...

метод секущих – установление факта о сверхлинейной сходимости метода

Вержбицкий В.М. Численные методы (линейная алгебра и нелинейные уравнения). – М.: ОНИКС 21 век, 2005.

метод Галлея , методы Чебышева, метод Шредера и другие

**энциклопедия математических формул и математических достижений в мире
автор Вольфрам (Wolfram)
Mathworld
СКМ «Математика»**

Продолжение рассмотрения метода Ньютона

≈ 300 лет назад Токакадзу || с Ньютоном открыл метод

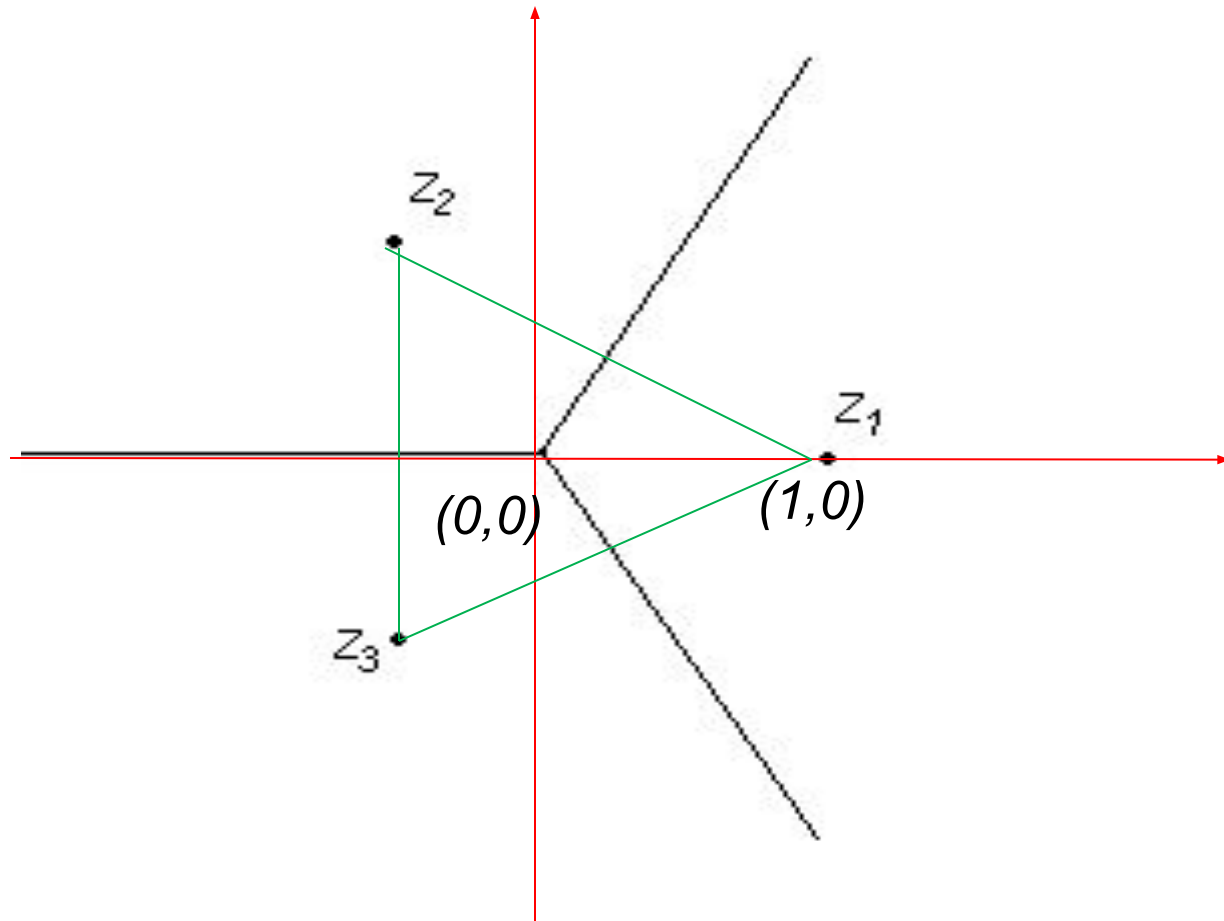
$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}, n = 0, 1, \dots$$

1. если x – число, f - функция
2. если x – функция, f - оператор
3. если x – последовательность, f - оператор
4. если x – матрица, f - преобразование

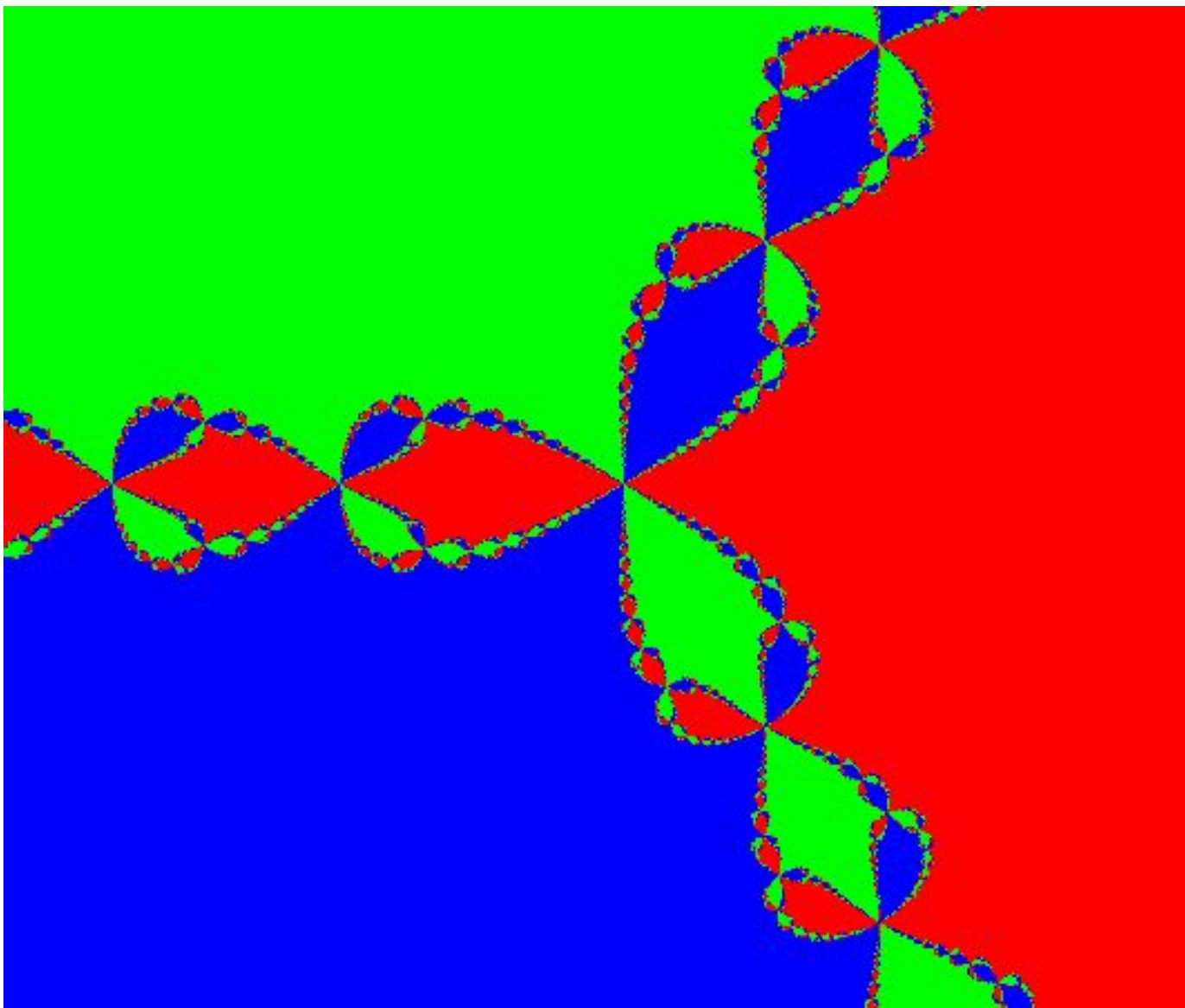
поиск методом Ньютона корней многочлена

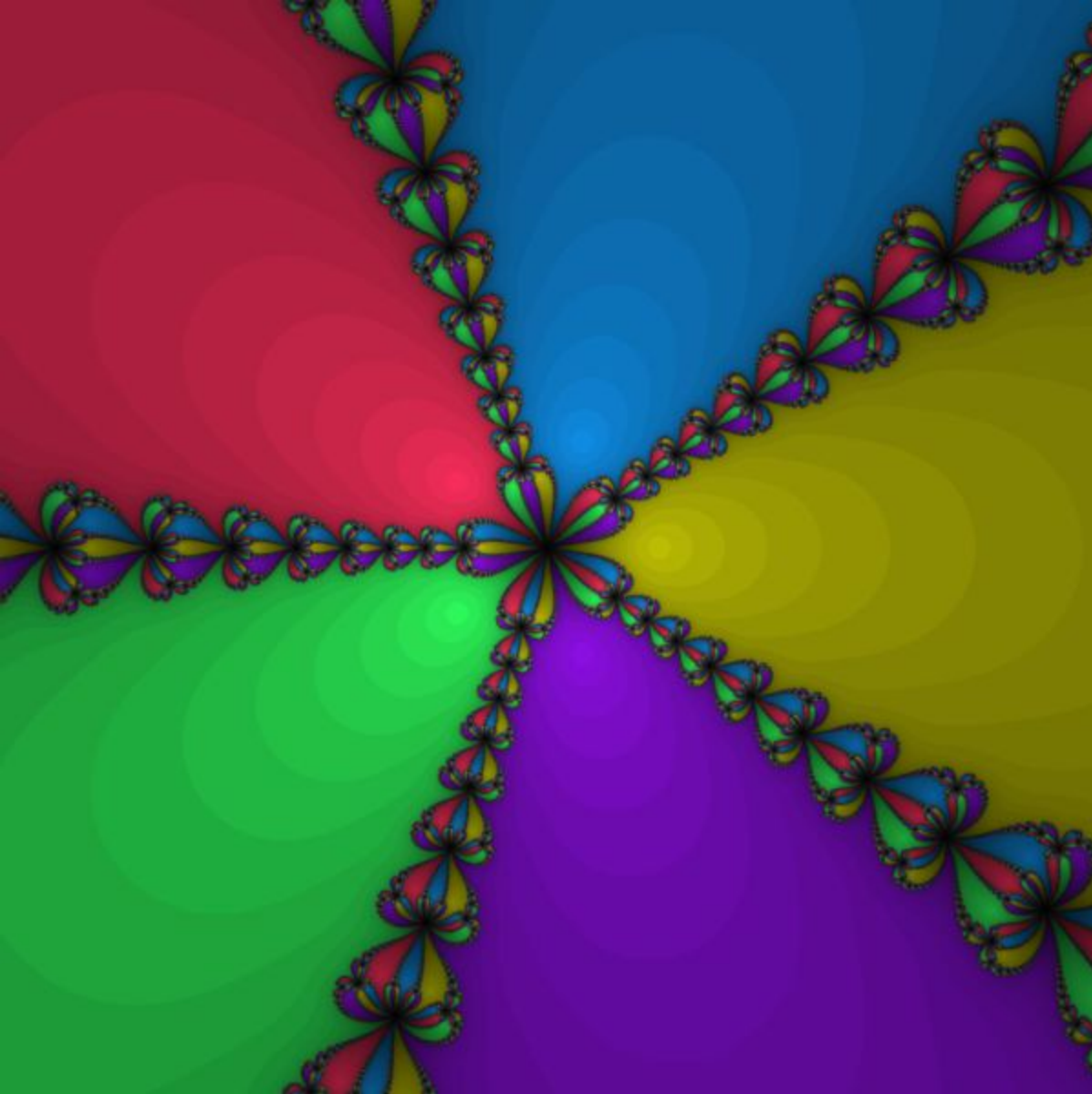
$$f(z) = (z^3 - 1)$$

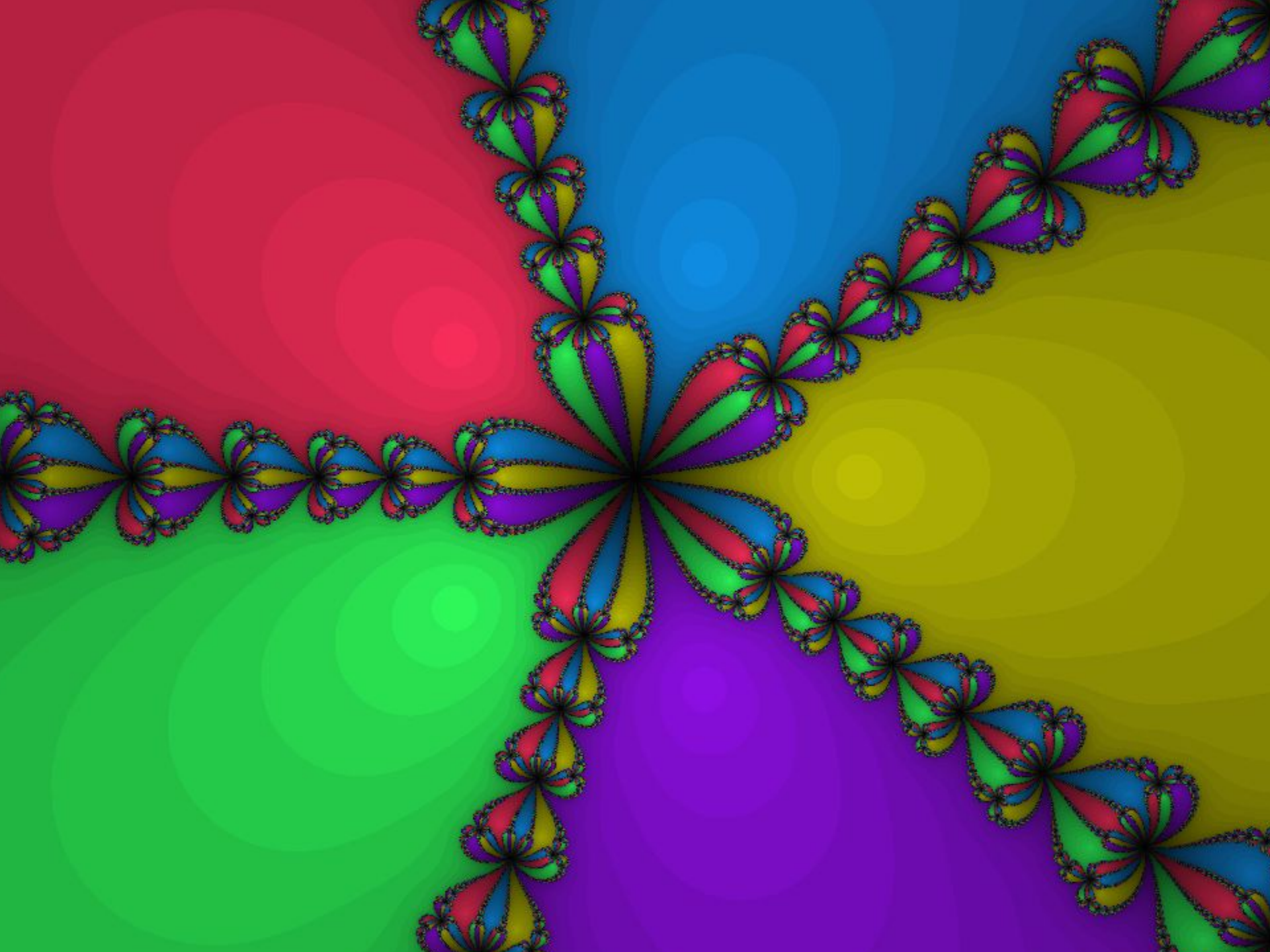
$$\omega_1 = 1, \omega_2 = -1/2 + i\sqrt{3}/2 \text{ и } \omega_3 = -1/2 - i\sqrt{3}/2$$



фрактал - бассейн Ньютона

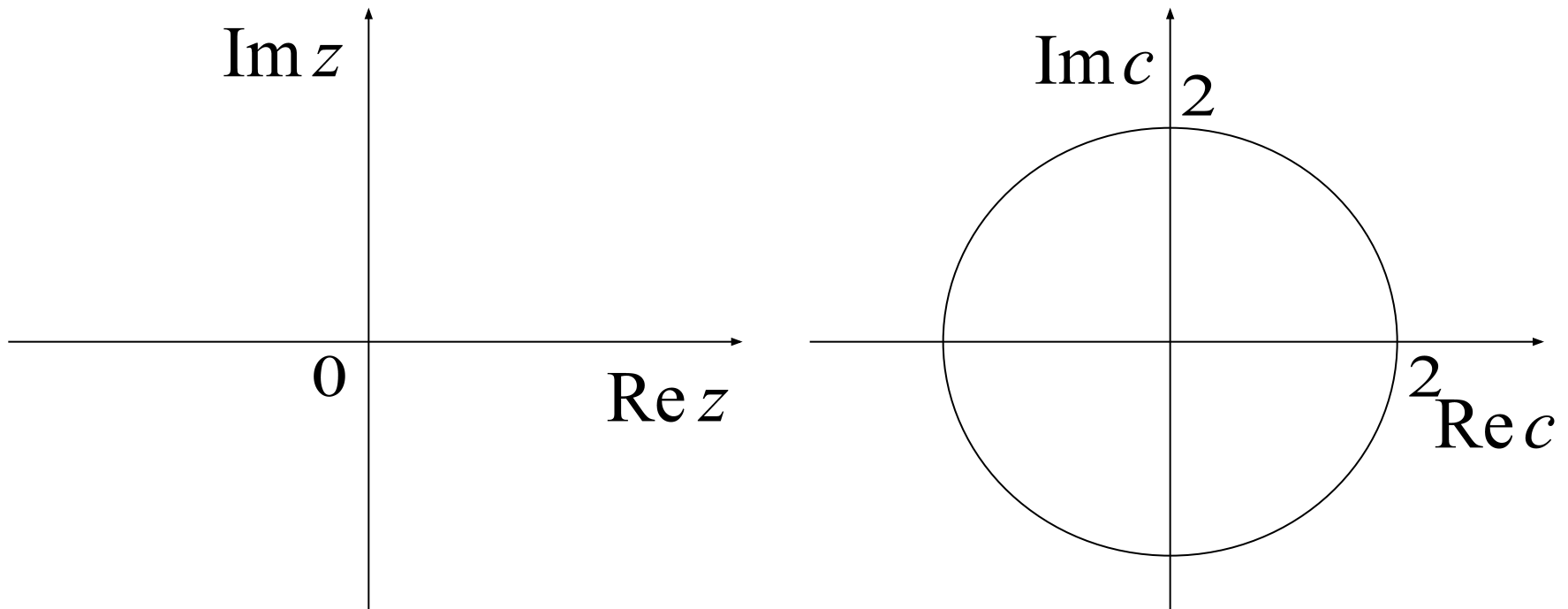






итерационный процесс в комплексной плоскости

$$z_{n+1} = z_n^2 - c \quad z_0 = 0$$



(Mandelbrot) Фрактальная геометрия природы. 1977.

*фрактал – множество Мандельброта – это геометрия
итерационного процесса*

