§14. Линейные операторы

п.1. Основные определения.

Оператором называется закон, по которому каждому вектору x пространства ставится в соответствие единственный вектор y пространства .

Обозначается:

Вектор y называется образом вектора x.

Вектор x называется прообразом вектора y.

Пример.

Оператор называется линейным, если для любых векторов x и y пространства и любого числа выполняются соотношения:

1) Свойство аддитивности:

2) Свойство однородности:

Пример. Будет ли указанный оператор линейным?

Пусть

Тогда

Значит, оператор A не является линейным.

Пример. Будет ли указанный оператор линейным?

Пусть

Тогда

Свойство аддитивности выполняется.

Свойство однородности выполняется.

Значит, оператор A является линейным.

В дальнейшем будем рассматривать линейные операторы

Матрица оператора

Пусть — базис пространства .

Тогда для любого вектора

Если — линейный оператор, то

Так как

то

Поэтому

(1)

С другой стороны, т.к. , то

(2)

Из (1) и (2) получаем

Матрица

называется матрицей линейного оператора в базисе .

Любой линейный оператор можно записать с помощью матричного уравнения

Замечание. Для того, чтобы найти матрицу линейного оператора, достаточно найти образы базисных векторов.

Пример. Найти матрицу линейного оператора

в базисе

Решение.

Значит, матрица оператора имеет вид

Связь между матрицами оператора в разных базисах

Теорема. Матрицы A и линейного оператора в разных базисах связаны соотношением

где C — матрица перехода от старого базиса к новому.

Пример. Матрица линейного оператора в базисе имеет вид

Найти матрицу этого оператора в базисе

Решение. Матрица перехода

При этом

Значит,