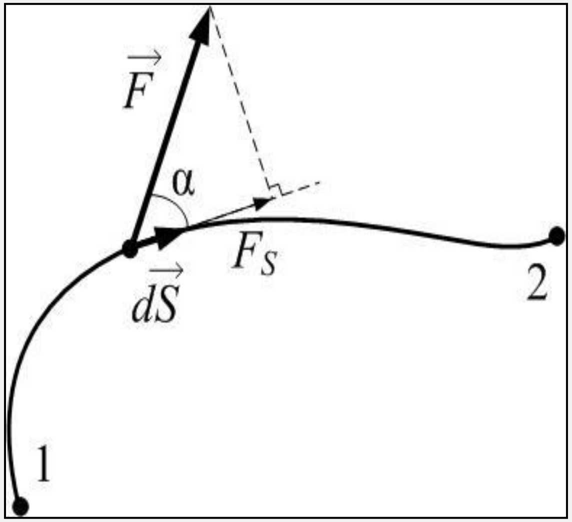
Механика

Тема 4

РАБОТА. ЭНЕРГИЯ.

2022 г.

РАБОТА



$$\vec{F} \neq const$$

$$dA = \vec{F} \cdot d\vec{S}$$

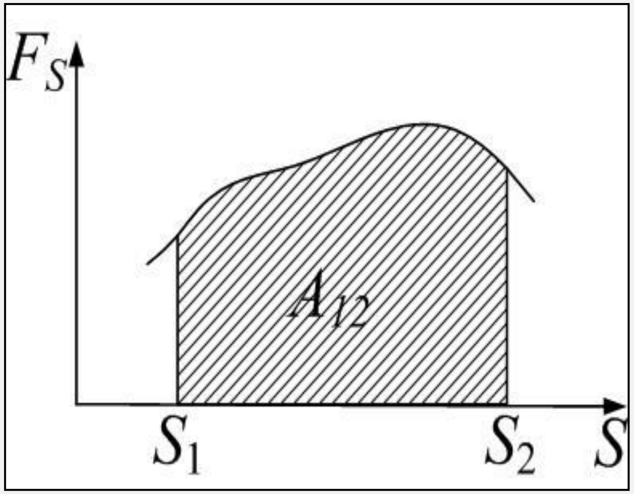
скалярное произведение

$$dA = \vec{F} \cdot d\vec{S} = F \cdot dS \cdot \cos\alpha = F_S \cdot dS$$

$$A_{12} = \int_1^2 dA = \int_1^2 \vec{F} \cdot d\vec{S} = \int_1^2 F \cdot \cos\alpha \cdot dS = \int_1^2 F_S \cdot dS$$

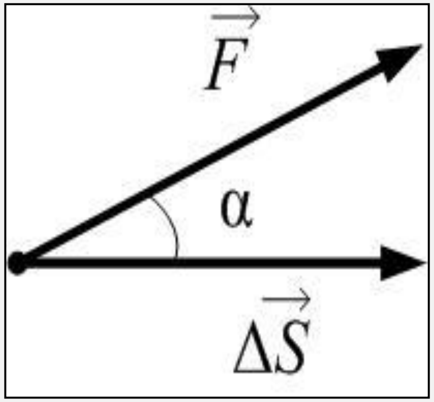
РАБОТА

$$A_{12} = \int_1^2 F_S \cdot dS$$



Частный случай

$$\vec{F} = const$$



$$\Delta A = \vec{F} \cdot \Delta\vec{S} = F \cdot \Delta S \cdot \cos\alpha$$

$$[A] = Н \cdot м = Дж$$

МОЩНОСТЬ

<u>Мощность</u> **– быстрота совершения работы**

Средняя мощность

$$P_{ср.} = \frac{\Delta A}{\Delta t}$$

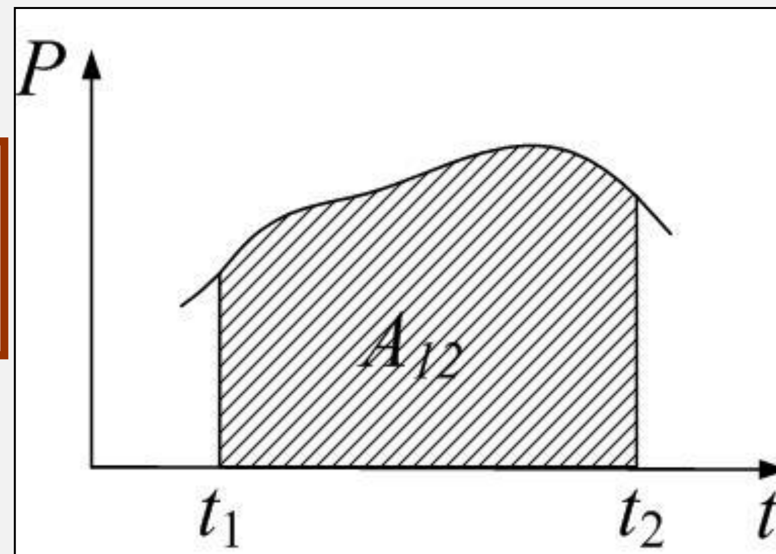
Мгновенная мощность

$$P = \frac{dA}{dt}$$

$$[P] = \frac{Дж}{с} = Вт$$

$$dA = P \cdot dt \quad \Rightarrow \quad A_{12} = \int_1^2 dA = \int_{t_1}^{t_2} P \cdot dt$$

$$P = \frac{dA}{dt} = \frac{\vec{F} \cdot d\vec{S}}{dt} = \vec{F} \cdot \frac{d\vec{S}}{dt} = \vec{F} \cdot \vec{v}$$



ЭНЕРГИЯ

Энергия – мера взаимодействия и движения всех видов материи (это в философии)

Энергия – функция состояния, однозначно определяется состоянием системы, т.е. зависит от характеристик (параметров) описывающих состояние системы

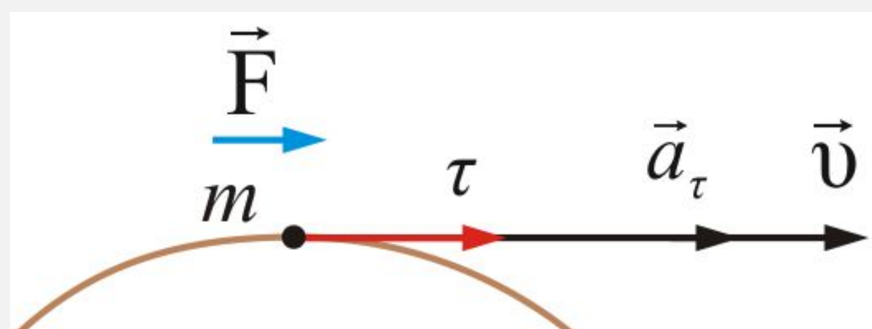
Определим такую функцию

нулю

Если функция, зависящая от характеристик описывающих состояние ***замкнутой*** *системы остается постоянной то такая функция является функцией состояния. Полный дифференциал такой функции равен нулю.*

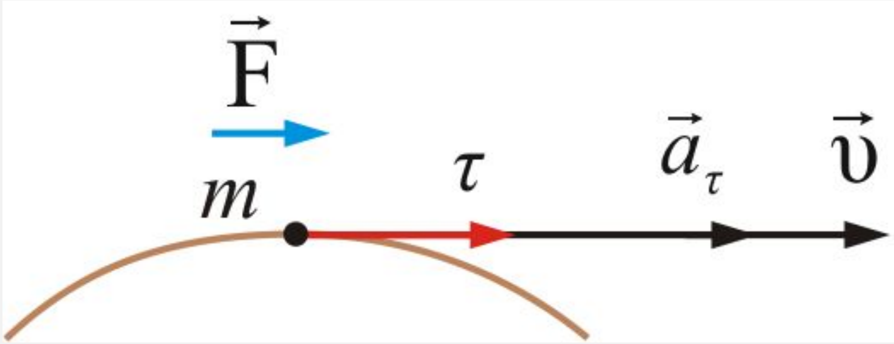
Преобразуем уравнение II-го закона Ньютона

$$m\frac{d\vec{\upsilon}}{dt}=\vec{F},$$



ЭНЕРГИЯ

$$m\frac{d\upsilon}{dt} = F_\tau.$$



Умножим обе части этого равенства на $\upsilon\,dt = dr$, получим: $m\upsilon\,d\upsilon = F_\tau\,dr.$

Левая часть равенства, есть **полный дифференциал функции** $K = \frac{m\upsilon^2}{2}.$

$$m\upsilon\,d\upsilon = d\left(\frac{m\upsilon^2}{2}\right)$$

или

$$d\left(\frac{m\upsilon^2}{2}\right) = F_\tau dr.$$

КИНЕТИЧЕСКАЯ ЭНЕРГИЯ

получили $$\boxed{\mathrm{d}\left(\frac{m\upsilon^2}{2}\right) = F_\tau \mathrm{d}r.}$$

Если система замкнута, то $\vec{\mathrm{F}}^{\text{внеш.}} = 0$ и

$F_\tau = 0,$ тогда и $\mathrm{d}\left(\frac{m\upsilon^2}{2}\right) = 0.$ $\Rightarrow K = \frac{m\upsilon^2}{2}.$ **Функция состояния**

Функция состояния *системы, определяемая* ***только скоростью*** *ее движения, называется* ***кинетической энергией****.*

$$\boxed{K = \frac{m\upsilon^2}{2}.}$$

Кинетическая энергия системы есть функция состояния движения этой системы.

КИНЕТИЧЕСКАЯ ЭНЕРГИЯ

Для системы из ***n*** тел

$$\boxed{K = \sum_{i=1}^{n} \frac{m_i \upsilon_i^2}{2},}$$

т.е., *K* – аддитивная величина

Связь кинетической энергии с импульсом *p*.

$$\frac{m\upsilon^2}{2}\left(\frac{m}{m}\right) = \frac{m^2\upsilon^2}{2m}, \Rightarrow \boxed{K = \frac{p^2}{2m}.}$$

КИНЕТИЧЕСКАЯ ЭНЕРГИЯ

Связь кинетической энергии с работой

$$A_{внешн.сил} = \int_1^2 \vec{F} \cdot d\vec{S} = \int_1^2 m\vec{a} \cdot d\vec{S} = \int_1^2 m\frac{d\vec{v}}{dt} \cdot d\vec{S} =$$

$$= \int_1^2 m\frac{d\vec{S}}{dt} \cdot d\vec{v} = \int_{v_1}^{v_2} m\vec{v} \cdot d\vec{v} = \frac{m \cdot v_2^2}{2} - \frac{m \cdot v_1^2}{2}$$

$$A = \int_1^2 F\mathrm{d}r = K_2 - K_1. \qquad A = \Delta K.$$

Под действием внешней силы скорость тела изменяется: **изменение энергии равно работе внешних сил, или работа силы приложенной к телу численно равна изменению кинетической энергии этого тела**

ПОТЕНЦИАЛЬНАЯ ЭНЕРГИЯ

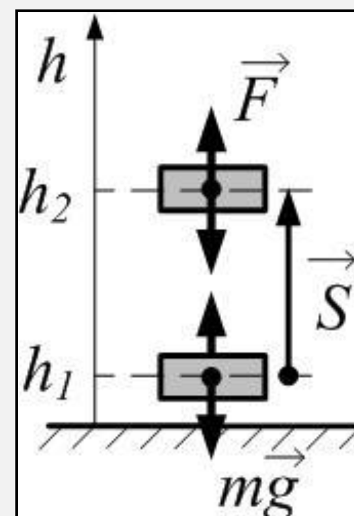
Потенциальная энергия $W\,(x, y, z)$ – *функция состояния системы,* ***зависящая только от координат*** *всех тел системы в поле сил.*

K – определяется скоростью движения тел системы,
W – их взаимным расположением.

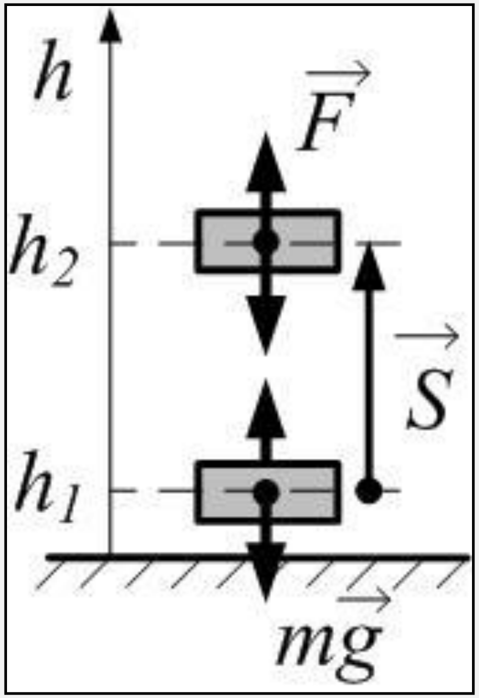
Поле сил (силовое поле) – в каждой точке пространства на тело действует сила

Поле тяготения земли

Сила тяжести mg. Внешняя сила F совершает работу по перемещению тела массой m с уровня h1 на уровень h2.



ПОТЕНЦИАЛЬНАЯ ЭНЕРГИЯ



Внешняя сила совершает работу, равную приращению потенциальной энергии:

$$\Delta W = W_2 - W_1 = A_{внешн.сил} = \int_1^2 \vec{F} \cdot d\vec{S} = \int_1^2 F \cdot dS =$$

$$= F\int_1^2 dS = mg \cdot \int_{h_1}^{h_2} dh = mg \cdot (h_2 - h_1)$$

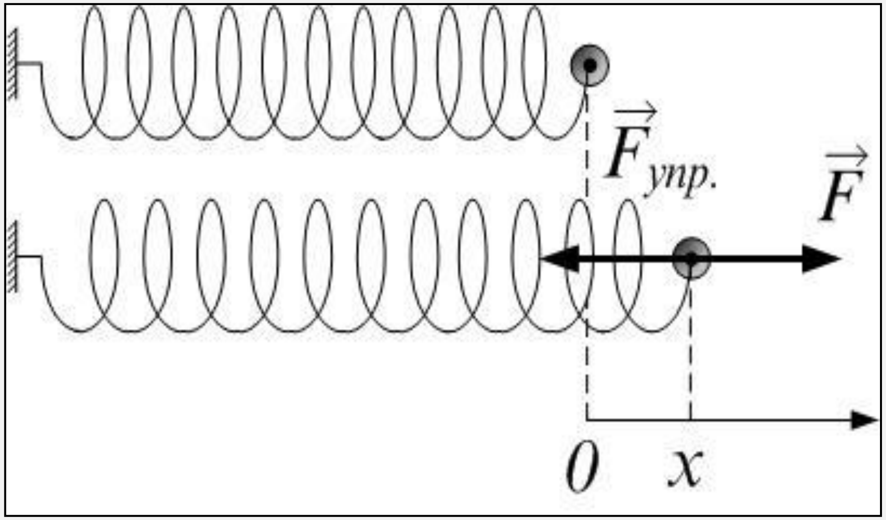
$$\Downarrow$$

$$\boxed{W_{пот.} = mgh}$$

Начало отсчёта энергии можно задавать произвольно

ПОТЕНЦИАЛЬНАЯ ЭНЕРГИЯ

Потенциальная энергия упругой деформации



Внешняя сила совершает работу, равную приращению потенциальной энергии:

$$A_{внешн.сил} = \int_0^x F_{внеш.}dx = \int_0^x kx \cdot dx = \frac{kx^2}{2} - 0 = \Delta W_{пот.} = W_{пот.} - 0$$

$$\Downarrow$$

$$W_{пот.} = \frac{kx^2}{2}$$

ПОЛНАЯ МЕХАНИЧЕСКАЯ ЭНЕРГИЯ

Механическая энергия

Кинетическая
(энергия движения)

Потенциальная
(энергия взаимодействия; положения, поскольку величина взаимодействия зависит от положения тел)

МЕХАНИЧЕСКАЯ ЭНЕРГИЯ

Энергия – функция состояния,
однозначно определяется состоянием системы

Изменить энергию системы можно, совершив над системой работу

Изменение энергии системы равно работе внешних сил

$$\Delta W = W_2 - W_1 = A_{внешн.сил}$$

$$\Downarrow \qquad \boxed{A = -A_{внешн.сил}}$$

$$\boxed{W_1 = W_2 + A}$$

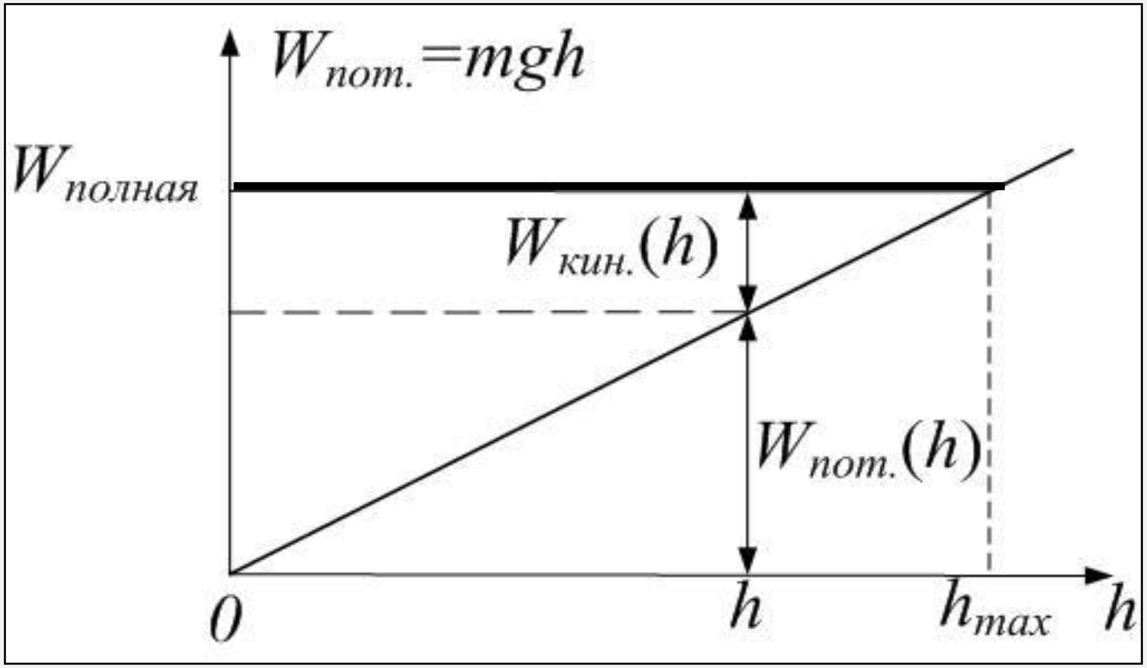
$$[W] = [A] = \text{Дж}$$

Полная энергия замкнутой системы сохраняется

Если $\sum_i \vec{F}_i^{\,внеш.} = 0 \Rightarrow W_{полная} = const$

Графическое представление энергии

1. Движение в поле силы тяжести



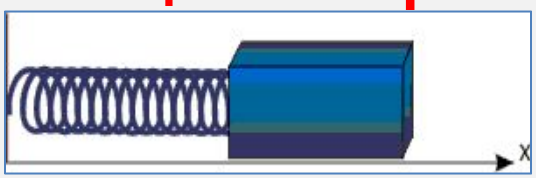
$$W_{полная} = W_{пот.} + W_{кин.}$$

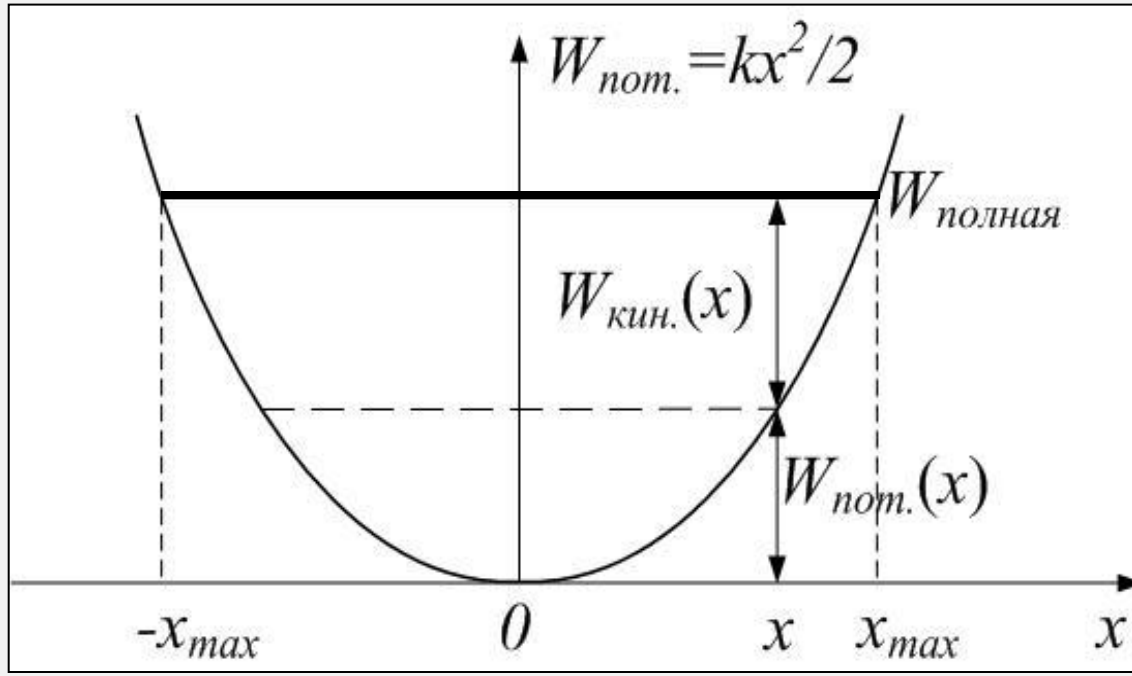
$$\Downarrow$$

$$mgh_{\max} = mgh + W_{кин.}$$

Графическое представление энергии

2. Горизонтальный пружинный маятник. «Гармонический осциллятор»



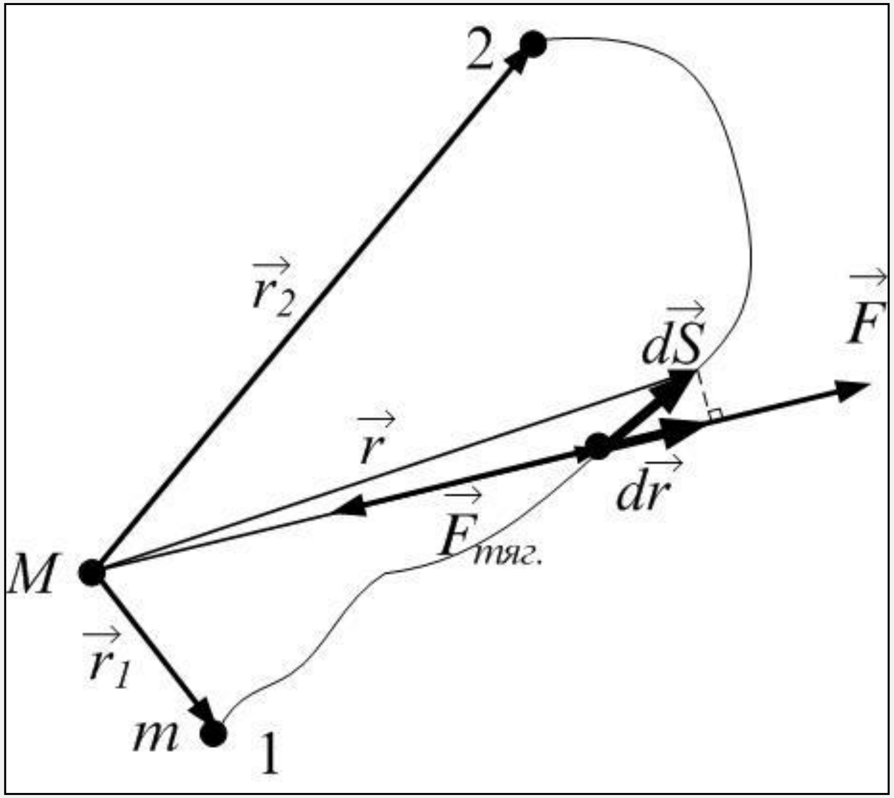


$$W_{полная} = W_{пот.} + W_{кин.}$$

$$\Longrightarrow$$

$$\frac{kx^2_{\max}}{2} = \frac{kx^2}{2} + W_{кин.}$$

Работа и энергия в поле тяготения



$$\Delta W = W_2 - W_1 = A_{внешн.сил} =$$

$$= \int_1^2 \vec{F} \cdot d\vec{S} = \int_1^2 \vec{F} \cdot d\vec{r} = \int_{r_1}^{r_2} F \cdot dr =$$

$$= \int_{r_1}^{r_2} \gamma \frac{M \cdot m}{r^2} \cdot dr = -\gamma \frac{M \cdot m}{r} \Bigg|_{r_1}^{r_2} =$$

$$= \left(-\gamma \frac{M \cdot m}{r_2} \right) - \left(-\gamma \frac{M \cdot m}{r_1} \right)$$

$$W_{пот.} = -\gamma \frac{M \cdot m}{r} \quad \Leftarrow$$

Работа в поле тяготения

$$\Delta W = W_2 - W_1 = A_{внешн.сил} = -A_{грав.сил} = \left(-\gamma \frac{M \cdot m}{r_2}\right) - \left(-\gamma \frac{M \cdot m}{r_1}\right)$$

Выводы:

$$W_{пот.} = -\gamma \frac{M \cdot m}{r}$$

1. Потенциальная энергия взаимодействия точечных масс $W \to 0$ при $r \to \infty$

2. Работа сил гравитационного поля не зависит от траектории, а только от начального и конечного положения точки. Такие поля называются ***потенциальными***

3. Потенциал гравитационного поля: $\varphi = \frac{W_{пот.}}{m}$ $\quad [\varphi] = \frac{Дж}{кг}$

ПРИЗНАК ПОТЕНЦИАЛЬНОСТИ ПОЛЯ
СИЛЫ КОНСЕРВАТИВНЫЕ И ДИССИПАТИВНЫЕ

Сила называется **консервативной**, если её работа не зависит от траектории, а только от начального и конечного положения тела

Поле таких сил называется **потенциальным**

Примеры: гравитационное поле; поле упругих сил

Если работа силы зависит от траектории, то силы называются **диссипативными**

Поле таких сил – **непотенциальное**

Примеры: силы трения; силы вязкости; силы неупругой деформации

При наличии диссипативных сил механическая энергия необратимо превращается в другие виды, например, в тепловую

ЗАКОН СОХРАНЕНИЯ МЕХАНИЧЕСКОЙ ЭНЕРГИИ

<u>При наличии диссипативных сил</u>

Изменение **<u>механической</u>** энергии системы при её переходе из состояния 1 в состояние 2:

$$W_{1\,мех.} = W_{2\,мех.} + A_{\substack{\text{против}\\ \text{диссипативных}\\ \text{сил}}} + A_{\substack{\text{против}\\ \text{внешних}\\ \text{сил}}}$$

В замкнутой системе механическая энергия сохраняется, если <u>нет диссипативных</u> сил, а есть только <u>консервативные</u>

Связь между консервативной силой и потенциальной энергией

Система совершает работу за счёт уменьшения своей потенциальной энергии:

$$dA = -dW_{\text{пот.}}$$

Работа силы по определению:

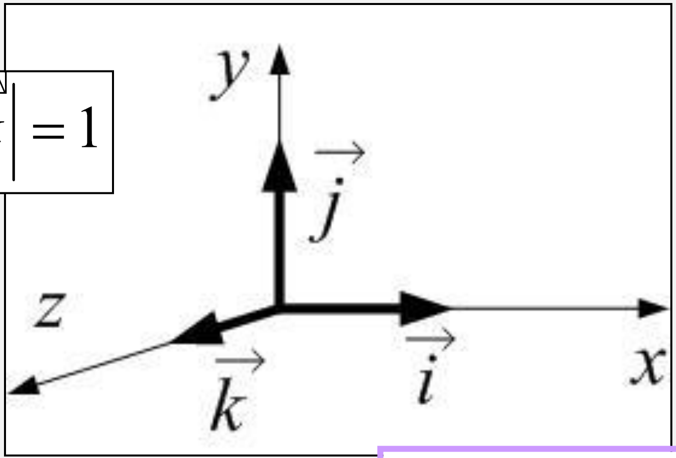
$$dA = \vec{F} \cdot d\vec{r}$$

$$\vec{F} \cdot d\vec{r} = -dW_{\text{пот.}}$$

$$\vec{F} = -gradW_{\text{пот.}}$$

<u>Градиент</u> – это вектор, компоненты которого равны производным по соответствующим координатам:

$$\left|\vec{i}\right| = \left|\vec{j}\right| = \left|\vec{k}\right| = 1$$



$$F_x = -\frac{\partial W_{\text{пот.}}}{\partial x}$$

$$gradW_{\text{пот.}} \equiv \frac{\partial W_{\text{пот.}}}{\partial x} \cdot \vec{i} + \frac{\partial W_{\text{пот.}}}{\partial y} \cdot \vec{j} + \frac{\partial W_{\text{пот.}}}{\partial z} \cdot \vec{k}$$

Градиент показывает быстроту изменения величины в пространстве, направлен в сторону наибольшего возрастания величины

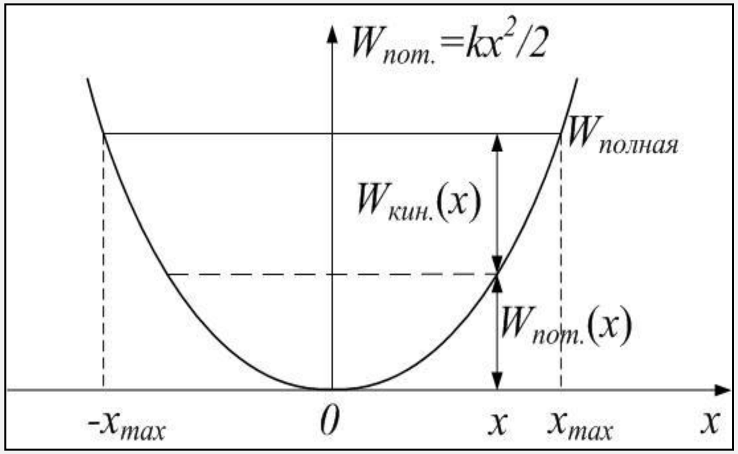
$$\vec{F} = -gradW_{пот.}$$

$$gradW_{пот.} \equiv \frac{\partial W_{пот.}}{\partial x}\cdot\vec{i} + \frac{\partial W_{пот.}}{\partial y}\cdot\vec{j} + \frac{\partial W_{пот.}}{\partial z}\cdot\vec{k}$$

Знак «минус» показывает что сила направлена в сторону максимального убывания потенциальной энергии

Пример: одномерный случай

$$F_x = -\frac{dW_{пот.}}{dx}$$



$$W_{пот.} = \frac{kx^2}{2} \quad\Rightarrow\quad F_{упр.} = -\frac{dW_{пот.}}{dx} = -kx$$

При отклонениях в обе стороны сила направлена к положению равновесия (к нулю).

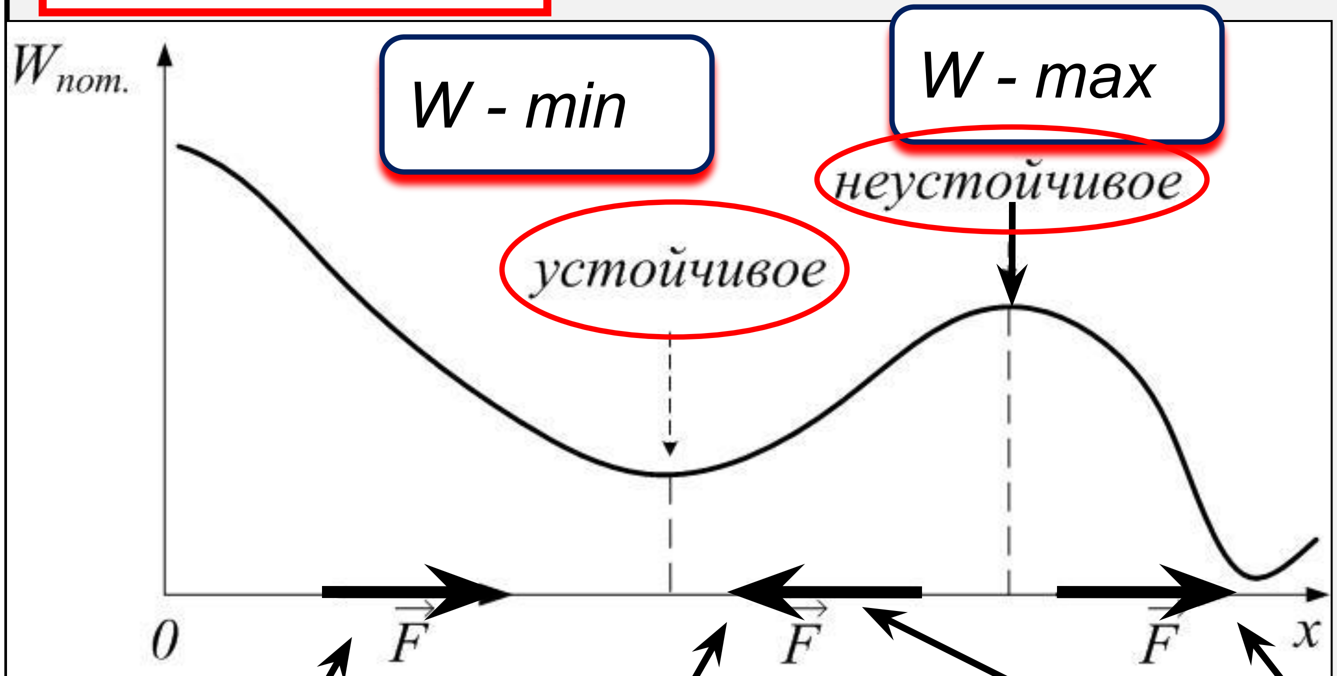
Условие равновесия

В равновесном положении сила равна нулю

$$\boxed{F = 0 \;\Rightarrow\; \frac{dW_{пот.}}{dx} = 0}$$

Энергия экстремальна

$$F_x = -\frac{dW_{пот.}}{dx}$$



W убывает

$$F_x > 0$$

W возрастает

$$F_x < 0$$

При небольших отклонениях от положения равновесия возникают силы, **возвращающие** тело к положению равновесия

При небольших отклонениях от положения равновесия возникают силы, **удаляющие** тело от положения равновесия

Виды равновесия

1.Безразличное: При малом отклонении тело остается в равновесии

2.Неустойчивое: При малом отклонении тела из положения равновесия возникают силы, стремящиеся увеличить это отклонение.

3.Устойчивое: При малом отклонении тела от положения равновесия возникает сила, стремящаяся возвратить тело в исходное состояние.