Алгоритмы раскраски графа

Необходимо раскрасить вершины графа таким образом, чтобы смежные вершины были окрашены в разные цвета.

Минимальное число красок, в которые можно раскрасить граф называется *хроматическим числом графа.*

Задача раскраски вершин графа относится к NP-полным задачам. Различают точные и приближенные алгоритмы раскраски.

Примером точных алгоритмов служит алгоритм Вейссмана.

Алгоритм состоит из двух частей:

1. Построение семейства максимальных внутренне устойчивых множеств (МВУМ) (метод Магу);
2. Выбор минимального числа МВУМ, покрывающих все вершины графа (метод Петрика).

Множество вершин X_s графа $G(X,U)$ называется *внутренне устойчи-вым* (*независимым*), если никакие две вершины из этого множества не смежны, $X_s \subset X$ $[\Gamma X_s \cap X_s = \varnothing]$. Внутренне устойчивое множество называется *максимальным,* если оно не является собственным подмножеством некоторого другого

1. В матрице соединений R для каждой вершины подсчитывается число ненулевых элементов r_i;

2. Находится вершина x_i с $\max r_i$, если таких вершин несколько, то выбирается любая;

3. Для выбранной вершины x_i записывается выражение $C_i = (x_i \vee x_a x_b \ldots x_q)$, где $\Gamma x_i = \{x_a, x_b, \ldots, x_q\}$;

4. Из матрицы R удаляются строка и столбец, соответствующие вершине x_i;

5. Если $R \neq \varnothing$, то переход к п. 2, иначе к п. 6;

6. Составляется конъюнкция $\Pi = \bigwedge C_i$. Раскрываются скобки. В полученной дизъюнкции на основе законов булевой алгебры выполняется минимизация.

7. Результат минимизации записывается в виде $\Pi = \bigvee K_j$;

8. Для каждого K_j ищутся вершины графа, не вошедшие в него. Получено ϕ_j и семейство МВУМ $\Psi = \{\phi_1, \phi_2, \ldots, \phi_l\}$;

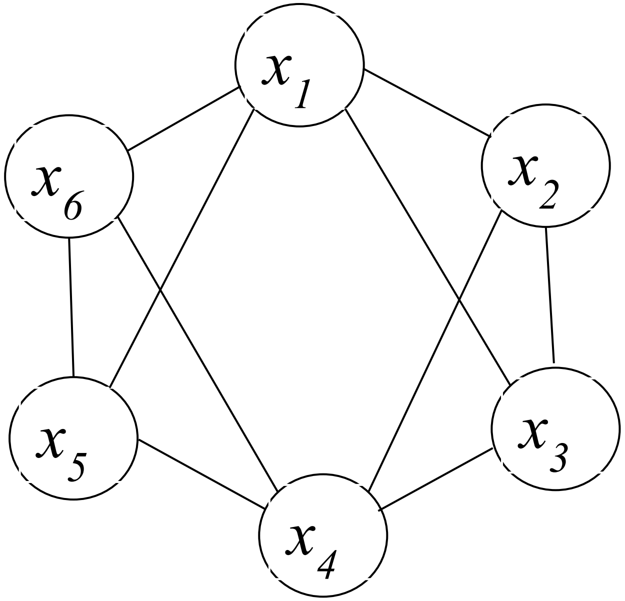
9. Для каждой вершины $x_i \in X$ определяются подмножества ϕ_j, в которые входит вершина $x_i \in \phi_j$. Составляется дизъюнкция $t_i = \bigvee \phi_j$;

10. Составляется конъюнкция $П' = \bigwedge t_i$. Раскрываются скобки. В полученной дизъюнкции на основе законов булевой алгебры выполняется минимизация;

11. Получена дизъюнкция конъюнктивных термов $П' = \bigvee(\bigwedge \phi_j)$. Выбирается конъюнктивный терм $\bigwedge \phi_j$ с минимальным числом сомножителей.

Количество сомножителей в этом терме и есть хроматическое число графа. Число минимальных термов – число вариантов раскраски графа. А каждое ϕ_j – множество вершин, которые можно окрасить в один цвет.

Заметим, что п.п. 1-8 составляют метод Магу, а п.п. 9-11 – метод Петрика.



$$
R = \begin{array}{c|cccccc|c}
 & x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & x_5 & x_6 & r_i \\
\hline
x_1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 4 \\
x_2 & & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 3 \\
x_3 & & & 0 & 1 & 0 & 0 & 3 \\
x_4 & & & & 0 & 1 & 1 & 4 \\
x_5 & & & & & 0 & 1 & 3 \\
x_6 & & & & & & 0 & 3
\end{array}
$$

1. В матрице R подсчитываем число ненулевых элементов r_i;
2. $\max r_i = r_1 = r_4 = 4$, выбираем x_1;
3. $\Gamma x_1 = \{x_2, x_3, x_5, x_6\}$, записываем выражение

   $$C_1 = (x_1 \vee x_2 x_3 x_5 x_6);$$

4. Из матрицы R удаляем строку и столбец, соответствующие вершине x_1;

$$R = \begin{array}{c|ccccc|c} & x_2 & x_3 & x_4 & x_5 & x_6 & r_i \\ \hline x_2 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 2 \\ x_3 & & 0 & 1 & 0 & 0 & 2 \\ x_4 & & & 0 & 1 & 1 & 4 \\ x_5 & & & & 0 & 1 & 2 \\ x_6 & & & & & 0 & 2 \end{array}$$

5. $R \neq \varnothing$, $\max r_i = r_4 = 4$;
$\Gamma x_4 = \{x_2, x_3, x_5, x_6\}$,
$C_4 = (x_4 \vee x_2 x_3 x_5 x_6)$;

6. Из матрицы R удаляем строку и столбец, соответствующие вершине x_4;

$$R = \begin{array}{c|cccc|c} & x_2 & x_3 & x_5 & x_6 & r_i \\ \hline x_2 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ x_3 & & 0 & 0 & 0 & 1 \\ x_5 & & & 0 & 1 & 1 \\ x_6 & & & & 0 & 1 \end{array}$$

7. $R \neq \varnothing$, $\max r_i = r_2 = r_3 = r_5 = r_6 = 1$, выбираем x_2;
$\Gamma x_2 = \{x_3\}$, $C_2 = (x_2 \vee x_3)$;

8. Из матрицы R удаляем строку и столбец, соответствующие вершине x_2;

$$R = \begin{array}{c|ccc|c} & x_3 & x_5 & x_6 & r_i \\ \hline x_3 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ x_5 & & 0 & 1 & 1 \\ x_6 & & & 0 & 1 \end{array}$$

9. $R \neq \varnothing$, $\max r_i = r_5 = r_6 = 1$, выбираем x_5;
$\Gamma x_5 = \{x_6\}$, $C_5 = (x_5 \vee x_6)$;

$$R = \begin{array}{c|cc|c} & x_3 & x_6 & r_i \\ \hline x_3 & 0 & 0 & 0 \\ x_6 & & 0 & 0 \end{array}$$

10 . Из матрицы R удаляем строку и столбец, соответствующие вершине x_5;

11. $R = \varnothing$;

12. Составляем конъюнкцию C_i и выполняем минимизацию

$\Pi = \bigwedge C_i = C_1\, C_2\, C_4\, C_5 = (x_1 \vee x_2\, x_3\, x_5\, x_6)(x_2 \vee x_3)(x_4 \vee x_2\, x_3\, x_5\, x_6)(x_5 \vee x_6) =$

$= x_1\, x_2\, x_4\, x_5 \vee x_1\, x_2\, x_4\, x_6 \vee x_1\, x_3\, x_4\, x_5 \vee x_1\, x_3\, x_4\, x_6 \vee x_2\, x_3\, x_5\, x_6 = \bigvee K_j =$

$= K_1 \vee K_2 \vee K_3 \vee K_4 \vee K_5;$

13. Для каждого K_j ищем ϕ_j:

$\phi_1 = \{x_3, x_6\}$, $\phi_2 = \{x_3, x_5\}$, $\phi_3 = \{x_2, x_6\}$, $\phi_4 = \{x_2, x_5\}$, $\phi_5 = \{x_1, x_4\}$. Получено семейство МВУМ Ψ;

14. Для каждой вершины определим подмножества ϕ_j, в которые она входит. Строим дизъюнкцию $t_i = \bigvee \phi_j$;

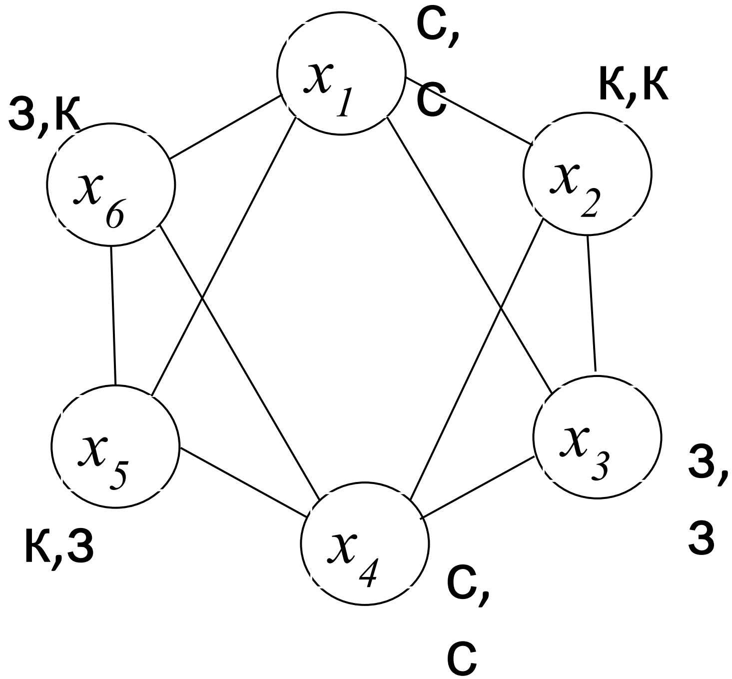
$t_1 = \phi_5$; $t_2 = \phi_3 \vee \phi_4$; $t_3 = \phi_1 \vee \phi_2$; $t_4 = \phi_5$; $t_5 = \phi_2 \vee \phi_4$; $t_6 = \phi_1 \vee \phi_3$;

15. Составляем конъюнкцию и выполняем минимизацию булевой функции

$\Pi' = \bigwedge t_i = t_1\, t_2\, t_3\, t_4\, t_5\, t_6 = \phi_5(\phi_3 \vee \phi_4)(\phi_1 \vee \phi_2)\, \phi_5(\phi_2 \vee \phi_4)(\phi_1 \vee \phi_3) =$

$= \phi_1\phi_4\phi_5 \vee \phi_2\phi_3\phi_5$

Хроматическое число графа $\chi(G) = 3$. Существует два варианта раскраски графа.



$\phi_1 = \{x_3, x_6\}$, $\phi_2 = \{x_3, x_5\}$, $\phi_3 = \{x_2, x_6\}$,
$\phi_4 = \{x_2, x_5\}$, $\phi_5 = \{x_1, x_4\}$.

$\phi_1\phi_4\phi_5 \vee \phi_2\phi_3\phi_5$

Недостатком точных алгоритмов является низкое быстродействие. Поэтому на практике используют приближенные алгоритмы, примером которых может служить

Алгоритм, использующий упорядочивание вершин

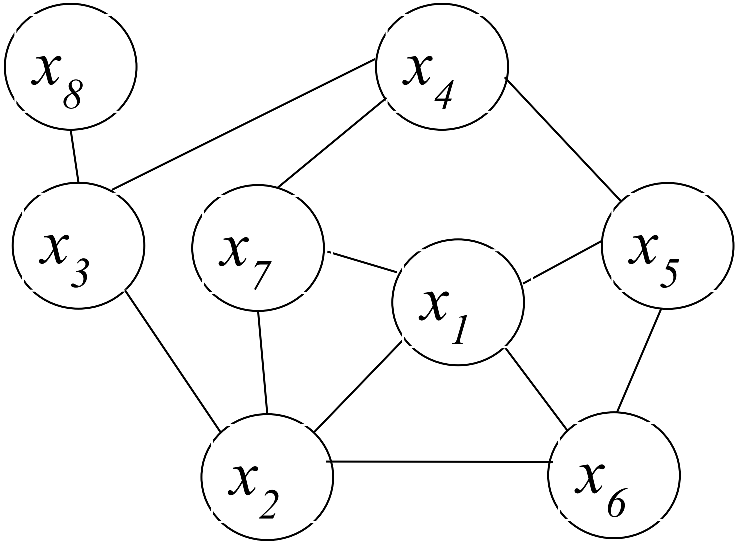
1. Положить $j = 1$;

2. В матрице R подсчитываем число ненулевых элементов r_i;

3. Упорядочим вершины графа в порядке не возрастания r_i.;

4. Просматривая последовательность слева направо, красить в цвет j каждую неокрашенную вершину, не смежную с уже окрашенными в этот цвет;

5. Если остались неокрашенные вершины, то удалить из матрицы R строки и столбцы, соответствующие окрашенным вершинам. Положить $j = j + 1$ и перейти к п. 2, иначе, задача решена.



$$R = \begin{array}{c|cccccccc|c}
 & x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & x_5 & x_6 & x_7 & x_8 & r_i \\
\hline
x_1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 4 \\
x_2 & & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 4 \\
x_3 & & & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 3 \\
x_4 & & & & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 3 \\
x_5 & & & & & 0 & 1 & 0 & 0 & 3 \\
x_6 & & & & & & 0 & 0 & 0 & 3 \\
x_7 & & & & & & & 0 & 0 & 3 \\
x_8 & & & & & & & & 0 & 1
\end{array}$$

1. Положим $j = 1$;

2. Упорядочим вершины графа в порядке не возрастания r_i.
$x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6, x_7, x_8$;

3. Красим в первый цвет вершины x_1 и x_3. Вершины x_4, и x_8 смежны вершине x_3, остальные – смежны вершине x_1;

4. Остались неокрашенные вершины, поэтому удалим из матрицы R строки и столбцы, соответствующие вершинам x_1 и x_3. Положим
$j = j + 1 = 2$.

$R =$

	x_2	x_4	x_5	x_6	x_7	x_8	r_i
x_2	0	0	0	1	1	0	2
x_4		0	1	0	1	0	2
x_5			0	1	0	0	2
x_6				0	0	0	2
x_7					0	0	2
x_8						0	0

5. Упорядочим вершины графа в порядке не возрастания r_i:

$x_2, x_4, x_5, x_6, x_7, x_8$;

6. Красим во второй цвет вершины x_2, x_4 и x_8. Вершины x_5 и x_7, смежны вершине x_4, вершина x_6 смежна вершине x_2;

$R =$

	x_5	x_6	x_7	r_i
x_5	0	1	0	1
x_6		0	0	1
x_7			0	0

7. Остались неокрашенные вершины, удалим из матрицы *R* строки и столбцы, соответствующие вершинам x_2, x_4 и x_8. Положим $j = j + 1 = 3$.

8. Упорядочим вершины графа в r_i: x_5, x_6, x_7.

9. Красим в третий цвет вершины x_5 и x_7. Вершины x_6 и x_5 смежны;

10. Осталась неокрашенная вершина, удалим из матрицы *R* строки и столбцы, соответствующие вершинам x_5 и x_7. Положим $j = j + 1 = 4$.

11. В четвертый цвет окрашиваем вершину x_6.

Все вершины окрашены.

Достоинство алгоритма – быстродействие. Недостаток – не оптимальность.

Для раскраски вершин графа приближенным алгоритмом потребовалось четыре цвета. А хроматическое число графа $\chi(G) = 3$.

Действительно, если в первый цвет окрасить вершины x_1, x_4 и x_8, во второй – x_2 и x_5, то в третий можно окрасить оставшиеся вершины x_3, x_6 и x_7.

Кратчайшие пути

Пусть дан граф *G(X, Г),* ребрам которого приписаны веса, заданные матрицей $C=||c_{ij}||_{m\times m}$. *Задача о кратчайшем пути* состоит в нахождении пути с минимальным суммарным весом от начальной вершины $s\in X$ до конечной $t\in X$ или от начальной вершины $s\in X$ до всех остальных, при условии, что такие пути существуют.

Рассмотрим алгоритм Дейкстры. Он основан на приписывании вер-шинам временных пометок, дающих верхнюю границу длины пути от *s* к этой вершине. Эти пометки постепенно уточняются, и на каж-дом шаге итерации точно одна из временных пометок становится постоянной. Это указывает на то, что пометка уже не является верхней границей, а дает точную длину кратчайшего пути от *s* к рассматриваемой вершине.

Алгоритм работает только для графов без ребер отрицательного веса.

Пусть $l(x_i)$ пометка вершины x_i, а $l(x_i)^+$ - постоянная пометка вершины.

1. Положить $l(s)=0^+$ и считать эту пометку постоянной. Положить $l(x_i)=\infty$ для всех $x_i \neq s$ и считать их временными. Положить $p=s$.

2. Для всех $x_i \in \Gamma p$, пометки которых временные, изменить пометки в соответствии со следующим выражением

$$l(x_i) = min[l(x_i), l(p) + c(p,x_i)].$$

3. Среди всех вершин с временными пометками найти такую, для которой $l(x_i^*) = min[l(x_i)]$.

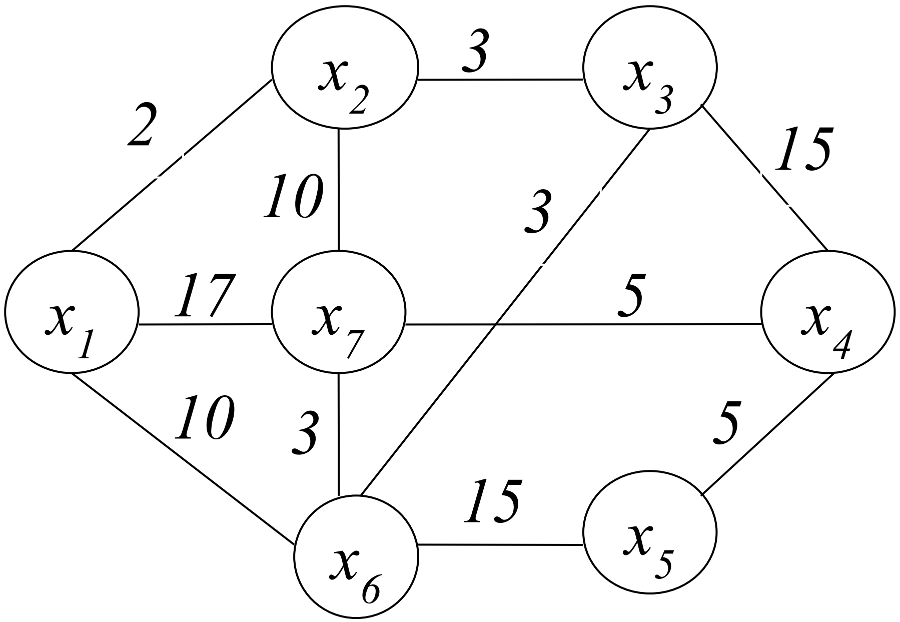
4. Считать пометку вершины x_i^* постоянной $l(x_i^*)^+$ и положить $p= x_i^*$.

5. (Если надо найти лишь путь от s до t).
Если $p=t$, то $l(p)$ – длина кратчайшего пути, конец. Если $p \neq t$, перейти к п.2.

6. (Если надо найти путь от s до всех остальных вершин).
Если все вершины имеют постоянные пометки, то конец, если есть временные пометки, то перейти к п.2.

Сами пути можно получить при помощи рекурсивной процедуры с использованием соотношения: $l(x_i') + c(x_i', x_i)= l(x_i)$, где x_i' – вершина, непосредственно предшествующая вершине x_i в кратчайшем пути от s к x_i.

Заданы взвешенный граф $G(X,\Gamma)$ и матрица весов $C=\|c_{ij}\|_{7\times 7}$.
Необходимо найти кратчайшие пути от начальной вершины x_1 ко всем остальным вершинам.



$$C=\begin{array}{c|ccccccc|} & x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & x_5 & x_6 & x_7 \\ \hline x_1 & 0 & 2 & & & & 10 & 17 \\ x_2 & 2 & 0 & 3 & & & & 10 \\ x_3 & & 3 & 0 & 15 & & 3 & \\ x_4 & & & 15 & 0 & 5 & & 5 \\ x_5 & & & & 5 & 0 & 15 & \\ x_6 & 10 & & 3 & & 15 & 0 & 3 \\ x_7 & 17 & 10 & & 5 & & 3 & 0 \end{array}$$

1. $l(x_1)=0^+$; $l(x_i)=\infty$, для всех $i \neq 1$, $p = x_1$.
Результаты итерации запишем в таблицу.

$L=$

	1
x_1	0^+
x_2	∞
x_3	∞
x_4	∞
x_5	∞
x_6	∞
x_7	∞

$L=$

	1	2
x_1	0^+	
x_2	∞	2^+
x_3	∞	∞
x_4	∞	∞
x_5	∞	∞
x_6	∞	10
x_7	∞	17

$L=$

	1	2	3
x_1	0^+		
x_2	∞	2^+	
x_3	∞	∞	5^+
x_4	∞	∞	∞
x_5	∞	∞	∞
x_6	∞	10	10
x_7	∞	17	12

2. $Гр = \{x_2, x_6, x_7\}$ – все пометки временные, уточним их:

$l(x_2)=min[\infty, 0^+ +2]=2;$

$l(x_6)=min[\infty, 0^+ +10]=10;$

$l(x_7)=min[\infty, 0^+ +17]=17.$

3. $l(x_i^*) = min[l(x_i)] = l(x_2) = 2.$

4. x_2 получает постоянную пометку $l(x_2) = 2^+$,

$p=x_2$.

5. Не все вершины имеют постоянные пометки, $Гр = \{x_1, x_3, x_7\}$ – временные пометки имеют вершины x_3, x_7, уточняем их:

$l(x_3)=min[\infty, 2^+ +3]=5;$ $l(x_7)=min[17, 2^+ +10]=12.$

6. $l(x_i^*) = min[l(x_i)] = l(x_3) = 5.$

7. $l(x_3) = 5^+$, $p=x_3$.

8. Не все вершины имеют постоянные пометки, $Гp =\{x_2, x_4, x_6\}$ – временные пометки имеют вершины x_4, x_6, уточняем их:

$l(x_4)=min[\infty , 5^+ +15]=20;$ $l(x_6)=min[10, 5^+ +3]=8.$

9. $l(x_i^*) = min[l(x_i)] = l(x_6) = 8.$

10. $l(x_6) = 8^+$, $p=x_6$.

11. $Гp =\{x_1, x_5, x_7\}$ – временные пометки имеют вершины x_5, x_7, уточняем их: $l(x_5)=min[\infty , 8^+ +15]=23;$ $l(x_7)=min[12, 8^+ +3]=11.$

$$L=\begin{array}{c|c|c|c|c|}
 & 1 & 2 & 3 & 4 \\
\hline
x_1 & 0^+ & & & \\
\hline
x_2 & \infty & 2^+ & & \\
\hline
x_3 & \infty & \infty & 5^+ & \\
\hline
x_4 & \infty & \infty & \infty & 20 \\
\hline
x_5 & \infty & \infty & \infty & \infty \\
\hline
x_6 & \infty & 10 & 10 & 8^+ \\
\hline
x_7 & \infty & 17 & 12 & 12 \\
\hline
\end{array}$$

$$L=\begin{array}{c|c|c|c|c|c|}
 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\
\hline
x_1 & 0^+ & & & & \\
\hline
x_2 & \infty & 2^+ & & & \\
\hline
x_3 & \infty & \infty & 5^+ & & \\
\hline
x_4 & \infty & \infty & \infty & 20 & 20 \\
\hline
x_5 & \infty & \infty & \infty & \infty & 23 \\
\hline
x_6 & \infty & 10 & 10 & 8^+ & \\
\hline
x_7 & \infty & 17 & 12 & 12 & 11^+ \\
\hline
\end{array}$$

12. $l(x_i{}^*) = min[l(x_i)] = l(x_7) = 11.$ 13. $l(x_7) = 11^+, p=x_7.$

14. Не все пометки постоянные, $Гр =\{x_1, x_2, x_4, x_6\}$ – временную пометку имеет вершина x_4, уточняем ее: $l(x_4)=min[20, 11^+ +5]=16.$

15. $l(x_i{}^*) = min[l(x_i)] = l(x_4) = 16.$ 16. $l(x_4) = 16^+, p=x_4.$

17. Не все пометки постоянные, $Гр =\{x_3, x_5, x_7\}$ – временную пометку имеет вершина x_5, уточняем ее: $l(x_5)=min[23,$ $16^+ +5]=21.$

18. $l(x_i{}^*) = l(x_5) = 21.$ 19. $l(x_5) = 21^+, p=x_5.$

20. Все пометки постоянные.

$L=$

	1	2	3	4	5	6
x_1	0^+					
x_2	∞	2^+				
x_3	∞	∞	5^+			
x_4	∞	∞	∞	20	20	16^+
x_5	∞	∞	∞	∞	23	23
x_6	∞	10	10	8^+		
x_7	∞	17	12	12	11^+	

$L=$

	1	2	3	4	5	6	7
x_1	0^+						
x_2	∞	2^+					
x_3	∞	∞	5^+				
x_4	∞	∞	∞	20	20	16^+	
x_5	∞	∞	∞	∞	23	23	21^+
x_6	∞	10	10	8^+			
x_7	∞	17	12	12	11^+		

Кратчайшие расстояния от вершины x_1 до всех вершин найдены.

Как найти кратчайший путь до конкретной вершины, покажем на примере вершины x_5.

$l(x_5) = 21$, $\Gamma x_5 = \{x_4, x_6\}$,

$21 = l(x_4) + c(x_4, x_5) = 16+5$, $21 \neq l(x_6) + c(x_6, x_5) = 8+15$.

Это означает, что в вершину x_5 мы попали из вершины x_4.

Далее, $l(x_4) = 16$, $\Gamma x_4 = \{x_3, x_5, x_7\}$, $16 \neq l(x_3) + c(x_3, x_4) = 5+15$,

$16 \neq l(x_5) + c(x_5, x_4) = 21+15$, $16 = l(x_7) + c(x_7, x_4) = 11+5$.

Это означает, что в вершину x_4 мы попали из вершины x_7.

Далее, $l(x_7) = 11$, $\Gamma x_7 = \{x_1, x_4, x_6\}$, $11 \neq l(x_1) + c(x_1, x_7) = 0+17$,

$11 \neq l(x_4) + c(x_4, x_7) = 16+5$, $11 = l(x_6) + c(x_6, x_7) = 8+3$.

Это означает, что в вершину x_7 мы попали из вершины x_6.

Далее, $l(x_6) = 8$, $\Gamma x_6 = \{x_1, x_3, x_5, x_7\}$, $8 \neq l(x_1) + c(x_1, x_6) = 0+10$,

$8 = l(x_3) + c(x_3, x_6) = 5+3$, $8 \neq l(x_5) + c(x_5, x_6) = 21+15$, $8 \neq l(x_7) + c(x_7, x_6) = 11+3$.

Это означает, что в вершину x_6 мы попали из вершины x_3.

Далее, $l(x_3) = 5$, $\Gamma x_3 = \{x_2, x_4, x_6\}$, $5 = l(x_2) + c(x_2, x_3) = 2+3$,

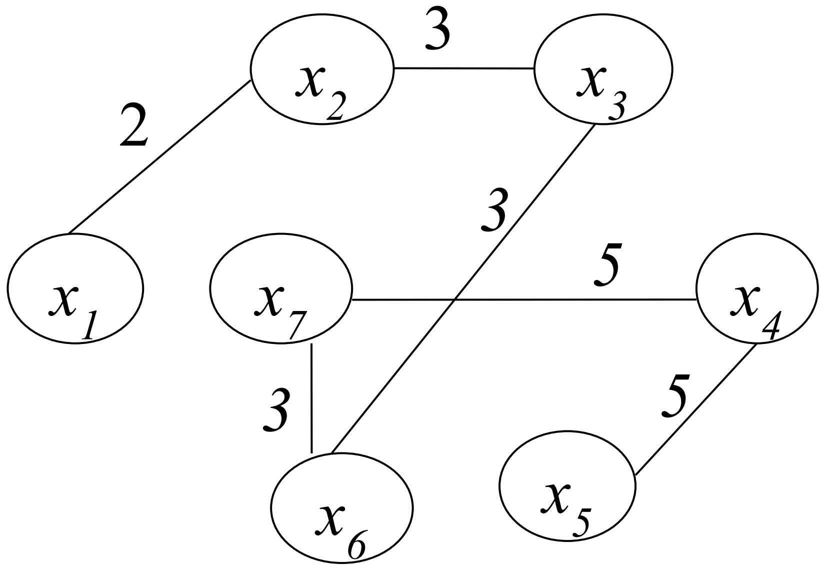
$5 \neq l(x_4) + c(x_4, x_3) = 16+15$, $5 \neq l(x_6) + c(x_6, x_3) = 8+3$.

Это означает, что в вершину x_3 мы попали из вершины x_2.

Далее, $l(x_2) = 2$, $\Gamma x_2 = \{x_1, x_3, x_7\}$, $2 = l(x_1) + c(x_1, x_2) = 0+2$,
$2 \neq l(x_3) + c(x_3, x_2) = 5+3$, $2 \neq l(x_7) + c(x_7, x_2) = 11+10$.

Это означает, что в вершину x_2 мы попали из вершины x_1.

Кратчайший путь от вершины x_1 до вершины x_5 найден .



Задачи, близкие к задаче о кратчайшем пути

1. Наиболее надежный путь.

В этом случае вес ребра представляет его надежность. Надежность пути от *s* к *t*, составленного из ребер, взятых из множества *P*, задается формулой $\rho(P) = \prod_{(x_i, x_j) \in P} p_{ij}$, где ρ_{ij} – надежность ребра (x_i, x_j).

2. Самый длинный (критический) путь.

Задача сетевого планирования, заключающаяся в нахождении самого длинного по временной протяженности пути в сетевом графике, определяющего продолжительность работ по выполнению проекта.

3. *Путь с наибольшей пропускной способностью*.

В этом случае каждое ребро графа имеет пропускную способность q_{ij} и требуется найти путь от s к t с наибольшей пропускной способностью. Пропускная способность пути P определяется ребром из P с наименьшей пропускной способностью, т.е. $$Q(P) = \min_{(x_i, x_j) \in P} [q_{ij}].$$

Определение. Если множество вершин графа *G(X,U)* разбить на два подмножества X_1 и X_2 (где $X = X_1 \cup X_2$), то множество ребер графа, одни концевые вершины которых лежат в X_1, а другие в X_2, называется *разрезом графа G*.

Теорема Форда – Фалкерсона. Пропускная способность пути с наибольшей пропускной способностью от *s* к *t* равна

$$Q(P) = \min_K \{ \max_{(x_i, x_j) \in K} [q_{ij}] \},$$

где *К* – любой (*s*-*t*) разрез.

Алгоритм Франка – Фриша

1. Взять (*s*-*t*) разрез $K_1 = (\{s\}, X \setminus \{s\})$ и найти $Q_1 = \max_{(x_i, x_j) \in K_1} [q_{ij}]$.

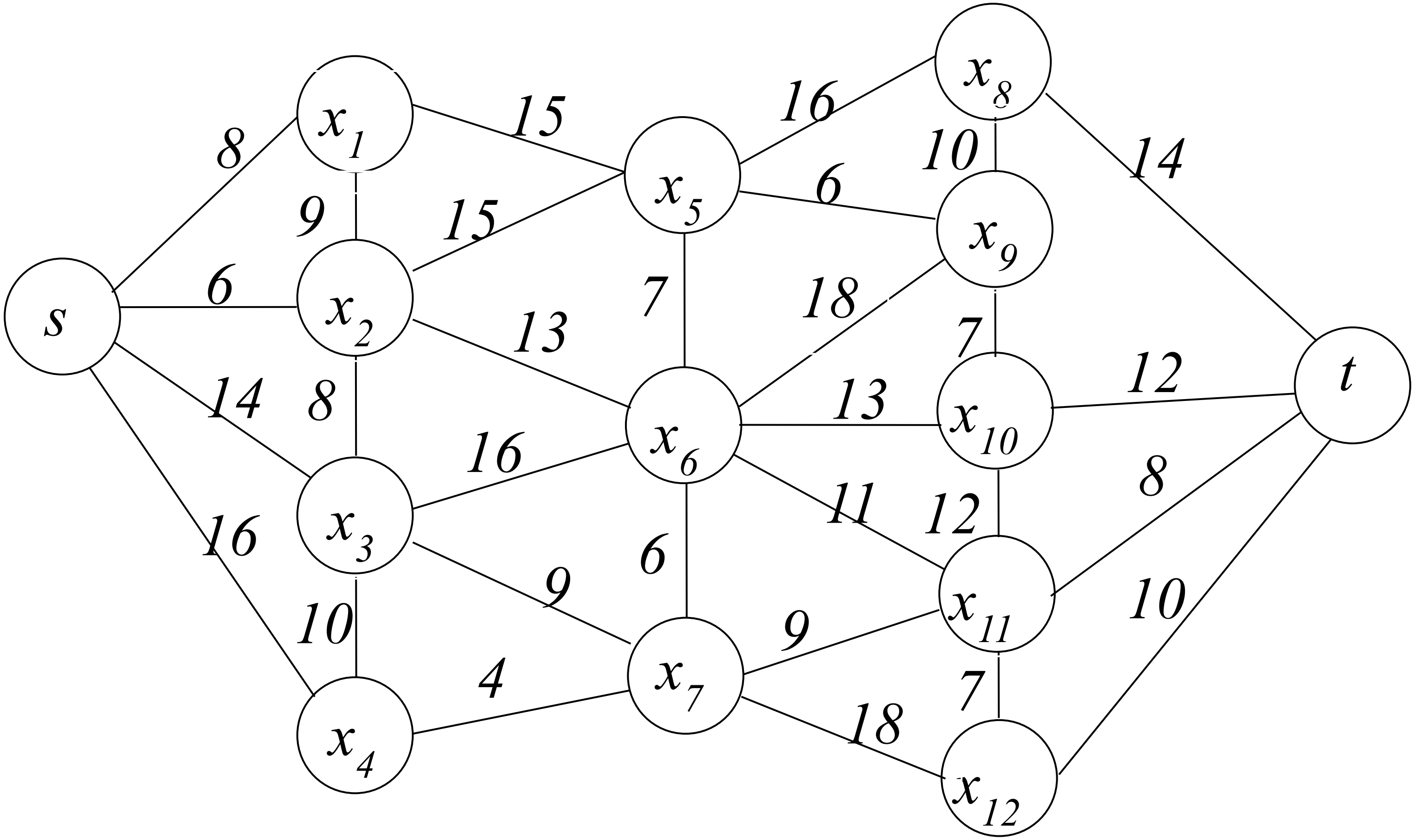
2. Закоротить все ребра графа (x_i, x_j) с $q_{ij} \geq Q_1$, т.е. заменить вершины x_i и x_j на вершину *x*, удалив ребро (x_i, x_j), положить $Гx = Гx_i \cup Гx_j$

3. Для полученного графа G_1 выбрать другой (*s*-*t*) разрез K_2 и найти $Q_2 = \max_{(x_i, x_j) \in K_2} [q_{ij}]$.

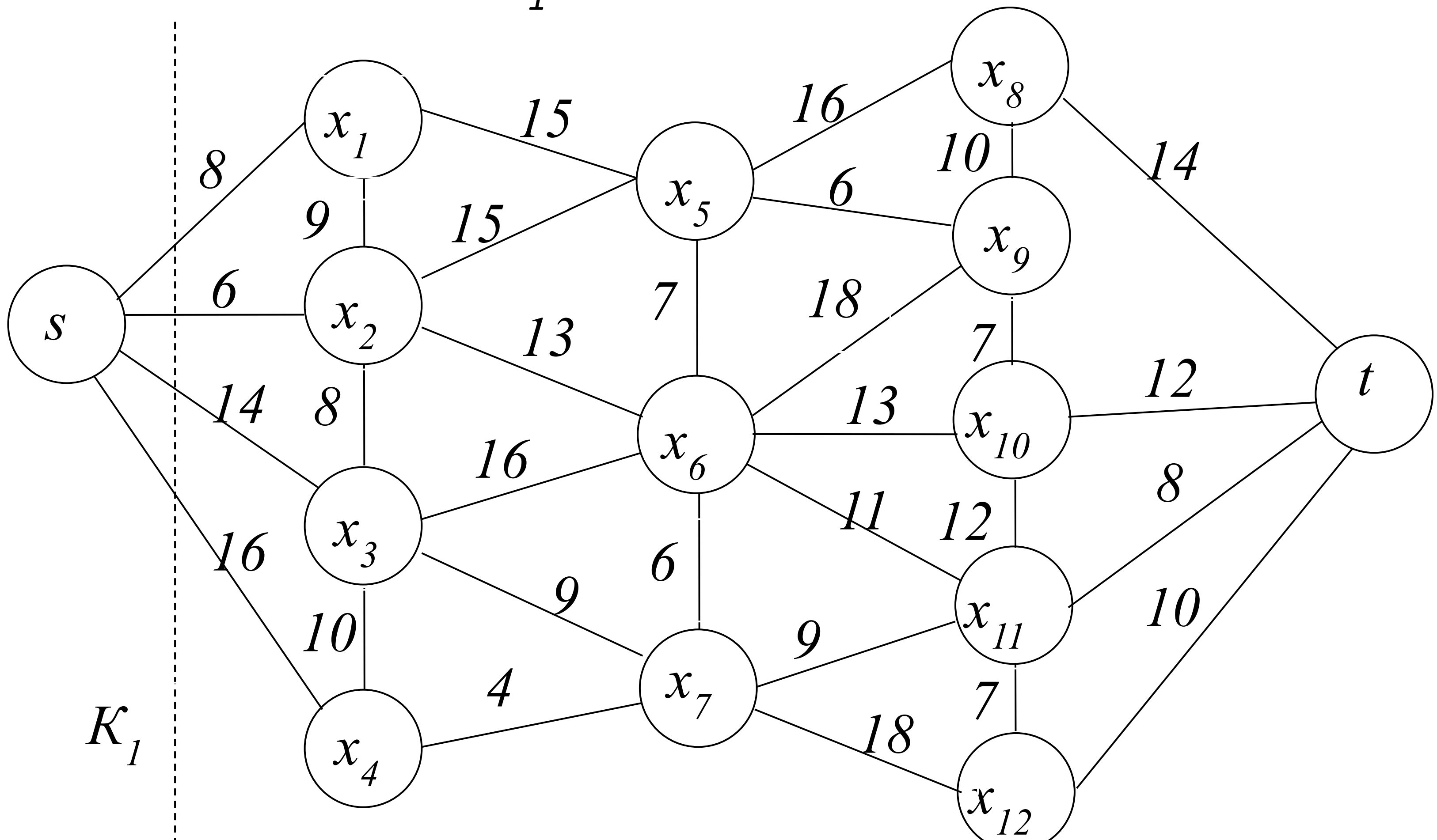
4. Закоротить все ребра графа (x_i, x_j) с $q_{ij} \geq Q_2$. Получить граф G_2 … и т.д., пока не будут объединены вершины *s*-*t*.

5. Теперь каждый (*s*-*t*) путь в графе G', образованный вершинами из *G* и теми ребрами, которые оказались закороченными, будет иметь максимальную пропускную способность.

Найти (*s*-*t*) путь с наибольшей пропускной способностью в графе *G(X,U)*



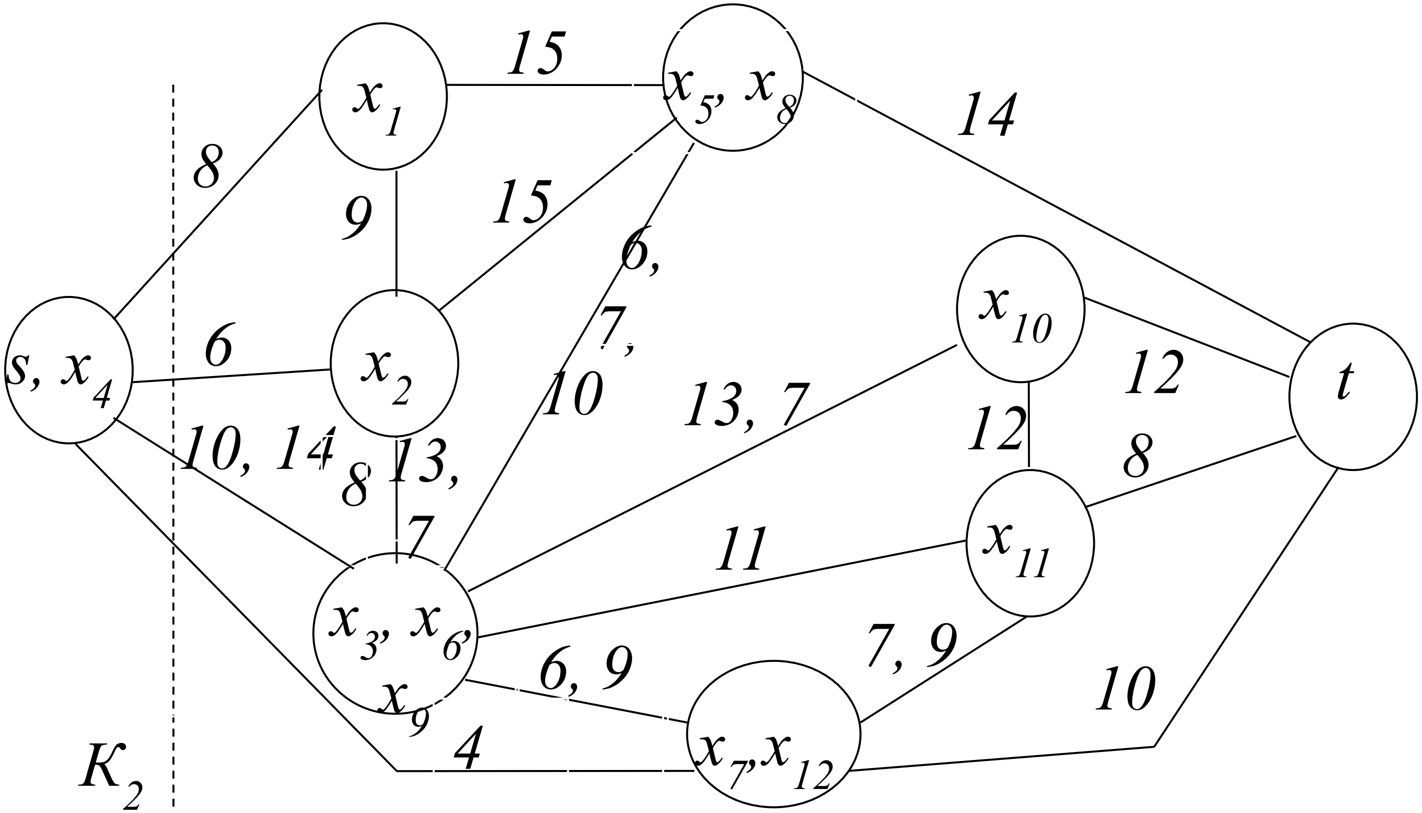
1. Проводим разрез $K_1 = (\{s\}, X \setminus \{s\})$



2. Находим $Q_1 = \max\limits_{(x_i, x_j) \in K_1} [q_{ij}] = 16.$

3. Закорачиваем все ребра графа (x_i, x_j) с $q_{ij} \geq Q_1$.

4. Это ребра (s, x_4), (x_3, x_6), (x_5, x_8), (x_6, x_9) и (x_7, x_{12}). Получаем граф G



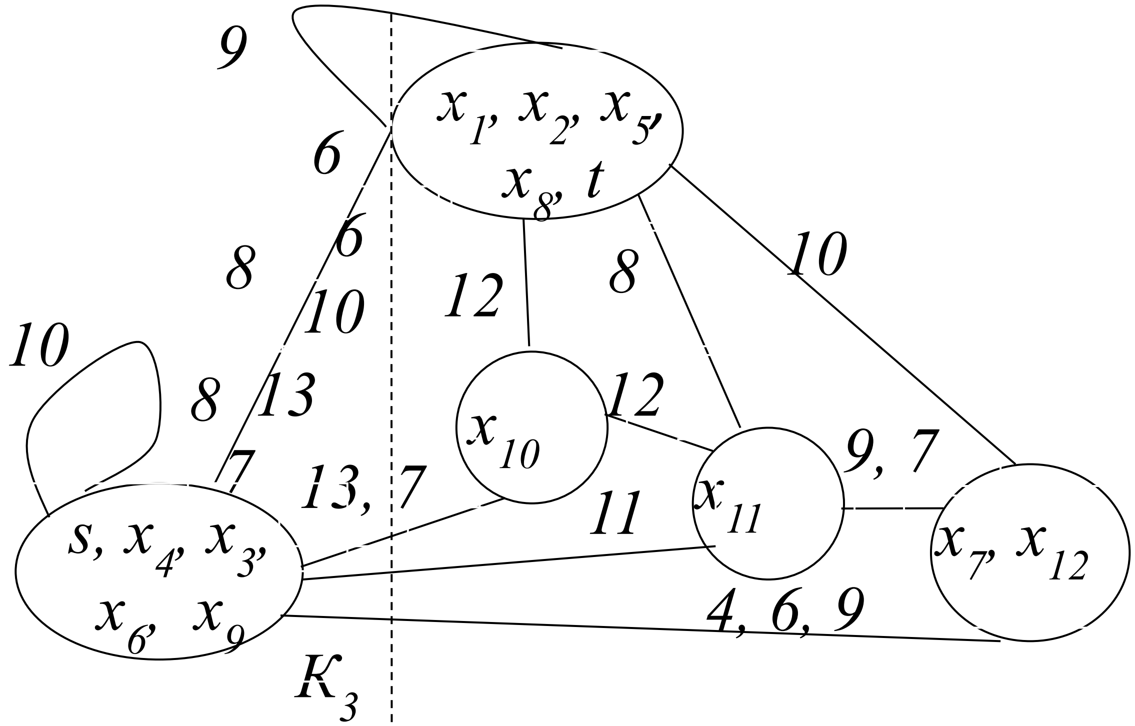
5. Проводим разрез K_2, находим

$$Q_2 = \max_{(x_i, x_j)\in K_1} [q_{ij}] = 14.$$

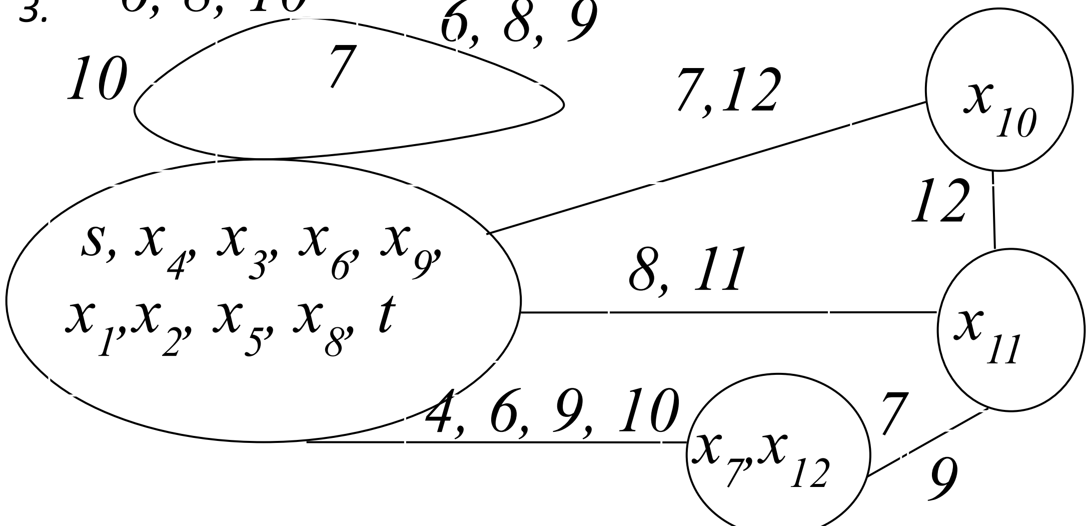
6. Закорачиваем все ребра графа (x_i, x_j) с $q_{ij} \geq Q_2$. Это ребра (s, x_4, x_3, x_6, x_9), (x_1, x_2, x_5, x_8, t). Получаем граф G_2.

7. Проводим разрез K_3, находим

$$Q_3 = \max_{(x_i, x_j)\in K_1} [q_{ij}] = 13.$$

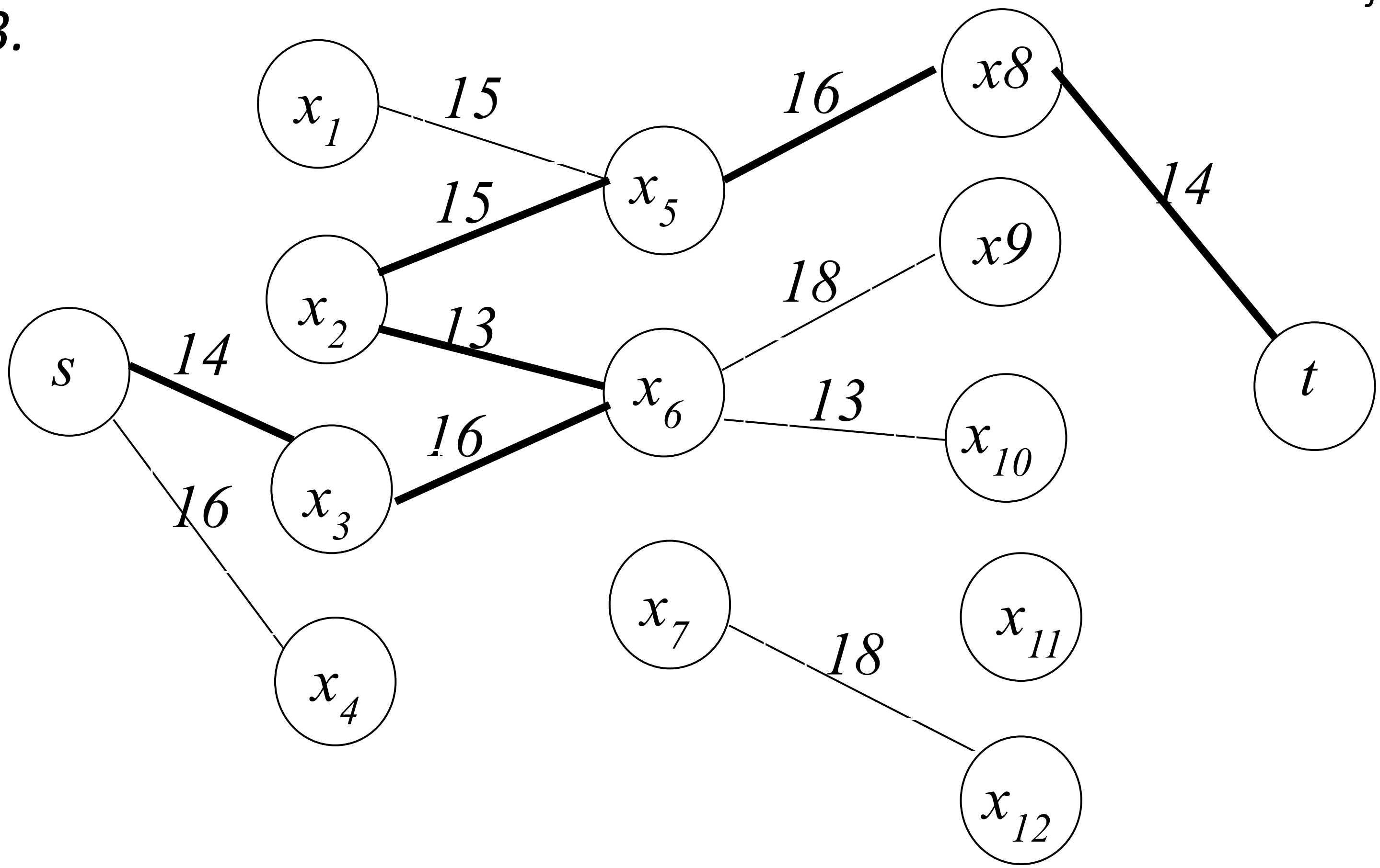


8. Закорачиваем все ребра графа (x_i, x_j) с $q_{ij} \geq Q_3$. Получаем граф G_3.



9. Вершины *s-t* объединены. Пропускная способность искомого пути *Q(P)=13.*

10. Строим граф, вершины которого – вершины исходного графа *G*, а ребра – ребра с пропускной способностью $q_{ij} \geq$ *Q(P)=13.*



Путь с наибольшей пропускной способностью.