Приближённое вычисление определённого интеграла по формулам прямоугольников и трапеций.

Оценка погрешности вычислений.

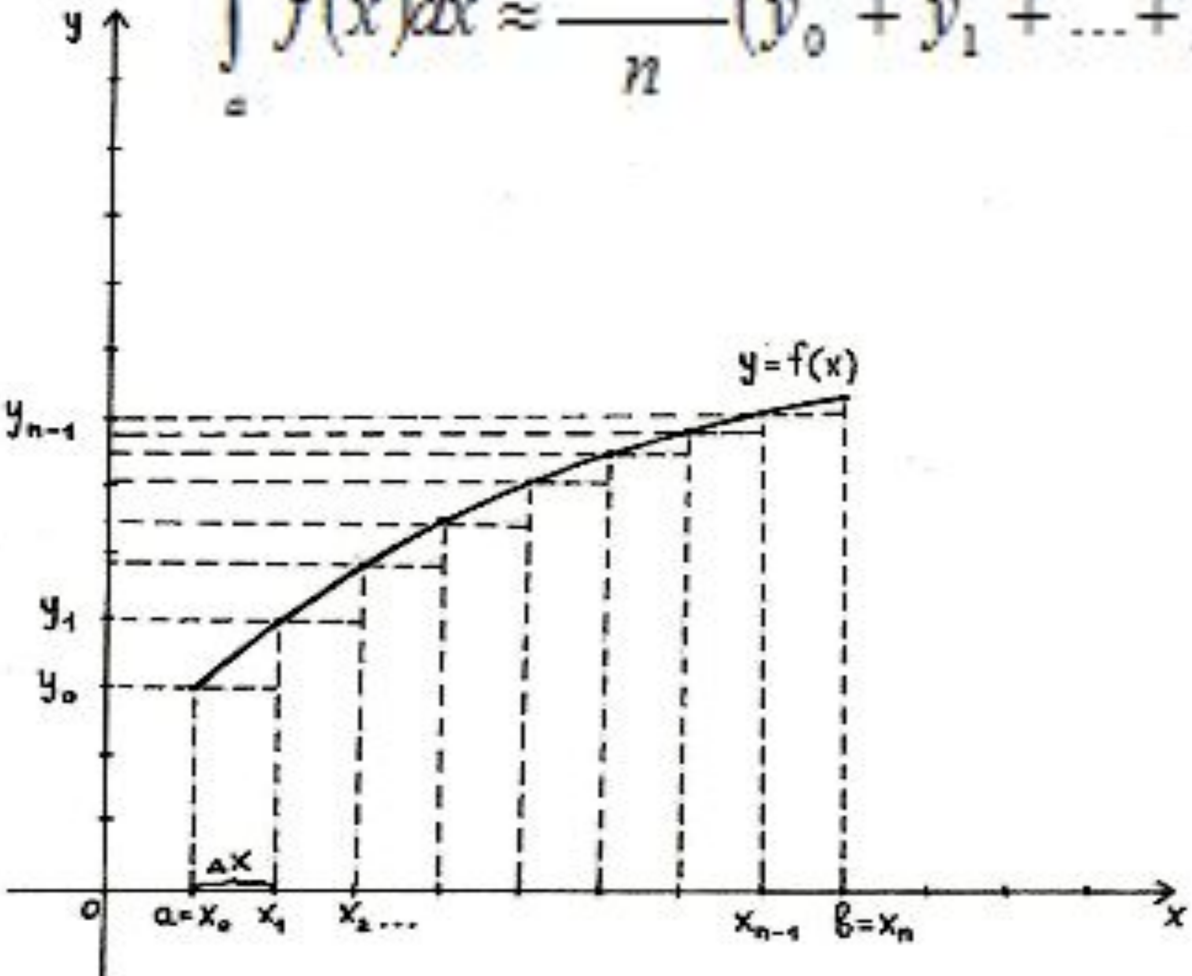
Метод прямоугольников

- Геометрически идея способа вычисления определённого интеграла по формуле прямоугольников состоит в том, что площадь криволинейной трапеции ABCD заменяется суммой площадей прямоугольников, одна сторон $\frac{b-a}{n}$ торых равн $f(x_n)$, а другая -

Площадь с недостатком

$$\int_a^b f(x)dx$$

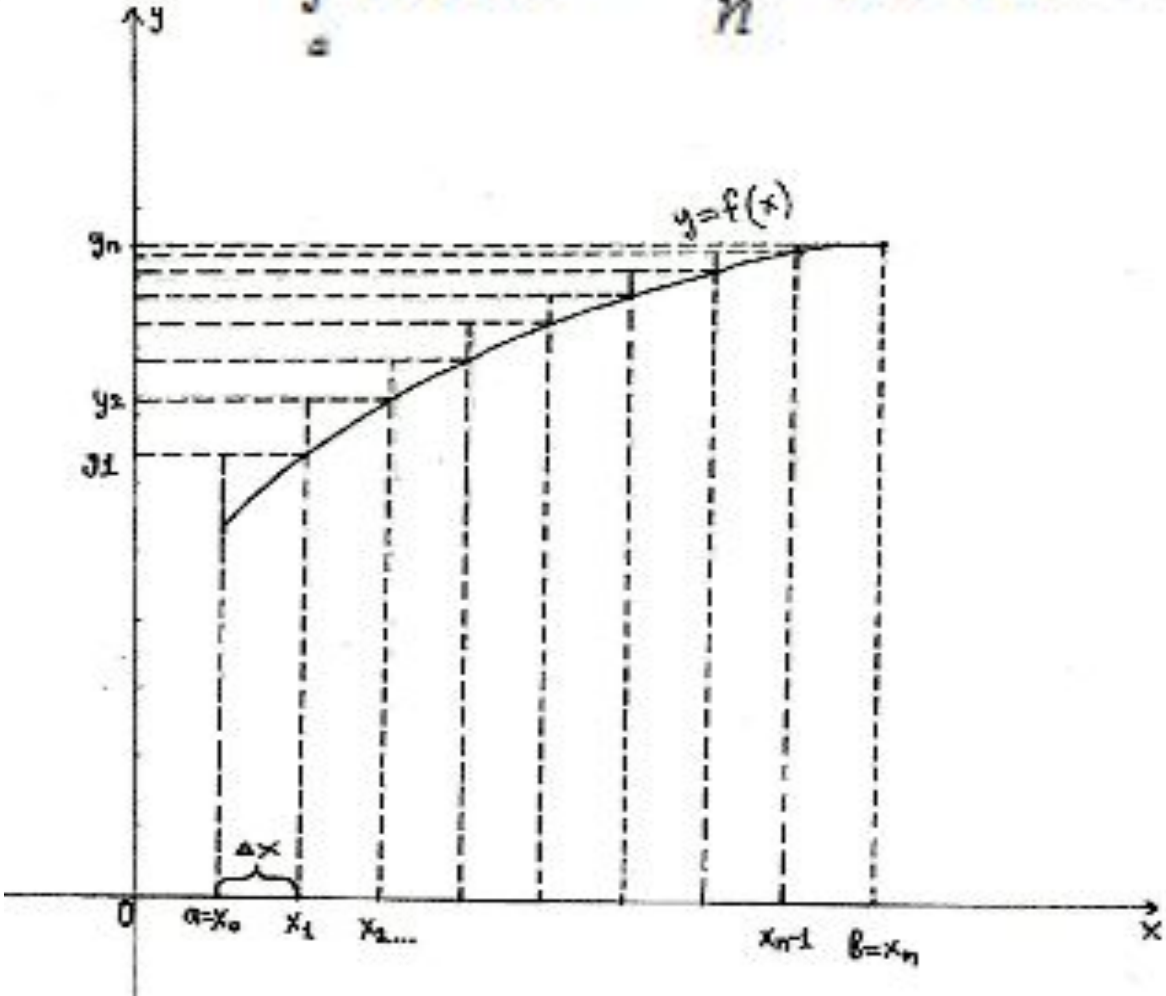
$$\int_a^b f(x)dx \approx \frac{b-a}{n}(y_0 + y_1 + \ldots + y_{n-1})$$



Площадь с избытком

$$\int_a^b f(x)dx$$

$$\int_a^b f(x)dx \approx \frac{b-a}{n}(y_1 + y_2 + \ldots + y_n)$$



Значения $y_0, y_1, ..., y_n$ находят из равенств $y_k = f(a + k\Delta x)$ где $к = 0, 1..., n$. Эти формулы называются *формулами прямоугольников* и дают приближённый результат. С увеличением n результат становится более точным.

Алгоритм вычисления

Чтобы найти приближённое значение интегра $\int_a^b f(x)dx$, нужно:

1. разделить отрезок интегрирования $[a, b]$ на n р[illegible]х частей точками $x_0 = a, x_1, x_2, ..., x_{n-1}, x_n = b$;
2. вычислить значения подынтегральной функции $y = f(x)$ в точках деления, т.е. найти $y_0 = f(x_0), y_1 = f(x_1), y_2 = f(x_2), y_{n-1} = f(x_{n-1}), y_n = f(x_n)$;
3. воспользоваться одной из приближённых формул.
4. Для того, чтобы найти погрешность вычислений, надо вос[illegible]мулам

$$\Delta = |A_{точн} - A_{прибл}| \qquad \delta = \frac{\Delta}{|A_{точн}|} \cdot 100\%$$

Пример:

- Задание: Вычислить по формуле прямоугольников определенный интеграл $\int_2^5 x^2 dx$
- Найти абсолютную и относительную погрешности вычислений.

Решение:

- Разобьём отрезок [a, b] на несколько (например, на 6) равных частей. Тогда $a = 2$, $b = 5$,
- $x_k = a + k*\Delta x$
  $x_0 = 2 + 0*½ = 2$
  $x_1 = 2 + 1*½ = 2,5$
  $x_2 = 2 + 2*½ =3$
  $x_3 = 2 + 3*½ = 3,5$
  $x_4 = 2 + 4*½ = 4$
  $x_5 = 2 + 5 *½ = 4,5$

- $f(x_0) = 2^2 = 4$
  $f(x_1) = 2{,}5^2 = 6{,}25$
  $f(x_2) = 3^2 = 9$
  $f(x_3) = 3{,}5^2 = 12{,}25$
  $f(x_4) = 4^2 = 16$
  $f(x_5) = 4{,}5^2 = 20{,}25.$
- По формул $\int_0^3 x^2 dx \approx \frac{1}{2} \cdot (4 + 6{,}25 + 9 + 12{,}25 + 16 + 20{,}25) = \frac{1}{2} \cdot 67{,}75 = 33{,}875$
- Для того, чтобы вычислить относительную погрешность вычислений, надо найти точное значение интеграла:

$$\int_2^5 x^2 dx = \left.\frac{x^3}{3}\right|_2^5 = \frac{5^3}{3} - \frac{2^3}{3} = \frac{125}{3} - \frac{8}{3} = 39$$

$$\Delta = |39 - 33{,}875| = 5{,}125 \qquad \delta = \frac{5{,}125}{39} \cdot 100\% \approx 13{,}14\%$$

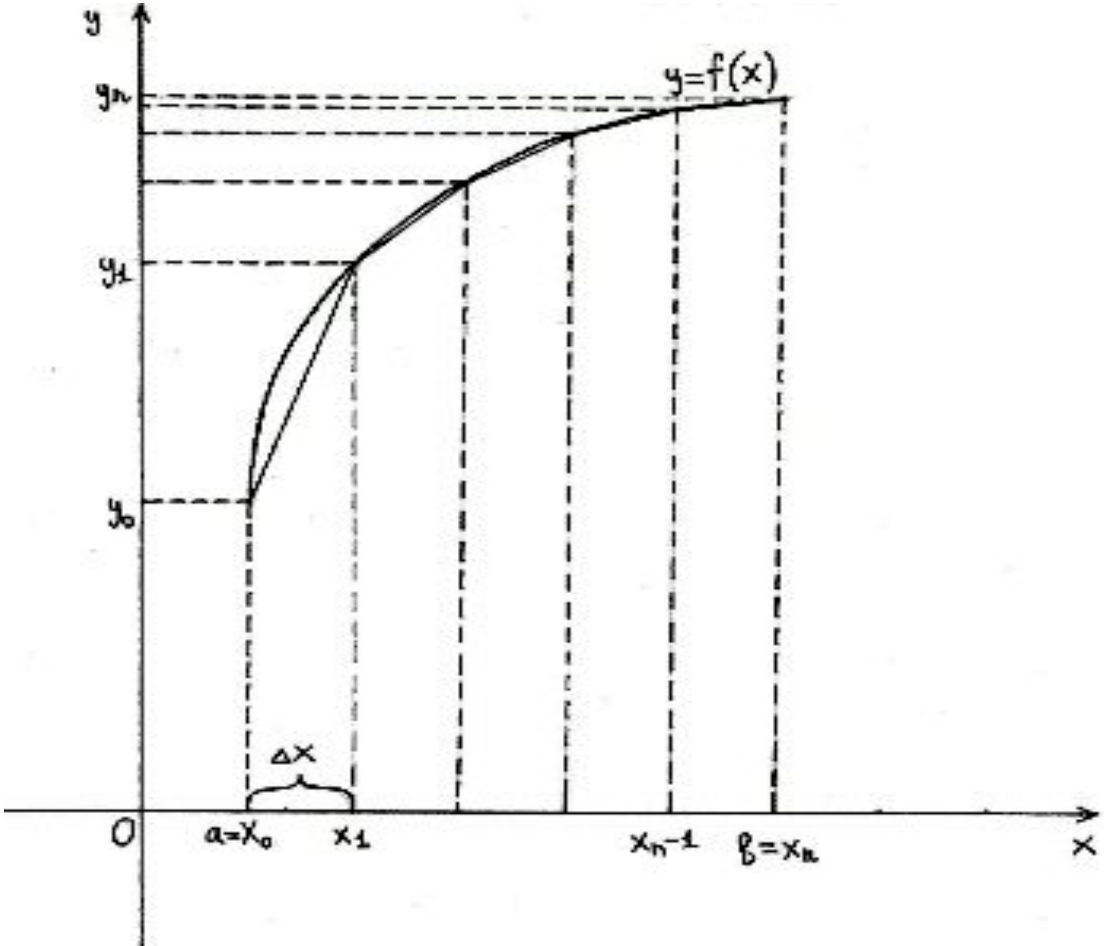
Метод трапеций

- В этом методе отрезок [$a;b$] так же разбивается на n-равных частей. На каждом отрезке [$xi; xi+1$] кривая $y = f(x)$ заменяется прямой, проходящей через две известные точки с координатами (x_i ;$f(x_i)$) и (x_{i+1} ;$f(x_{i+1})$), где $i=0,1,\ldots,n$ и строится прямоугольная трапеция с высотой $h = \frac{(b-a)}{n}$

Метод трапеций

$$\int_a^b f(x)dx$$

$$\int_a^b f(x)dx \approx \frac{b-a}{n}\left(\frac{y_0+y_n}{2}+y_1+\ldots+y_{n-1}\right)$$



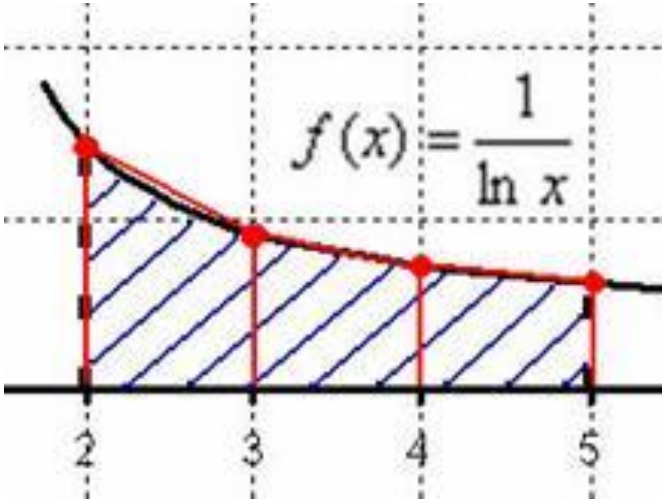
Алгоритм вычисления

- Рассмотрим определенный интеграл $I=\int_a^b f(x)dx$, где f(x) – функция, непрерывная на отрезке [a;b]. Проведём разбиение отрезка на n равных отрезков: $[x_0;x_1]$, $[x_1;x_2]$, $[x_2;x_3]$,…, $[x_{n-1}; x_n]$,
- При этом, очевидно: x_n =a (нижний предел интегр.) и x_n =b (верхний предел интегр.). Точки x_0, x_1, x_2, x_3,…, x_{n-1}, x_n также называют узлами. Тогда определенный интеграл можно вычислить приближенно по формуле трапеций

$$\int_a^b f(x)dx \approx \frac{b-a}{n}\left(\frac{y_0+y_n}{2}+y_1+\ldots+y_{n-1}\right)$$

Пример:

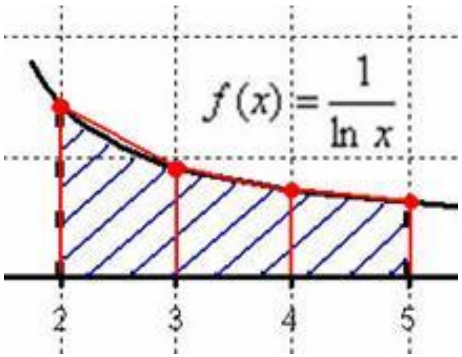
- <u>Задние:</u> Вычислить приближенно определенный интеграл $I=\int_{2}^{5}\frac{dx}{\ln x}$ по формуле трапеций, разбив отрезок интегрирования на 3 части. Результаты округлить до трёх знаков после запятой.



Решение:

$$h = \frac{(b-a)}{n} = \frac{5-2}{3} = 1$$

$x_0 = 2 \qquad x_1 = x_0 + h = 2+1 = 3 \qquad x_2 = x_1 + h = 3+1 = 4 \qquad x_3 = x_2 + h = 4+1 = 5$



$$f(x_0) = f(2) = \frac{1}{\ln 2} \approx 1{,}443$$

$$f(x_1) = f(3) = \frac{1}{\ln 3} \approx 0{,}910$$

$$f(x_2) = f(4) = \frac{1}{\ln 4} \approx 0{,}721$$

$$f(x_3) = f(5) = \frac{1}{\ln 5} \approx 0{,}621$$

$$I_3 = \int_2^5 \frac{dx}{\ln x} \approx 1 \cdot \left[\frac{f(x_0)+f(x_3)}{2} + f(x_1) + f(x_2) \right] = \frac{1{,}443+0{,}621}{2} + 0{,}910 + 0{,}721 = 2{,}664$$