

ЛИНЕЙНОЕ ПРОСТРАНСТВО. ЛИНЕЙНЫЕ ОПЕРАТОРЫ. КВАДРАТИЧНЫЕ ФОРМЫ

PLAN

Определение линейного пространства.

Линейно зависимые и линейно независимые системы векторов

Скалярное произведение векторов

Понятие линейного оператора и линейного преобразования

Матрица линейного преобразования

Собственные векторы и собственные значения линейного преобразования

Матрица квадратичной формы

Закон инерции

Критерий Сильвестра

ЛИТЕРАТУРА

- 1) Под ред. Н.Ш.Кремера . Высшая математика для экономистов. ЮНИТИ 2012
- 2) Н.Дж.Мусаев, В.Я.Гюльмамедов. Лекции и задачи по курсу высшей математики. 1-я и 2-я части, Баку2002
- 3) В.А.Ильин . Э.Г.Позняк . Линейная алгебра.-М.: Наука, 2010
- 4) В.А.Ильин .Э.Г. Позняк. Основы математического анализа.- Часть 1-М.:Физматлит,2005
- 5) Д.Т.Письменный. Конспект лекций по высшей математике .Москва.1-я и 2-я части, 2018
- 6) Под ред. В.И.Ермакова. Сборник задач по высшей математике для экономистов-М.2006
- 7) Ю.М.Протасов. Линейная алгебра и аналитическая геометрия .2017

ВВЕДЕНИЕ

В этой лекции мы введём понятие линейного пространства. Дадим определение размерности и базиса линейного пространства. Познакомимся с линейными преобразованиями; рассмотрим собственные векторы и собственные значения линейного преобразования. Исследуем квадратичные формы. Познакомимся с критерием Сильвестра для установления знакоопределённости квадратичной формы.



В школе изучались различные числовые множества (подмножества множества $\mathbb{R}$): множество натуральных чисел N , целых чисел Z рациональных чисел Q и т.д.. В современной математике изучаются и множества, каждый элемент которых представляет собой совокупность нескольких действительных чисел.

Например, линейное уравнение:

$a_1x_1 + a_2x_2 + \dots + a_nx_n = b$ с переменными $x_1, x_2, \dots, x_n$ полностью определяется совокупностью его коэффициентов и правой части $(a_1, \dots, a_n, b)$; каждое решение такого уравнения $(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n)$ также представляет собой совокупность чисел.

Результат работы любого предприятия характеризуется определенными числовыми показателями, т.е. совокупностью чисел. Для задания такой совокупности, необходимо знать не только какие числа образуют совокупность, но и в каком порядке, например совокупности $(2;5)$, $(5,2)$ – различны.

В этом смысле говорят, что совокупности чисел, которые мы будем рассматривать, упорядочены.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Упорядоченная совокупность n чисел $x_1, x_2, \dots, x_n$ называется n -мерной точкой или n -мерным вектором.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Множество всех n -мерных точек (n -мерных векторов) называется n -мерным арифметическим пространством и обозначается R_n .

R_1 - множество действительных чисел (числовая прямая)

R_2 - числовая плоскость.

R_n - числовое пространство ($n \geq 3$).

Для элементов R_n можно определить понятие равенства и операций сложения и умножения на число.

Два вектора $\bar{X} = (x_1; x_2; \dots; x_n)$ и $\bar{Y} = (y_1, y_2, \dots, y_n)$ считаются равными, если выполняется условие:

$$X_i = Y_i \quad (i = 1, 2, \dots, n), \quad (1)$$

т.е. соответствующие компоненты равны.

Сумма двух векторов обозначается через $(\bar{X} + \bar{Y})$ и определяется равенством :

$$\bar{X} + \bar{Y} = (x_1 + y_1; x_2 + y_2; \dots; x_n + y_n) \quad (2)$$

Умножение вектора $\bar{X} = (x_1; x_2; \dots; x_n)$ на число α определяется равенством:

$$\alpha \cdot \bar{X} = (\alpha x_1; \alpha x_2, \dots, \alpha x_n) .$$

Для определения, таким образом, операции сложения и умножения на число элементов выполняются свойства $1^0 - 8^0$.

$$1^0. \overline{X} + \overline{Y} = \overline{Y} + \overline{X}$$

$$2^0. (\overline{X} + \overline{Y}) + \overline{Z} = \overline{X} + (\overline{Y} + \overline{Z})$$

$$3^0. \exists \overline{0}, \text{ для которого выполняется } \overline{X} + \overline{0} = \overline{X}.$$

$$4^0. \text{ Для } \forall \overline{X} \exists (-\overline{X}) + \overline{X} + (-\overline{X}) = \overline{0}$$

$$5^0. 1 \cdot \overline{X} = \overline{X}$$

$$6^0. \beta(\alpha \overline{X}) = (\beta\alpha) \overline{X}$$

$$7^0. (\alpha + \beta) \overline{X} = \alpha \overline{X} + \beta \overline{X}$$

$$8^0. \alpha(\overline{X} + \overline{Y}) + \alpha \overline{X} + \alpha \overline{Y}$$

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Множество L с определенными для его элементов операциями сложения и умножения на число, удовлетворяющими аксиомам $1^0 - 8^0$, называется *линейным (векторным) пространством*.

И так R_n - линейное пространство. Множество векторов трехмерного пространства V_3 , множество векторов принадлежащих некоторой плоскости V_2 , множество всех функций, непрерывных на интервале и т.д. являются *линейными пространствами*.

Совокупность всех многочленов степени n не являются линейным пространством, так как при сложении двух многочленов одинаковой степени может получиться многочлен низшей степени, например $(3x^3 + x^2 + 5) + 3x^3 = x^2 + 5$, а это не является элементом этого множества.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Выражение $(\lambda_1 \bar{a}_1 + \lambda_2 \bar{a}_2 + \dots + \lambda_k \bar{a}_k)$ называется *линейной комбинацией* векторов $\bar{a}_1, \bar{a}_2; \dots; \bar{a}_k$ с коэффициентами $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_k$.

Любая линейная комбинация векторов линейного пространства является вектором того же пространства.

Если некоторый вектор $\bar{b}$ линейного пространства представлен в виде линейной комбинации векторов $\bar{a}_1, \bar{a}_2; \dots; \bar{a}_k$ того же пространства,

т.е.
$$\lambda_1 \bar{a}_1 + \lambda_2 \bar{a}_2 + \dots + \lambda_k \bar{a}_k = \bar{b} \quad (4),$$

то говорят, вектор $\bar{b}$ разложен по векторам $\bar{a}_1, \bar{a}_2; \dots; \bar{a}_k$.

Важную роль в теории линейных пространств играет понятие линейной зависимости и линейной независимости векторов.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Система векторов $\bar{a}_1, \bar{a}_2; \dots; \bar{a}_k$ некоторого линейного пространства L называется линейно независимой, если равенство

$$\lambda_1 \bar{a}_1 + \lambda_2 \bar{a}_2 + \dots + \lambda_k \bar{a}_k = 0 \quad (5)$$

Выполняется только при нулевых значениях коэффициентов; если же равенство (5) имеет место и при условии, что хотя бы один из коэффициентов отличен от нуля, то система векторов $\vec{a}_1, \vec{a}_2; \dots; \vec{a}_k$ называется *линейно зависимой*.

Видно, что (5) является частным случаем равенства (4) при $b = 0$. Следовательно (5) есть разложение нуль - вектора по векторам $\vec{a}_1, \vec{a}_2; \dots; \vec{a}_k$. Линейная независимость векторов $\vec{a}_1, \vec{a}_2; \dots; \vec{a}_k$ означает, что разложение нуль вектора по векторам системы возможно единственным образом, а линейная зависимость означает не единственность такого разложения.

ТЕОРЕМА 1. Если система содержит не менее двух векторов, то для линейной зависимости этой системы необходимо и достаточно, чтобы, по крайней мере, один из этих векторов системы являлся линейной комбинацией остальных векторов системы.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО.

Докажем сперва необходимость.

Пусть $\bar{a}_1, \bar{a}_2, \dots, \bar{a}_k$ - линейно зависимые. Тогда по определению линейной зависимости векторов равенство:

$$\lambda_1 \bar{a}_1 + \lambda_2 \bar{a}_2 + \dots + \lambda_k \bar{a}_k = 0$$

Имеет место при условии, что хотя бы один из коэффициентов отличен от нуля. Допустим $\lambda_k \neq 0$.

Тогда обе части равенства разделим на λ_k .

$$\frac{\lambda_1}{\lambda_k} \bar{a}_1 + \frac{\lambda_2}{\lambda_k} \bar{a}_2 + \dots + \bar{a}_k = 0$$

$$\bar{a}_k = -\frac{\lambda_1}{\lambda_k} \bar{a}_1 - \frac{\lambda_2}{\lambda_k} \bar{a}_2 - \dots - \frac{\lambda_{k-1}}{\lambda_k} \bar{a}_{k-1}$$

$$\bar{a}_k = \lambda_1 \bar{a}_1 + \lambda_2 \bar{a}_2 + \dots + \lambda_{k-1} \bar{a}_{k-1}$$

А это разложение вектора $\bar{a}_k$ по остальным векторам этой системы.
Теперь докажем достаточность.

Пусть
$$\bar{a}_k = \lambda_1 \bar{a}_1 + \lambda_2 \bar{a}_2 + \dots + \lambda_{k-1} \bar{a}_{k-1}$$

Перенесем все в одну сторону, получим

$$\lambda_1 \bar{a}_1 + \lambda_2 \bar{a}_2 + \dots + \lambda_{k-1} \bar{a}_{k-1} - \bar{a}_k = 0$$

Как видно, $\lambda_k = -1 \neq 0 \Rightarrow$ по определению линейной зависимости векторов векторы $\bar{a}_1, \bar{a}_2, \dots, \bar{a}_k$ - линейнозависимы.

Теорема доказана полностью.

Если система содержит нулевой вектор, то эта система линейнозависима.

Для системы, состоящей из одного вектора, линейная независимость системы означает, что вектор не является нуль-вектором, а линейная зависимость означает, что вектор является нуль-вектором.

И действительно, пусть система состоит из вектора $\bar{a}_1$. Равенство (5) примет вид:

$$\lambda_1 \bar{a}_1 = 0$$

Если $\bar{a}_1 = 0$, то равенство выполняется при $\lambda_1 = 0$ и при $\lambda_1 \neq 0$ (случай зависимости). Если $\bar{a}_1 \neq 0$, то равенство выполняется при условии $\lambda_1 = 0$ (случай независимости).

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Если в линейном пространстве имеется n линейно независимых векторов, а $(n + 1)$ векторов линейно зависимы, то пространство называется конечномерным; если же линейное пространство таково, что в нем существуют системы из сколь угодно большого числа линейно независимых векторов, то это пространство называется бесконечномерным.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Максимально возможное число линейно независимых векторов в конечномерном пространстве называется размерностью этого пространства.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Система n линейно независимых векторов в n мерном пространстве называется базисом этого пространства.

Теорема 2. По векторам базиса можно разложить любой вектор пространства, причём единственным образом.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО.

Пусть векторы $\bar{a}_1, \bar{a}_2, \dots, \bar{a}_n$ образуют базис некоторого линейного n -мерного пространства, а $\bar{b}$ произвольный вектор того же пространства.

Система $(\bar{a}_1, \bar{a}_2, \dots, \bar{a}_n, \bar{b})$ содержит $(n+1)$ вектор, а следовательно, линейнозависима. По определению линейно зависимых векторов равенство

$$\lambda_1 \bar{a}_1 + \lambda_2 \bar{a}_2 + \dots + \lambda_n \bar{a}_n + \lambda_{n+1} \bar{b} = 0 \quad (6)$$

Выполняется при условии, что, по крайней мере, один из коэффициентов отличен от нуля. Среди них обязательно будет и коэффициент λ_{n+1} , иначе мы получим равенство:

$$\lambda_1 \bar{a}_1 + \lambda_2 \bar{a}_2 + \dots + \lambda_n \bar{a}_n = 0$$

среди коэффициентов, которого будут отличные от нуля, что противоречит линейной независимости векторов $\bar{a}_1, \bar{a}_2, \dots, \bar{a}_n$.

Итак $\lambda_{n+1} \neq 0$. Обе части равенства (6) разделим на λ_{n+1} , получим:

$$\bar{b} = -\frac{\lambda_1}{\lambda_{n+1}} \bar{a}_1 - \frac{\lambda_2}{\lambda_{n+1}} \bar{a}_n \quad (7)$$

$$\bar{b} = \lambda_1 \bar{a}_1 + \lambda_2 \bar{a}_2 + \dots + \lambda_n \bar{a}_n$$

а это и есть разложение вектора $\bar{b}$ по базисным векторам $\bar{a}_1, \bar{a}_2, \dots, \bar{a}_n$.

Теперь докажем единственность этого разложения. Предположим кроме разложения (7) существует и другое разложение:

$$\bar{b} = \beta \bar{a}_1 + \beta \bar{a}_2 + \dots + \beta_n \bar{a}_n \quad (8)$$

Из (7) вычтем (8)

$$\begin{aligned}\bar{b} - \bar{b} &= (\alpha_1 - \beta_1)\bar{a}_1 + (\alpha_2 - \beta_2)\bar{a}_2 + \dots + (\alpha_n - \beta_n)\bar{a}_n \\ 0 &= (\alpha_1 - \beta_1)\bar{a}_1 + (\alpha_2 - \beta_2)\bar{a}_2 + \dots + (\alpha_n - \beta_n)\bar{a}_n\end{aligned}\quad (9)$$

Так как векторы $\bar{a}_1, \bar{a}_2, \dots, \bar{a}_n$ образуют базис, то они линейно независимы, а следовательно равенство (9) выполняется только при нулевых значениях коэффициентов. Следовательно,

$$\alpha_1 - \beta_1 = 0; \alpha_2 - \beta_2 = 0; \dots; \alpha_n - \beta_n = 0$$

Следовательно, $\alpha_1 = \beta_1; \alpha_2 = \beta_2; \dots; \alpha_n = \beta_n$.

И так, единственность разложения доказана.

Теорема доказана полностью.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Коэффициенты разложения вектора по векторам базиса этого пространства полностью определяет этот вектор. Они называются координатами вектора в данном базисе.

В R_n рассмотрим n следующих векторов:

$$\begin{matrix} \boxed{\times} \\ e_1 = (1, 0, \dots, 0) \end{matrix}$$

$$\begin{matrix} \boxed{\times} \\ e_2 = (0, 1, \dots, 0) \end{matrix}$$

$$\begin{matrix} \boxed{\times} \\ e_n = (0, 0, \dots, 1) \end{matrix}$$

Докажем, что система векторов $\begin{matrix} \boxed{\times} \\ e_1 \end{matrix}, \begin{matrix} \boxed{\times} \\ e_2 \end{matrix}, \dots, \begin{matrix} \boxed{\times} \\ e_n \end{matrix}$ линейно независима в R_n .

Рассмотрим линейную комбинацию этих векторов с произвольными числами $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$.

$$\alpha_1(1, 0, \dots, 0) + \alpha_2(0, 1, \dots, 0) + \dots + \alpha_n(0, 0, \dots, 1) =$$

$$= (\alpha_1, 0, \dots, 0) + (0, \alpha_2, \dots, 0) + (0, 0, \dots, \alpha_n) = (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n)$$

$(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n)$ является нулевым, если все числа $\alpha_i = 0 (i = 1, 2, \dots, n)$; то есть равенство $\alpha_1 e_1 + \alpha_2 e_2 + \dots + \alpha_n e_n = 0$ выполняется только при нулевых значениях коэффициентов, а это и означает линейную независимость векторов $e_1, e_2, \dots, e_n$. Линейно независимые векторы $e_1, e_2, \dots, e_n$ в n мерном пространстве R_n образуют базис, который называется каноническим.

ПРИМЕЧАНИЕ. Следует различать координаты вектора от координат этого вектора в данном базисе. Но координаты вектора совпадают с координатами вектора в каноническом базисе.

Пример. Даны векторы:

$$\bar{a}_1 = (2; 3; 3), \bar{a}_2 = (-1; 4; -2), \bar{a}_3 = (-1; -2; 4), \bar{b} = (4; 1; 1; 1)$$

Показать, что векторы $\bar{a}_1, \bar{a}_2, \bar{a}_3$ образуют базис в R_3 и найти координаты вектора в данном базисе.

Решение

$$\left. \begin{aligned} 2\lambda_1 - \lambda_2 - \lambda_3 &= 0 \\ 3\lambda_1 + 4\lambda_2 - 2\lambda_3 &= 0 \\ 3\lambda_1 - 2\lambda_2 + 4\lambda_3 &= 0 \end{aligned} \right\} \quad \left. \begin{aligned} 2\lambda_1 - \lambda_2 - \lambda_3 &= 0 \\ 11\lambda_1 - 6\lambda_3 &= 0 \\ -\lambda_1 + 6\lambda_3 &= 0 \end{aligned} \right\} \quad \left. \begin{aligned} 2\lambda_1 - \lambda_2 - \lambda_3 &= 0 \\ 11\lambda_1 - 6\lambda_3 &= 0 \\ 10\lambda_1 &= 0 \end{aligned} \right\}$$

$$\left. \begin{aligned} \lambda_1 &= 0 \\ \lambda_3 &= 0 \\ \lambda_2 &= 0 \end{aligned} \right\} \Rightarrow \bar{a}_1, \bar{a}_2, \bar{a}_3 - \text{линейно независимые} \Rightarrow \text{образуют базис в } R_3.$$

Теперь найдем координаты вектора $\bar{b}$ в данном базисе:

$$\left. \begin{aligned} 2\alpha_1 - \alpha_2 - \alpha_3 &= 4 \\ 3\alpha_1 + 4\alpha_2 - 2\alpha_3 &= 11 \\ 3\alpha_1 - 2\alpha_2 + 4\alpha_3 &= 11 \end{aligned} \right\} \quad \left. \begin{aligned} 2\alpha_1 - \alpha_2 - \alpha_3 &= 4 \\ 11\alpha_1 - 6\lambda_3 &= 27 \\ -\lambda_1 + 6\alpha_3 &= 3 \end{aligned} \right\}$$

$$\left. \begin{aligned} 2\alpha_1 - \alpha_2 - \alpha_3 &= 4 \\ 11\alpha_1 - 6\alpha_3 &= 27 \\ 10\alpha_1 &= 30 \end{aligned} \right\} \quad \begin{aligned} \alpha_1 &= 3 \\ 33 - 6\alpha_3 &= 27 \\ \alpha_3 &= 1 \end{aligned} \quad \begin{aligned} 6 - \alpha_2 - 1 &= 4 \\ \alpha_2 &= 1 \end{aligned}$$

$(3; 1; 1)$ – координат вектора $\bar{b}$ в данном базисе.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Скалярным произведением векторов $\bar{X} = (x_1; x_2; \dots; x_n)$ и $\bar{Y} = (y_1, y_2, \dots, y_n)$ пространства R_n называется число

$$(\overline{X}, \overline{Y}) = \sum_{b=1}^n x_b y_b = x_1 y_1 + x_2 y_2 + \dots + x_n y_n \quad (10)$$

Свойства:.

- 1) $(\overline{X}, \overline{X}) \geq 0$; $(\overline{X}, \overline{X}) = 0$ тогда и только тогда, когда $\overline{X} = \overline{0}$
- 2) $(\overline{X}, \overline{Y}) = (\overline{Y}, \overline{X})$
- 3) $(\alpha \overline{X} + \beta \overline{Y}, \overline{Z}) = \alpha (\overline{X}, \overline{Z}) + \beta (\overline{Y}, \overline{Z})$

Число (неотрицательное)

$$|\overline{X}| = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2} \quad (11)$$

называется длиной вектора $\overline{X} = (x_1, x_2, \dots, x_n)$.

4) Неравенство Коши-Буньяковского

$$|(\overline{X}, \overline{Y})| \leq |\overline{X}| \cdot |\overline{Y}|$$

Доказательство.

Рассмотрим скалярное произведение: $(\lambda \bar{X} + Y, \lambda \bar{X} + Y)$.

По 1-ому свойству $(\lambda \bar{X} + \bar{Y}, \lambda \bar{X} + Y) \geq 0$.

С другой стороны, используясь свойствами скалярного произведения, имеем:

$$\begin{aligned}(\lambda \bar{X} + \bar{Y}, \lambda \bar{X} + Y) &= \lambda^2 (\bar{X}, \bar{X}) + \lambda (\bar{Y}, \bar{X}) + \lambda (\bar{X}, \bar{Y}) + (\bar{Y}, \bar{Y}) = \\ &= \lambda^2 (\bar{X}, \bar{X}) + 2\lambda (\bar{Y}, \bar{X}) + (\bar{Y}, \bar{Y}) \geq 0\end{aligned}$$

Квадратный трёхчлен тогда ≥ 0 , когда дискриминант ≤ 0 .

$$D = b^2 - 4ac = 4[(\bar{X}, \bar{X})]^2 - 4(\bar{X}, \bar{X})(\bar{Y}, \bar{Y}) \leq 0$$

$$[(\bar{X}, \bar{Y})]^2 \leq (\bar{X}, \bar{X})(\bar{Y}, \bar{Y})$$

$$|(\bar{X}, \bar{Y})| \leq \sqrt{(\bar{X}, \bar{X})} \sqrt{(\bar{Y}, \bar{Y})}$$

$$-|(\bar{X}, \bar{Y})| \leq |\bar{X}| \cdot |\bar{Y}|$$

Неравенство доказано.

Расстояние между точками $\bar{X} = (x_1, x_2, \dots, x_n)$, $\bar{Y} = (y_1, y_2, \dots, y_n)$ обозначается: $d(\bar{X}, \bar{Y}) = |\bar{X} - \bar{Y}|$ и определяется по формуле:

$$d(\bar{X}, \bar{Y}) = \sqrt{\sum_{i=1}^m (x_i - y_i)^2}$$

(12)

Из неравенства Коши-Буняковского следует:

$$-1 \leq \frac{(\bar{X}, \bar{Y})}{|\bar{X}| |\bar{Y}|} \leq 1$$

Вместо величины $\frac{(\bar{X}, \bar{Y})}{|\bar{X}| |\bar{Y}|}$ можно взять $\cos \varphi (\varphi \in [0; \pi])$.

Угол φ , определяемый равенством $\cos \varphi = \frac{(\bar{X}, \bar{Y})}{|\bar{X}| \cdot |\bar{Y}|}$ и принадлежащий $[0, \pi]$

, называется углом между $\bar{X}$ и $\bar{Y}$

$$\cos \varphi = \frac{(\overline{X}, \overline{Y})}{|\overline{X}| \cdot |\overline{Y}|} = \frac{x_1 y_1 + x_2 y_2 + \dots + x_n y_n}{\sqrt{x_1^2 + \dots + x_n^2} \sqrt{y_1^2 + \dots + y_n^2}} \quad (13)$$

Если $\overline{X}$ и $\overline{Y}$ ненулевые векторы, а $\varphi = \frac{\pi}{2}$, то $(\overline{X}, \overline{Y}) = \overline{0}$. В этом случае говорят, что векторы $(\overline{X}, \overline{Y}) = \overline{0}$ ортогональны.

Система векторов называется ортогональной системой, если все векторы этой системы попарно ортогональны между собой.

Теорема. Всякая ортогональная система ненулевых векторов линейно независима.

Доказательство.

Обе части равенства $\lambda_1 \bar{a}_1 + \lambda_2 \bar{a}_2 + \dots + \lambda_n \bar{a}_n = 0 \quad (*)$

скалярно умножим на вектор $\bar{a}_k \neq 0$

$$\lambda_1 \bar{a}_1 + \lambda_2 \bar{a}_2 + \dots + \lambda_n \bar{a}_n, \bar{a}_k = (0, \bar{a}_k)$$

Так как векторы ортогональны, то $(\bar{a}_j, \bar{a}_k) = 0 \quad (j \neq k)$
 $\lambda_k (\bar{a}_k, \bar{a}_k) = 0$, но с другой стороны $(\bar{a}_k, \bar{a}_k) \neq 0$, так как $(\bar{a}_k, \bar{a}_k) = 0$ только если $\bar{a}_k = 0$, а это противоречит условию теоремы. Следовательно $\lambda_k = 0 \quad (k = 1, 2, \dots, n)$. Значит, равенство $(*)$ выполняется только при нулевых значениях коэффициентов, а это означает линейную независимость системы.

Теорема доказана.

ПРИМЕР. Даны векторы: $\overline{X} = (-1; 1; 3; 5)$

$$\overline{Y} = (2; -1; 1; 3)$$

Найти: а) скалярное произведение $(\overline{X}, \overline{Y})$;

б) длины этих векторов;

в) угол между векторами $\overline{X}$ и $\overline{Y}$.

Р е ш е н и е

$$\text{а) } (\overline{X}, \overline{Y}) = -1 \cdot 2 + 1 \cdot (-1) + 3 \cdot 1 + 5 \cdot 3 = 15$$

$$\text{б) } |\overline{X}| = \sqrt{1 + 1 + 3^2 + 5^2} = \sqrt{36} = 6$$

$$|\overline{Y}| = \sqrt{2^2 + (-1)^2 + 1^2 + 3^2} = \sqrt{15}$$

$$\text{в) } \cos \varphi = \frac{(\overline{X}, \overline{Y})}{|\overline{X}| \cdot |\overline{Y}|} = \frac{15}{6 \cdot \sqrt{15}} = \frac{\sqrt{15}}{6}$$

$$\varphi = \arccos \left(\frac{\sqrt{15}}{6} \right)$$

ЛИНЕЙНЫЕ ОПЕРАТОРЫ.

Пусть R^n и R^m - конечномерные арифметические пространства.

Если установлено соответствие, сопоставляющее каждому вектору $\bar{X}$ из R^n вполне определенный вектор $\bar{Y}$ из R^m , то говорят, что задан оператор A , действующий из R^n в R^m . Записывается это в виде

$$\bar{Y} = A\bar{X} \quad \text{или} \quad \bar{Y} = A(\bar{X})$$

Оператор A , действующий из R^n в R^m называется линейным, если для любых элементов $\bar{X}_1, \bar{X}_2$ пространства R^n и для любого числа λ выполняется:

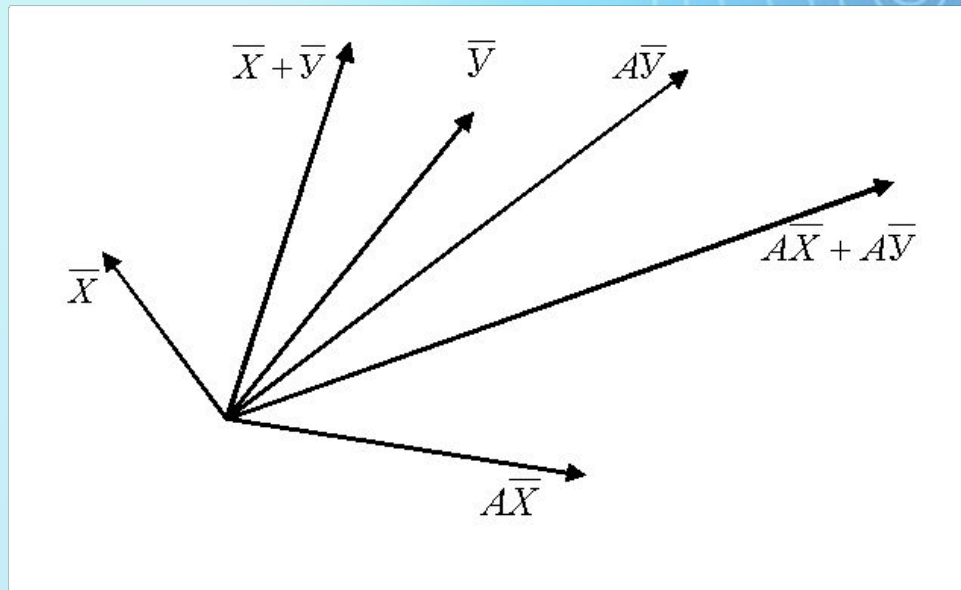
$$1) A(\bar{X}_1 + \bar{X}_2) = A\bar{X}_1 + A\bar{X}_2 \quad (\text{свойство аддитивности})$$

$$2) A(\lambda\bar{X}) = \lambda A\bar{X} \quad (\text{свойство однородности})$$

Если пространство R^n совпадает с R^m , то оператор A называется линейным преобразованием R^n в себя.

Для преобразований в обычном трехмерном пространстве условия (1) и (2) имеют определенный геометрический смысл.

Пусть под воздействием преобразования A векторы $\bar{X}$ и $\bar{Y}$ переходят в векторы $A\bar{X}$ и $A\bar{Y}$. Тогда диагональ параллелограмма, построенного на векторах $\bar{X}$ и $\bar{Y}$ ($\bar{X} + \bar{Y}$), переходит в диагональ параллелограмма, построенного на векторах $A\bar{X}$ и $A\bar{Y}$ ($A\bar{X} + A\bar{Y}$).



Второе условие означает, что при изменении длины вектора $\bar{X}$ в λ раз, во столько же раз меняется длина вектора $A\bar{X}$.

При $\lambda < 0$ векторы $\lambda \bar{X}$ и $A(\lambda \bar{X})$ меняют направление на противоположное.

Пусть A и B – линейные преобразования, действующие в R^n , тогда:
Суммой этих преобразований называется *преобразование* $(A+B)$, определяемое равенством

$$(A + B)\bar{X} = A\bar{X} + B\bar{X} \quad (\forall \bar{X} \in R^n)$$

Произведением линейного преобразования A на число λ назовем линейное преобразование λA , определяемое равенством

$$(\lambda A)\bar{X} = \lambda A(\bar{X}) \quad (\forall \bar{X} \in R^n)$$

Произведением линейного преобразования A на линейное преобразование B называется *линейное преобразование* AB , действующее по закону:

$$AB(\bar{X}) = A(B(\bar{X}))$$

Замечание:

$$AB \neq BA$$

Пример. Является ли преобразование $A\bar{X} = (x_1; x_2 + 1; x_3 + 2)$ пространства R_3 в себя линейным ?

Р е ш е н и е

Надо проверить выполнение условий:

$$1) A(\overline{X} + \overline{Y}) = A(\overline{X}) + A(\overline{Y})$$

$$2) A(\lambda \overline{X}) = \lambda A(\overline{X})$$

$$\begin{aligned} A(\overline{X} + \overline{Y}) &= (x_1 + y_1; x_2 + y_2 + 1; x_3 + y_3 + 2) = \\ &= (x_1; x_2; x_3) + (y_1; y_2 + 1; y_3 + 2) \neq A\overline{X} + A\overline{Y} \end{aligned}$$

Итак, одно из условий линейности не выполняется, следовательно, данное преобразование не является линейным.

МАТРИЦА ЛИНЕЙНОГО ПРЕОБРАЗОВАНИЯ.

Пусть в R^n с фиксированным базисом $e_1, e_2, \dots, e_n$ задано линейное преобразование A . Каждый вектор пространства R^n можно разложить по базисным векторам. Для $\bar{X} \in R^n$:

$$\bar{X} = x_1 e_1 + x_2 e_2 + \dots + x_n e_n$$

Координаты $\bar{X}$ запишем в столбец

$$\bar{X} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$$

Так как преобразование A – линейное, то

$$A\bar{X} = x_1 A e_1 + x_2 A e_2 + \dots + x_n A e_n \quad (1)$$

С другой стороны векторы $Ae_i (i = 1, \dots, n)$ являются элементами R_n и поэтому их можно разложить по векторам базиса $\bar{e}_1, \bar{e}_2, \dots, \bar{e}_n$:

$$Ae_i = a_{1i} \bar{e}_1 + a_{2i} \bar{e}_2 + \dots + a_{ni} \bar{e}_n \quad (i = 1, \dots, n)$$

А именно:

$$Ae_1 = a_{11} \bar{e}_1 + a_{21} \bar{e}_2 + \dots + a_{n1} \bar{e}_n$$

$$Ae_2 = a_{12} \bar{e}_1 + a_{22} \bar{e}_2 + \dots + a_{n2} \bar{e}_n$$

$$\dots \dots \dots \dots \dots$$

$$Ae_n = a_{1n} \bar{e}_1 + a_{2n} \bar{e}_2 + \dots + a_{nn} \bar{e}_n$$

Учитывая эти равенства в равенстве (1), получим:

$$\begin{aligned} AX &= (a_{11} \bar{e}_1 x_1 + a_{21} \bar{e}_2 x_1 + \dots + a_{n1} \bar{e}_n x_1) + \\ &+ (a_{12} \bar{e}_1 x_2 + a_{22} \bar{e}_2 x_2 + \dots + a_{n2} \bar{e}_n x_2) + \dots + \\ &+ (a_{1n} \bar{e}_1 x_n + a_{2n} \bar{e}_2 x_n + \dots + a_{nn} \bar{e}_n x_n) = \\ &= (a_{11} x_1 + a_{12} x_2 + \dots + a_{1n} x_n) \bar{e}_1 + (a_{21} x_1 + a_{22} x_2 + \dots + \\ &+ a_{2n} x_n) \bar{e}_2 + \dots + (a_{n1} x_1 + a_{n2} x_2 + \dots + a_{nn} x_n) \bar{e}_n \end{aligned} \quad (2)$$

Т.е. $A\bar{X} = y_1\bar{e}_1 + y_2\bar{e}_2 + \dots + y_n\bar{e}_n$, где

$$\left. \begin{aligned} y_1 &= a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n \\ y_2 &= a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n \\ \dots & \dots \dots \dots \dots \\ y_n &= a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \dots + a_{nn}x_n \end{aligned} \right\} \text{или}$$

$$\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \dots \\ y_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \dots \\ x_n \end{pmatrix} \quad (3)$$

Матрица

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

называется матрицей преобразования A в данном базисе $\bar{e}_1, \bar{e}_2, \dots, \bar{e}_n$.

Из соотношения (3) видно, что для того, чтобы получить координаты преобразованного вектора $\bar{Y}$ надо матрицу линейного преобразования умножить на столбец координат вектора $\bar{X}$.

Если в n - мерном линейном пространстве задан базис $\bar{e}_1, \bar{e}_2, \dots, \bar{e}_n$, то каждому линейному преобразованию соответствует квадратная матрица порядка n , и наоборот.

Чтобы найти матрицу линейного преобразования, надо:

- 1) подвергнуть его действию базисные векторы $\bar{e}_1, \bar{e}_2, \dots, \bar{e}_n$

1) полученные векторы Ae_i ($i = 1, \dots, n$) разложить в этом базисе

$$\left. \begin{aligned} Ae_1 &= a_{11}e_1 + a_{21}e_2 + \dots + a_{n1}e_n \\ Ae_2 &= a_{12}e_1 + a_{22}e_2 + \dots + a_{n2}e_n \\ \dots &\dots \dots \dots \dots \\ Ae_n &= a_{1n}e_1 + a_{2n}e_2 + \dots + a_{nn}e_n \end{aligned} \right\} \quad (4)$$

2) коэффициент разложения (4) записать в виде матрицы A , помещая коэффициент строк в соответствующие столбцы матрицы.

ПРИМЕР. Найти матрицу линейного преобразования:

$$A\overline{X} = (x_2 + x_3; 2x_1 + x_3; 3x_1 - x_2 + x_3)$$

пространства R_3 в себя, в каноническом базисе

Решение

$$Ae_1 = (0 + 0; 2 \cdot 1 + 0; 3 \cdot 1 - 0 + 0) = (0; 2; 3)$$

$$Ae_2 = (1 + 0; 2 \cdot 0 + 0; 3 \cdot 0 - 1 + 0) = (1; 0; -1)$$

$$Ae_3 = (0 + 1; 2 \cdot 0 + 1; 3 \cdot 0 - 0 + 1) = (1; 1; 1)$$

$$Ae_1 = 0 \cdot e_1 + 2 \cdot e_2 + 3 \cdot e_3$$

$$Ae_2 = 1 \cdot e_1 + 0 \cdot e_2 - 1 \cdot e_3$$

$$Ae_3 = 1 \cdot e_1 + 1 \cdot e_2 + 1 \cdot e_3$$

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 1 \\ 3 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

СОБСТВЕННЫЕ ВЕКТОРЫ И СОБСТВЕННЫЕ ЗНАЧЕНИЯ ЛИНЕЙНОГО ПРЕОБРАЗОВАНИЯ.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Ненулевой вектор $\bar{X} \in R_n$ называется собственным вектором линейного преобразования A , если найдется такое число λ , что

$$A\bar{X} = \lambda\bar{X} \quad (\bar{X} \neq 0)$$

Само число λ называется характеристическим числом линейного преобразования A , соответствующим вектору $\bar{X}$.

Если линейное преобразование A в базисе $\bar{e}_1, \bar{e}_2, \dots, \bar{e}_n$ имеет матрицу

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

то уравнение $A\bar{X} = \lambda\bar{X}$ в координатной форме имеет вид:

$$\left. \begin{array}{l} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \boxed{} + a_{1n}x_n = \lambda x_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \boxed{} + a_{2n}x_n = \lambda x_2 \\ \boxed{} \quad \boxed{} \quad \boxed{} \quad \boxed{} \quad \boxed{} \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \boxed{} + a_{nn}x_n = \lambda x_n \end{array} \right\} \Leftrightarrow$$

$$\left. \begin{array}{l} (a_{11} - \lambda)x_1 + a_{12}x_2 + \boxed{} + a_{1n}x_n = 0 \\ a_{21}x_1 + (a_{22} - \lambda)x_2 + \boxed{} + a_{2n}x_n = 0 \\ \boxed{} \quad \boxed{} \quad \boxed{} \quad \boxed{} \quad \boxed{} \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \boxed{} + (a_{nn} - \lambda)x_n = 0 \end{array} \right\} \quad (5)$$

Известно, что для существования отличного от нуля решения системы однородных уравнений, необходимым и достаточным условием является равенство нулю определителя основной матрицы, т.е.

$$\begin{vmatrix} a_{11} - \lambda & a_{12} & \boxtimes & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} - \lambda & \boxtimes & a_{2n} \\ \boxtimes & \boxtimes & \boxtimes & \boxtimes \\ a_{n1} & a_{n2} & \boxtimes & a_{nn} - \lambda \end{vmatrix} = 0 \quad (6)$$

Если вычислим этот определитель, то получим многочлен n -й степени по отношению к λ . Этот многочлен называется характеристическим многочленом линейного преобразования, а (6) называется характеристическим уравнением.

Числа $\lambda_1, \lambda_2, \boxtimes, \lambda_n$ называются собственными числами линейного преобразования.

Подставив найденные числа λ_i в систему (5) и решив эту систему относительно $x_1, x_2, \boxtimes, x_n$. Найдем координаты собственных векторов, соответствующих собственному числу λ .

Пример. Определить собственные числа и собственные векторы линейного преобразования с матрицей.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$$

Составим характеристическое уравнение

$$\begin{vmatrix} 1 - \lambda & 4 \\ 2 & -1 - \lambda \end{vmatrix} = 0$$
$$-(1 - \lambda)(1 + \lambda) - 8 = 0$$

$$\lambda^2 - 9 = 0$$

$$\lambda_1 = 3 \quad \lambda_2 = -3 \text{ - собственные числа}$$

$$\begin{cases} (1 - \lambda)x_1 + 4x_2 = 0 \\ 2x_1 + (-1 - \lambda)x_2 = 0 \end{cases}$$

Для $\lambda_1 = 3$ система имеет вид:

$$\begin{cases} -2x_1 + 4x_2 = 0 \\ 2x_1 - 4x_2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow x_1 = 2x_2$$

Пусть $x_2 = \alpha$, тогда $x_1 = 2\alpha$

$x = (2\alpha; \alpha)$ - собственный вектор, отвечающий собственному значению $\lambda = 3$.

Для $\lambda_2 = -3$ система имеет вид

$$\left. \begin{array}{l} 4x_1 + 4x_2 = 0 \\ 2x_1 + 2x_2 = 0 \end{array} \right\} \Leftrightarrow x_1 = -x_2$$

Пусть $x_2 = \beta$, тогда $x_1 = -\beta$.

$X = (-\beta; \beta)$ - собственный вектор, отвечающий собственному числу $\lambda = -3$.

КВАДРАТИЧНЫЕ ФОРМЫ

Билинейной формой на пространстве L называется всякая числовая функция двух векторных аргументов, линейная по каждому аргументу, т.е. для всех

$$x, y, z \in L, \lambda \in R:$$

$$B(x + y, z) = B(x, z) + B(y, z), \quad B(\lambda x, y) = \lambda B(x, y)$$

$$B(x, y + z) = B(x, y) + B(x, z), \quad B(x, \lambda y) = \lambda B(x, y)$$

ТЕОРЕМА 1 (о матрице билинейной формы).

Пусть $e_1, \dots, e_n$ — один из базисов в L , $B: L \times L \rightarrow R$ — некоторое отображение. Тогда следующие утверждения эквивалентны:

- 1) B — билинейная форма;
- 2) для всех векторов $x, y \in L$

$$B(x, y) = (x_1, \dots, x_n) \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} = \sum_{i,j=1}^n a_{i,j} x_i y_j$$

или в матричной форме $B(x, y) = X^T A Y$, X, Y — столбцы координат векторов x, y , матрица A с элементами $a_{ij} = B(e_i, e_j)$.

Билинейная форма называется симметричной, если ее значения не изменяются при перестановке аргументов: $B(x, y) = B(y, x)$ для всех $x, y \in L$.

ТЕОРЕМА 2. Билинейная форма симметрична тогда и только тогда, когда в одном (и тогда в любом) из базисов ее матрица симметрична.

Квадратичной формой на пространстве L называется всякая такая числовая функция $Q: L \rightarrow R$, что $Q(x) = B(x, x)$ для некоторой симметричной билинейной формы B при всех $x \in L$. О такой симметричной билинейной форме B будем говорить, что она порождает квадратичную форму Q .

ТЕОРЕМА 3 (о единственности симметричной билинейной формы, порождающей квадратичную форму). Существует только одна симметричная билинейная форма, порождающая данную квадратичную форму.

Матрицей квадратичной формы называется матрица соответствующей симметричной билинейной формы. Таким образом, в координатах квадратичная форма может быть записана как симметричная матрица, т.е.

$$Q(x_1, \dots, x_n) = \sum_{i=1}^n a_{ii} x_i^2 + \sum_{\substack{i,j=1 \\ i < j}}^n 2a_{ij} x_i x_j$$

ПРИМЕР 8.7. Квадратичная форма

$$Q(x_1, x_2, x_3) = x_1^2 + 4x_2^2 - 7x_3^2 + x_1x_2 - 4x_1x_3 + 5x_2x_3$$

может быть записана в матричной форме

$$Q(x_1, x_2, x_3) = (x_1, x_2, x_3) \begin{pmatrix} 1 & 1/2 & -2 \\ 1/2 & 4 & 5/2 \\ -2 & 5/2 & -7 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}.$$

8.6. ЗАКОН ИНЕРЦИИ ДЛЯ КВАДРАТИЧНЫХ ФОРМ

Будем говорить, что квадратичная форма в некотором базисе имеет канонический вид, если в этом базисе ее матрица диагональна

$$Q(x) = (x_1, \dots, x_n) \begin{pmatrix} \lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \sum_{i=1}^n \lambda_i x_i^2.$$

Всякую квадратичную форму можно привести к каноническому виду, т.е. найти базис, в котором квадратичная форма имеет канонический вид.

Коэффициенты λ_i зависят от выбора такого базиса. Однако ненулевых элементов в диагональной матрице равно рангу квадратичной формы и,

следовательно, неизменно. Более того, не меняется пара чисел (p_+, p_-) из количества положительных и отрицательных коэффициентов.

ТЕОРЕМА 4 (закон инерции для квадратичных форм). Количество положительных, отрицательных и нулевых коэффициентов в записи квадратичной формы $Q(x)$ в каноническом виде

$$Q(x) = \sum_{i=1}^n \lambda_i x_i^2$$

не зависит от выбора базиса, относительно которого форма имеет такой вид.

Один из способов приведения квадратичных форм к каноническому виду основан на выделении полных квадратов. Например,

$$\begin{aligned} Q(x) &= 5x_1^2 + 4x_1x_2 + 8x_2^2 = 5\left(x_1^2 + \frac{4}{5}x_1x_2 + \frac{4}{25}x_2^2\right) + \frac{36}{5}x_2^2 = \\ &= 5\left(x_1 + \frac{2}{5}x_2\right)^2 + \frac{36}{5}x_2^2 = 5(x'_1)^2 + \frac{36}{5}(x'_2)^2. \end{aligned}$$

Здесь формула перехода от одних координат к другим

$$\begin{pmatrix} x'_1 \\ x'_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2/5 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \text{ или } \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -2/5 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x'_1 \\ x'_2 \end{pmatrix}.$$

Новый базис $e'_1 = e_1, e'_2 = -\frac{2}{5}e_1 + e_2$ составлен из неперпендикулярных векторов, что характерно для данного метода приведения квадратичной формы к каноническому виду.

КРИТЕРИЙ СИЛЬВЕСТРА ЗНАКООПРЕДЕЛЕННОСТИ КВАДРАТИЧНОЙ ФОРМЫ

ТЕОРЕМА 5 (критерий Сильвестра).

Пусть $A = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$ - симметричная матрица,

$$\Delta_k = \det \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1k} \\ \dots & \dots & \dots \\ a_{k1} & \dots & a_{kk} \end{pmatrix}, \quad k = 1, \dots, n.$$

1) Квадратичная форма с матрицей A положительно определена $\Leftrightarrow$
 $\Delta_1 > 0, \Delta_2 > 0, \dots, \Delta_n > 0.$

2) Квадратичная форма с матрицей A отрицательно определена, если

$$\Delta_1 < 0, \Delta_2 > 0, \dots, (-1)^n \Delta_n > 0.$$

ПРИМЕР. Квадратичная форма $Q(x) = 5x_1^2 + 4x_1x_2 + 8x_2^2$ положительно определена, так как здесь

$$A = \begin{pmatrix} 5 & 2 \\ 2 & 8 \end{pmatrix}, \Delta_1 = 5 > 0, \Delta_2 = 36 > 0.$$

ИТОГ

Итак, в этой лекции мы ввели понятие линейного пространства. Дали определение линейной зависимости и линейной независимости векторов. Рассмотрели линейные операторы и линейные преобразования. Получили матрицу линейного преобразования. Ознакомились с квадратичными формами и с критерием Сильвестра.



КОНТРОЛЬНЫЕ ВОПРОСЫ

- 1) Какие пространства называются линейными
 - 2) Базис и размерность пространства
 - 3) Неравенство Коши-Буняковского
 - 4) Как определяется матрица линейного преобразования
 - 5) Собственные векторы и собственные значения линейного преобразования
 - 6) Как определяется матрица квадратичной формы
 - 7) Критерий Сильвестра
- 