

**Приближённое вычисление
определённого интеграла по
формулам прямоугольников и
трапеций.**

Оценка погрешности вычислений.



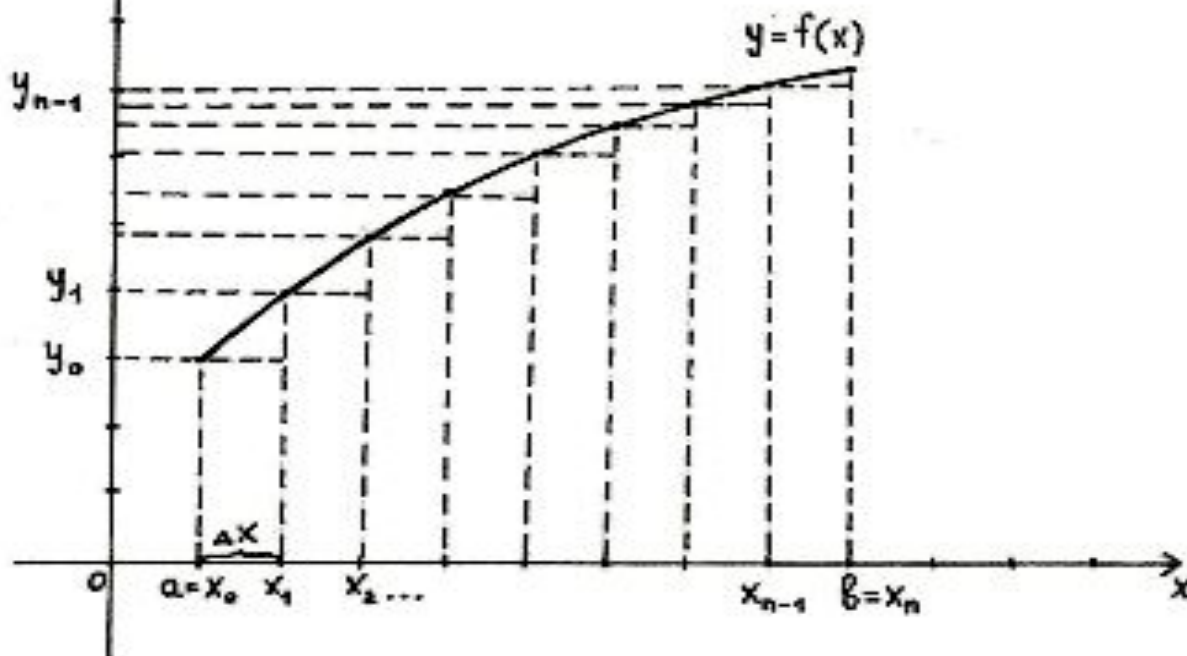
Метод прямоугольников

- Геометрически идея способа вычисления определённого интеграла по формуле прямоугольников состоит в том, что площадь криволинейной трапеции ABCD заменяется суммой площадей прямоугольников, одна сторона $\frac{b-a}{n}$ которых равна $f(x_n)$, а другая -

Площадь с недостатком

$$\int_a^b f(x) dx$$

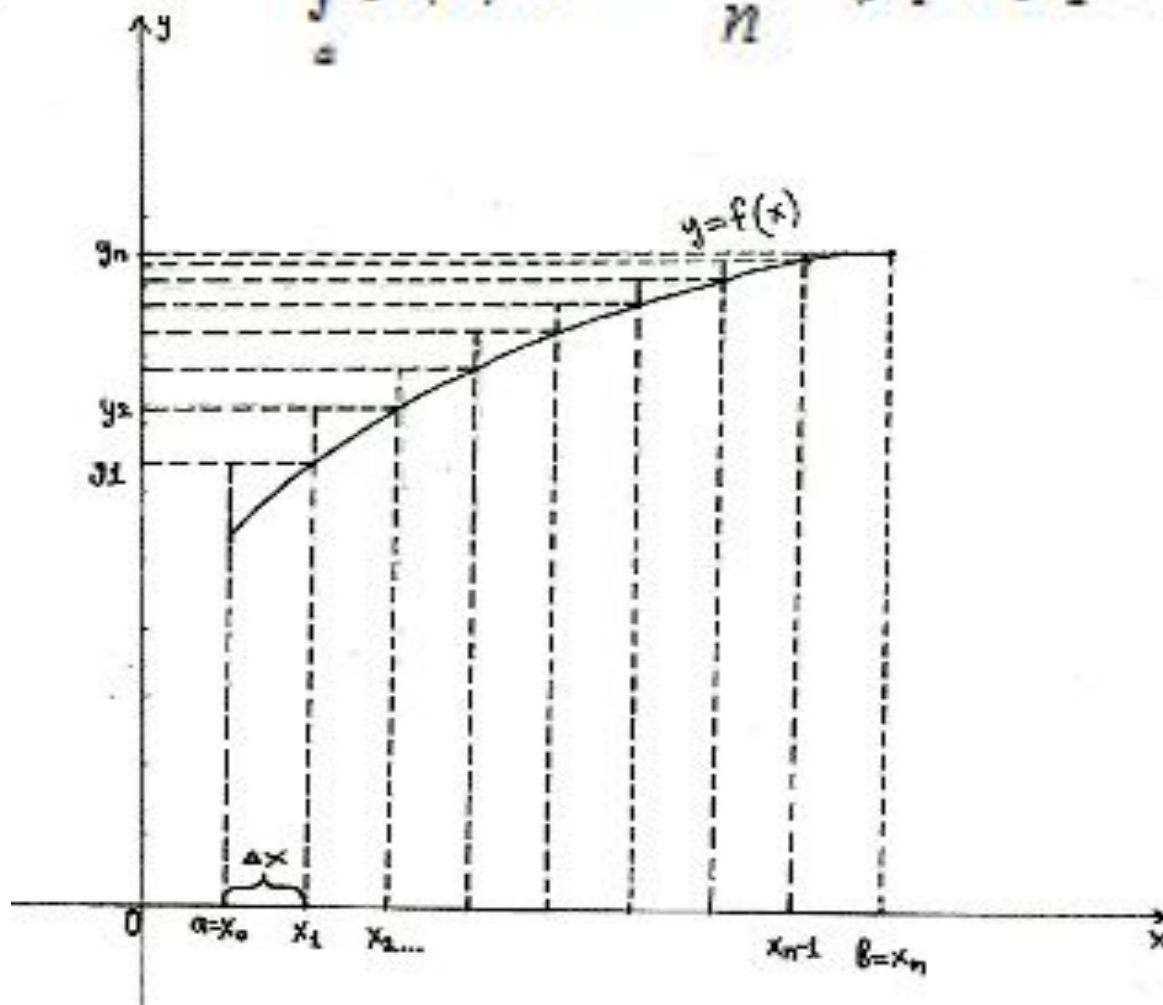
$$\int_a^b f(x) dx \approx \frac{b-a}{n} (y_0 + y_1 + \dots + y_{n-1})$$



Площадь с избытком

$$\int_a^b f(x) dx$$

$$\int_a^b f(x) dx \approx \frac{b-a}{n} (y_1 + y_2 + \dots + y_n)$$



Значения y_0, y_1, \dots, y_n находят из равенств $y_k = f(a + k\Delta x)$ где $k = 0, 1, \dots, n$. Эти формулы называются *формулами прямоугольников* и дают приближённый результат. С увеличением n результат становится более точным.

Алгоритм вычисления

Чтобы найти приближённое значение интеграла $\int_a^b f(x) dx$, нужно:

1. разделить отрезок интегрирования $[a, b]$ на n равных частей точками $x_0 = a, x_1, x_2, \dots, x_{n-1}, x_n = b$; $y = f(x)$
2. вычислить значения подынтегральной функции $f(x)$ в точках деления, т.е. найти $y_0 = f(x_0), y_1 = f(x_1), y_2 = f(x_2), \dots, y_{n-1} = f(x_{n-1}), y_n = f(x_n)$;
3. воспользоваться одной из приближённых формул.
4. Для того, чтобы найти погрешность вычислений, надо воспользоваться формулам

$$\Delta = |A_{\text{точн}} - A_{\text{прибл}}| \quad \delta = \frac{\Delta}{|A_{\text{точн}}|} \cdot 100\%$$

Пример:

- Задание: Вычислить по формуле прямоугольников определенный интеграл $\int_2^5 x^2 dx$
- Найти абсолютную и относительную погрешности вычислений.

Решение:

- Разобьём отрезок $[a, b]$ на несколько (например, на 6) равных частей. Тогда $a = 2$, $b = 5$,
- $x_k = a + k * \Delta x$
 $x_0 = 2 + 0 * \frac{1}{2} = 2$
 $x_1 = 2 + 1 * \frac{1}{2} = 2,5$
 $x_2 = 2 + 2 * \frac{1}{2} = 3$
 $x_3 = 2 + 3 * \frac{1}{2} = 3,5$
 $x_4 = 2 + 4 * \frac{1}{2} = 4$
 $x_5 = 2 + 5 * \frac{1}{2} = 4,5$

- $f(x_0) = 2^2 = 4$
 $f(x_1) = 2,5^2 = 6,25$
 $f(x_2) = 3^2 = 9$
 $f(x_3) = 3,5^2 = 12,25$
 $f(x_4) = 4^2 = 16$
 $f(x_5) = 4,5^2 = 20,25.$

- По формул $\int_0^3 x^2 dx \approx \frac{1}{2} \cdot (4 + 6,25 + 9 + 12,25 + 16 + 20,25) = \frac{1}{2} \cdot 67,75 = 33,875$

- Для того, чтобы вычислить относительную погрешность вычислений, надо найти точное значение интеграла:

$$\int_2^5 x^2 dx = \frac{x^3}{3} \Big|_2^5 = \frac{5^3}{3} - \frac{2^3}{3} = \frac{125}{3} - \frac{8}{3} = 39$$

$$\Delta = |39 - 33,875| = 5,125 \quad \delta = \frac{5,125}{39} \cdot 100\% \approx 13,14\%$$

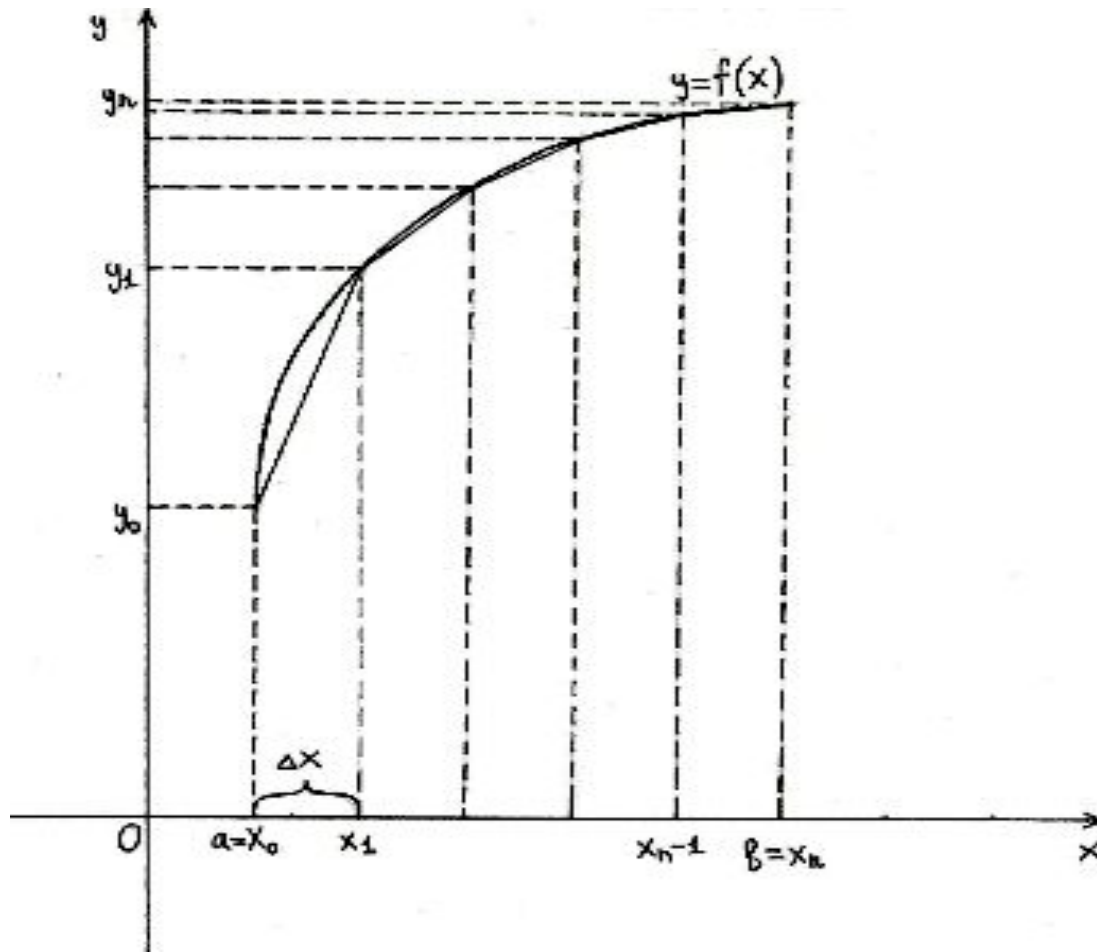
Метод трапеций

- В этом методе отрезок $[a;b]$ так же разбивается на n -равных частей. На каждом отрезке $[x_i; x_{i+1}]$ кривая $y = f(x)$ заменяется прямой, проходящей через две известные точки с координатами $(x_i; f(x_i))$ и $(x_{i+1}; f(x_{i+1}))$, где $i=0, 1, \dots, n$ и строится прямоугольная трапеция с высотой $h = \frac{(b-a)}{n}$

Метод трапеций

$$\int_a^b f(x) dx$$

$$\int_a^b f(x) dx \approx \frac{b-a}{n} \left(\frac{y_0 + y_n}{2} + y_1 + \dots + y_{n-1} \right)$$



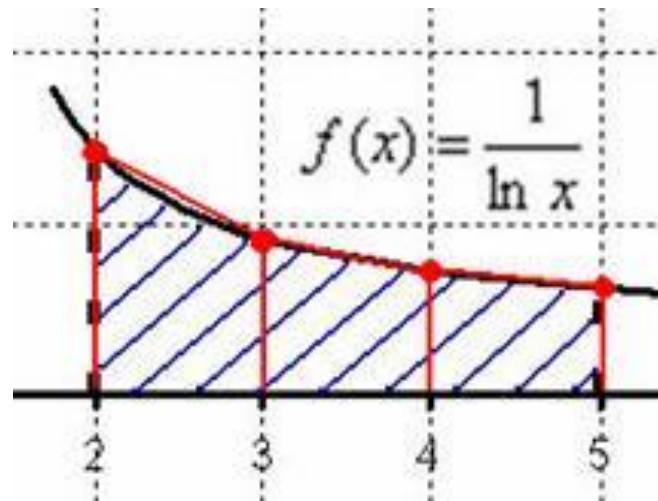
Алгоритм вычисления

- Рассмотрим определенный интеграл $\int_a^b f(x) dx$, где $f(x)$ – функция, непрерывная на отрезке $[a;b]$. Проведём разбиение отрезка на n равных отрезков: $[x_0;x_1], [x_1;x_2], [x_2;x_3], \dots, [x_{n-1}; x_n]$,
- При этом, очевидно: $x_0 = a$ (нижний предел интегр.) и $x_n = b$ (верхний предел интегр.). Точки $x_0, x_1, x_2, x_3, \dots, x_{n-1}, x_n$ также называют узлами. Тогда определенный интеграл можно вычислить приближенно по формуле трапеций

$$\int_a^b f(x) dx \approx \frac{b-a}{n} \left(\frac{y_0 + y_n}{2} + y_1 + \dots + y_{n-1} \right)$$

Пример:

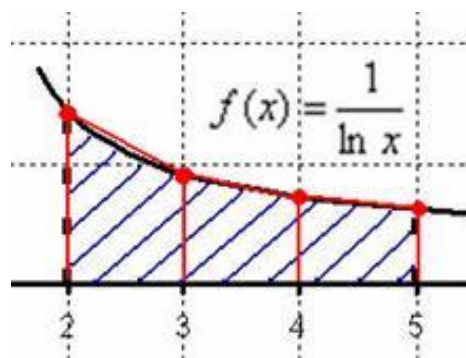
- Задание: Вычислить приближенно определенный интеграл по формуле трапеций, разбив отрезок интегрирования на 3 части. Результаты округлить до трёх знаков после запятой.



Решение:

$$h = \frac{(b-a)}{n} = \frac{5-2}{3} = 1$$

$$x_0 = 2 \quad x_1 = x_0 + h = 2 + 1 = 3 \quad x_2 = x_1 + h = 3 + 1 = 4 \quad x_3 = x_2 + h = 4 + 1 = 5$$



$$f(x_0) = f(2) = \frac{1}{\ln 2} \approx 1,443$$

$$f(x_1) = f(3) = \frac{1}{\ln 3} \approx 0,910$$

$$f(x_2) = f(4) = \frac{1}{\ln 4} \approx 0,721$$

$$f(x_3) = f(5) = \frac{1}{\ln 5} \approx 0,621$$

$$I_3 = \int_2^5 \frac{dx}{\ln x} \approx 1 \cdot \left[\frac{f(x_0) + f(x_3)}{2} + f(x_1) + f(x_2) \right] = \frac{1,443 + 0,621}{2} + 0,910 + 0,721 = 2,664$$