



Военно-инженерный институт

Учебный военный центр

Отдел «Радиолокационного вооружения РТВ ВВС»

Дисциплина
«ОСНОВЫ ТЕОРИИ
РАДИОЛОКАЦИОННЫХ СИСТЕМ И
КОМПЛЕКСОВ»

Лекция №8

**Обнаружение когерентных сигналов
со случайными параметрами**

Цель лекции:

Раскрыть содержание алгоритмов обнаружения сигналов со случайными параметрами, методов вычисления соответствующих отношений правдоподобия и показателей качества обнаружения.

ВОПРОСЫ ЛЕКЦИИ

- 1. Методы вычисления отношения правдоподобия.
Общие соотношения.**
- 2. Обнаружение сигнала со случайной начальной фазой.**
- 3. Обнаружение сигналов со случайными начальной фазой и амплитудой.**

1. Методы вычисления отношения правдоподобия. Общие соотношения

Пусть на входе приемного устройства наблюдается смесь сигнала со случайным параметром β и помехи

$$y(t) = x(t, \beta) + n(t)$$

Для вычисления отношения правдоподобия введем совместную плотность распределения реализации сигнала и случайного параметра

$$P_{\text{сп}}(Y, \beta) = P_{\text{сп}}(Y) \cdot P(\beta / Y) = P(\beta) \cdot P_{\text{сп}}(Y / \beta) \quad (1)$$

Интегрируя (1) по β , получим

$$P_{\text{сп}}(Y) = \int_{(\beta)} P(\beta) \cdot P_{\text{сп}}(Y / \beta) d\beta.$$

$$l(Y) = \frac{P_{\text{сп}}(Y)}{P_{\text{п}}(Y)} = \int_{(\beta)} P(\beta) \cdot l(Y / \beta) d\beta,$$

4 Перейдем от многомерных реализаций Y к непрерывным $y(t)$. Тогда получим:

$$l[y(t)] = \int_{(\beta)} P(\beta) \cdot l[y(t)/\beta],$$

$$l[y(t)/\beta] = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{P_{\text{сп}}(Y/\beta)}{P_{\text{п}}(Y)}$$

частное отношение правдоподобия при фиксированном значении β . Поскольку при фиксированном β сигнал полностью известен, то

$$l[y(t)/\beta] = e^{-\frac{\beta(\cdot)}{N_0}} \cdot e^{-\frac{\beta(\cdot)}{N_0}} \quad (2)$$

где $Z(\beta)$, $\mathcal{E}(\beta)$ - частные значения корреляционного интеграла и энергии сигнала

$$z(\beta) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t\beta) \cdot y(t) dt$$

$$\quad (3)$$

$$\mathcal{E}(\beta) = \int_{-\infty}^{\infty} x^2(t\beta) dt$$

Таким образом, усредняя частное отношение правдоподобия по случайному параметру β , можем определить отношение правдоподобия $l[y(t)]$ для сигналов со случайными параметрами и использовать его при решении задачи оптимального обнаружения.

5 2. Обнаружение сигнала со случайной начальной фазой

Рассмотрим модель когерентного сигнала со случайной начальной фазой:

$$x(t\beta) = X(t) \cos [\omega_0 t + \varphi(t) - \beta],$$

где $\varphi(t)$ - закон фазовой модуляции; (4)

$X(t)$ - закон амплитудной модуляции.

Преобразуем (4) с использованием формулы косинуса разности двух углов к виду

$$\begin{aligned} x(t\beta) &= X(t) \cos [\omega_0 t + \varphi(t)] \cos \beta + X(t) \sin [\omega_0 t + \varphi(t)] \sin \beta = \\ &= x_1(t) \cdot \cos \beta + x_2(t) \cdot \sin \beta, \end{aligned}$$

где

$$x_{1,2}(t) = X(t) \begin{matrix} \cos \\ \sin \end{matrix} [\omega_0 t + \varphi(t)].$$

Тогда частное значение корреляционного интеграла (3) приводится к виду

6

$$Z[y(t)/\beta] = cZ_1\beta + sZ_2\beta = |Z|\theta - (\beta, \quad)$$

$$Z_{1,2} = \int_{-\infty}^{\infty} x_{1,2}(t)y(t)dt; \quad |Z| = \sqrt{Z_1^2 + Z_2^2};$$

$$\theta_{os} = \frac{Z_1}{|Z|} \sin \theta = \frac{Z_2}{|Z|}$$

Значение энергии сигнала, содержащего большое число периодов колебаний, не зависит от β и равно

$$\mathfrak{P}(\quad) = \int_{-\infty}^{\infty} X^2(t)dt \quad (6)$$

В соответствии с выражениями (5) и (6) частное отношение правдоподобия будет равно:

$$l[y(t)/\beta] = e^{-\frac{\mathfrak{E}}{N_0}} \cdot e^{\frac{2}{N_0}|Z|\theta_{os}\beta(\quad)} \quad (7)$$

7 Полагая $P(\beta)=1/2\pi$ и усредняя $l[y(t)/\beta]$ по β , получим следующий результат

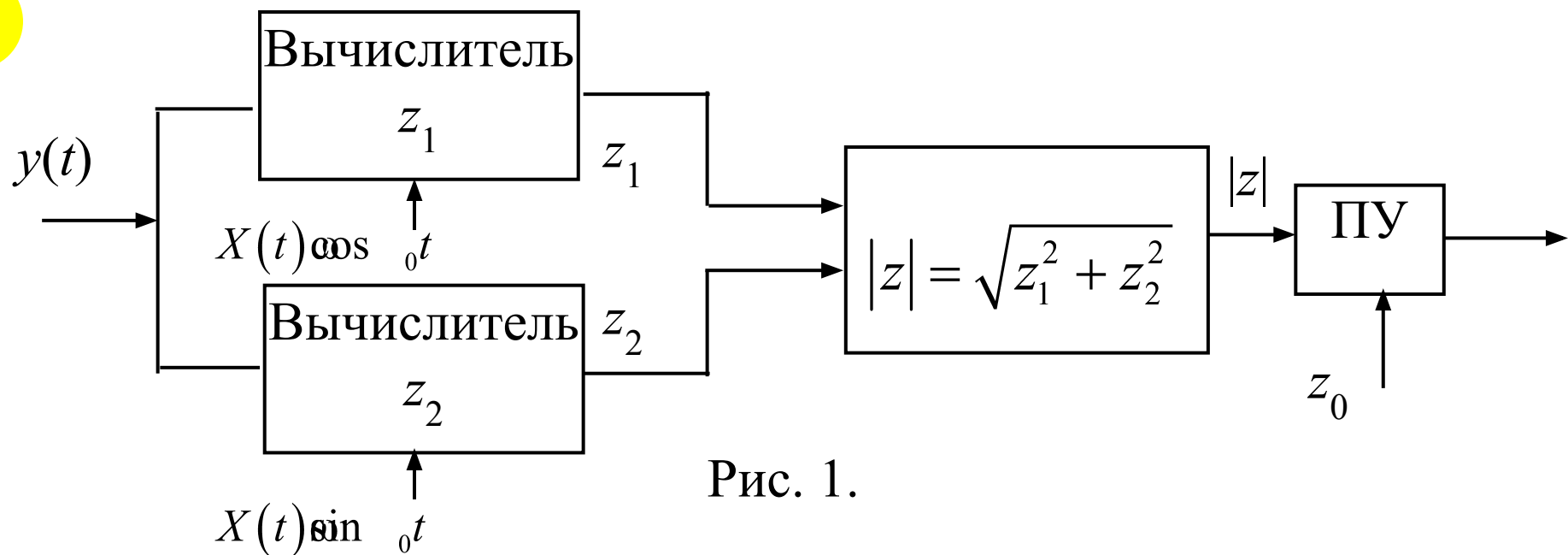
$$l[y(t)] = e^{-\frac{\varepsilon}{N_0}} \cdot I_0\left(\frac{2|Z|}{N_0}\right) \quad (8)$$

где $I_0\left(\frac{2|Z|}{N_0}\right)$ - функция Бесселя первого рода нулевого порядка;
 $|Z|$ - модульное значение корреляционного интеграла.

Анализ полученного выражения показывает, что ввиду монотонности функции $I_0(x)$ отношение правдоподобия является монотонной функцией модульного значения корреляционного интеграла $|Z|$.

Следовательно, алгоритм обнаружения сигнала со случайной начальной фазой реализует следующее правило

$$\mathbb{A}_{\text{опт}}[y(t)] = \begin{cases} 1 & |z| \geq z_0, \\ 0, & |z| \leq z_0, \end{cases}$$



В обнаружителе используется 2-х канальная, так называемая квадратурная, корреляционная обработка сигналов.

$$\mathbf{A}_{\text{опт}} \left[y(t) \right] = \begin{cases} 1 & |z| \geq z_0, \\ 0, & |z| \leq z_0, \end{cases}$$

3. ОБНАРУЖЕНИЕ СИГНАЛОВ СО СЛУЧАЙНОЙ НАЧАЛЬНОЙ ФАЗОЙ И АМПЛИТУДОЙ

а) Отношение правдоподобия и алгоритм обнаружения сигналов со случайной амплитудой и начальной фазой

Модель сигнала описывается выражением

$$x(t, \beta, b) = bX(\beta) \cos \left[\omega_0 t + \left(\beta - \frac{1}{2} \right) \pi \right]$$

Используя (7), при фиксированном значении b для рассматриваемого сигнала можно записать следующее выражение частного отношения правдоподобия где b - случайная величина, принимающая значения от 0 до 1.

$$l[y(t)/b] = e^{-\frac{\mathcal{E}(b)}{N_0}} \cdot I_0 \left(\frac{2|Z(b)|}{N_0} \right),$$

$$|Z(b)| = b|Z|, \quad \mathcal{E}(b) = b\mathcal{E};$$

$\mathcal{E}$ и $|Z|$ - энергия и модульное значение корреляционного интеграла при $b=1$.

Величина энергии $\mathcal{E}$ выбирается при этом равной средней энергии

Задаваясь релеевским распределением амплитуд

$$P(b) = 2b \cdot e^{-b^2}$$

и усредняя частное отношение правдоподобия, получим

$$l[y(t)] = \int_{-\infty}^{\infty} P(b) l[y(t)/b] db = \frac{N_0}{\Xi + N_0} \cdot e^{\frac{|Z|^2}{N_0(\Xi + N_0)}} \quad (8)$$

$$\hat{A}_{\text{опт}}[y(t)] = \begin{cases} 1, & |Z| \geq Z_0, \\ 0, & |Z| < Z_0. \end{cases}$$

Структурная схема обнаружителя сигналов со случайными начальной фазой и амплитудой идентична структурной схеме обнаружителя сигналов со случайной начальной фазой, рассмотренной выше.

Таким образом, алгоритм обнаружения для сигналов со случайными параметрами сводится к следующему:

1. По принятой реализации $y(t)$ вычисляются частные значения отношения правдоподобия или корреляционного интеграла.

2. Производится усреднение частного значения отношения правдоподобия по случайным параметрам и сравнивается с порогом или берется модуль корреляционного интеграла и сравнивается с порогом Z_0 .

3. Принимается соответствующее решение $\hat{A}$

1 б). Показатели качества обнаружения сигналов со случайными параметрами

При наличии только помехи каждая из независимых величин Z_1 и Z_2 имеют нормальный закон распределения

$$P_{\Pi}(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi} \sigma_0} e^{-\frac{z^2}{2\sigma_0^2}}$$

или

$$P_{\Pi}(z_H) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{z_H^2}{2}},$$

где $z_H = \frac{z}{\sigma_0}$ - нормированное значение корреляционного интеграла.

Поэтому для $|z_H| = \sqrt{z_{H1}^2 + z_{H2}^2}$ имеет место закон распределения Релея:

$$P_{\Pi}(|z_H|) = |z_H| e^{-\frac{z_H^2}{2}}.$$

1
2 При воздействии полезного сигнала со случайной начальной фазой β каждая из кривых условных плотностей вероятности величин Z_1 и Z_2 смещается соответственно на

$$\int_{-\infty}^{\infty} x(t, \beta) x_{1,2}(t) dt \Rightarrow \frac{\cos}{\sin} \beta,$$

а простое распределение Релея переходит в обобщенное

$$P_{\text{сп}}(|z_H|) = |z_H| e^{-\frac{|z_H|^2 + q^2}{2}} \cdot I_0(q|z_H|),$$

где $I_0(X)$ - модифицированная функция Бесселя первого рода.

Характерный вид кривых $P_{\text{п}}(|z_H|)$ и $P_{\text{сп}}(|z_H|)$ показан на рис.2.

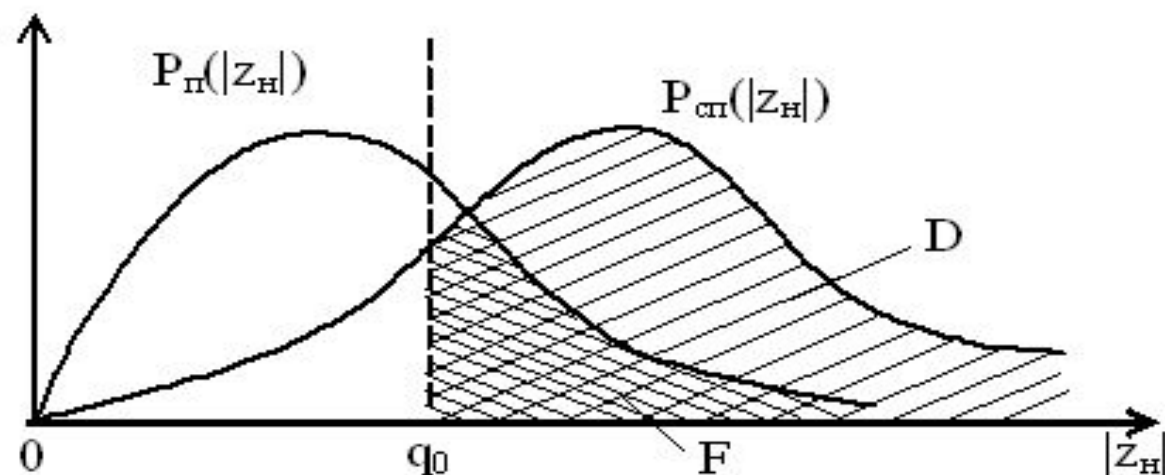


Рис. 2.

Показатели качества обнаружения определяются по соотношениям:

1
3

$$D = \int_{q_0}^{\infty} P_{\text{сп}}(|z_H|) d|z_H|;$$

$$F = \int_{q_0}^{\infty} P_{\text{п}}(|z_H|) d|z_H| = e^{-\frac{q_0^2}{2}},$$

откуда $q_0 = \sqrt{2 \ln \frac{1}{F}}.$

Кривые обнаружения сигналов со случайной начальной фазой представлены на рис.3 и лежат правее кривых обнаружения сигнала с известными параметрами, т.е. в этом случае требуется большая энергия для обеспечения требуемых показателей качества обнаружения.

Для сигнала со случайной начальной фазой и амплитудой, распределенной по релеевскому закону, плотности вероятности $P_{\text{п}}(|z_H|)$ и $P_{\text{сп}}(|z_H|)$ подчиняется простому релеевскому распределению

$$P_{\text{п}}(|z_H|) = |z_H| e^{-\frac{|z_H|^2}{2}};$$

$$P_{\text{сп}}(|z_H|) = \frac{|z_H|}{\frac{1+q^2}{2}} e^{-\frac{|z_H|^2}{2+q^2}}.$$

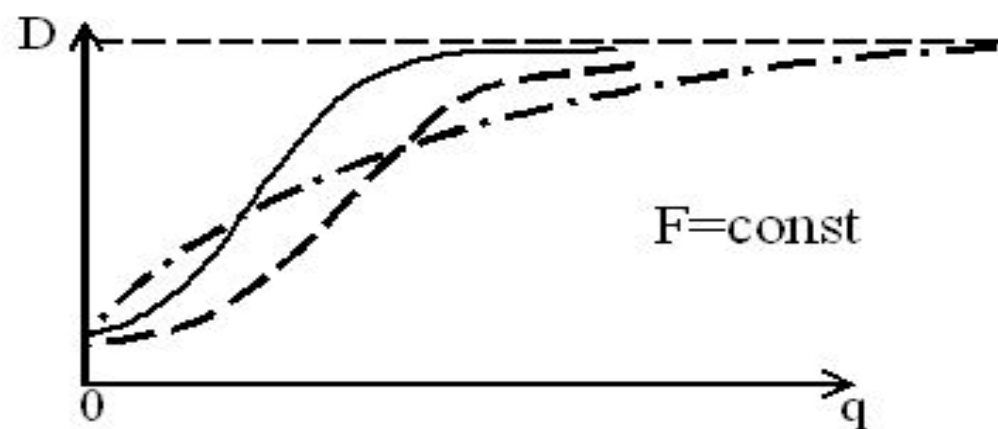
Соответственно $D = e^{-\frac{q_0^2}{2+q^2}}; \quad F = e^{-\frac{q_0^2}{2}}.$

Построение кривых обнаружения при этом может осуществляться согласно выражению

$$D = F^{\frac{1}{1 + \frac{q^2}{2}}}$$

Кривые $D(q)$ (рис.3) в области больших D еще сильнее смещаются вправо. Это связано с возможными замираниями при случайной амплитуде сигнала.

Наоборот, при малых $D(D < 0,2)$ флуктуации амплитуды облегчают обнаружение и кривые сдвигаются влево.



- сигнал с полностью известными параметрами;
- - - сигнал со случайной начальной фазой;
- . - сигнал со случайной начальной фазой и амплитудой.

Рис. 3.

Пользуясь кривыми обнаружения, можно найти пороговый сигнал

Пороговым называется сигнал, который при заданной вероятности ложной тревоги может быть обнаружен с заданной вероятностью правильного обнаружения D . Пороговый сигнал характеризуют его энергией (или мощностью), которую можно рассчитать, зная значение параметра обнаружения q . Величина q определяется по кривым обнаружения (рис. 4).

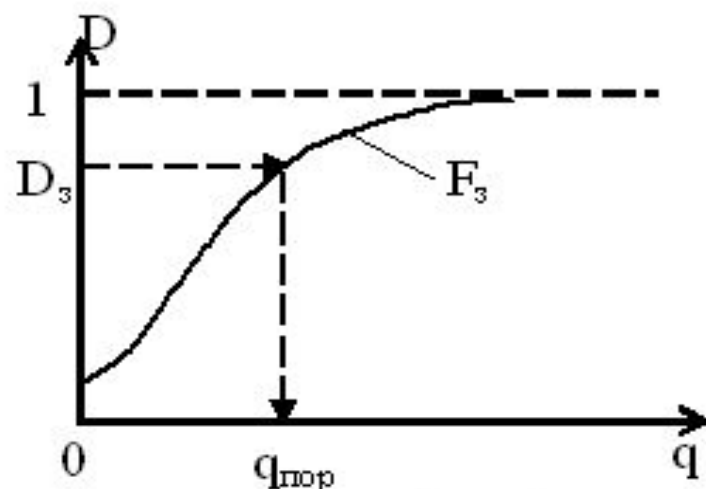


Рис. 4.

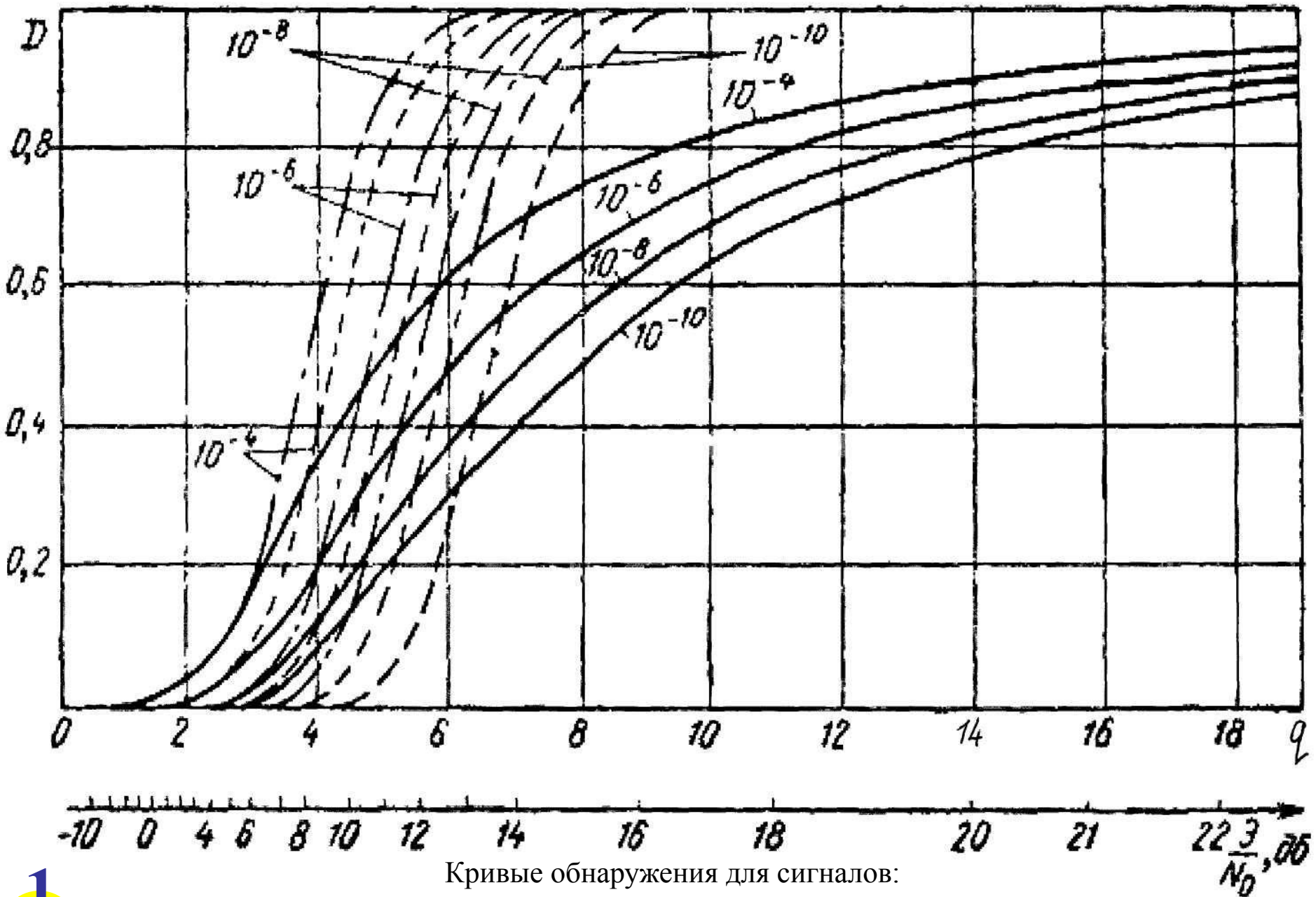
Пусть заданы D_3 и F_3 . По кривым обнаружения определяем $q_{\text{пор}}$.

Поскольку $q = \sqrt{\frac{2\varepsilon}{N_0}}$, то $\varepsilon_{\text{пор}} = \frac{q_{\text{пор}}^2}{2} N_0$.

Если мощность сигнала или его энергия больше соответствующих пороговых значений при установленном значении $F=F_3$, то условная вероятность правильного обнаружения больше, чем D_3 .

ВЫВОД

Возможность обнаружить сигнал при оптимальном приеме с заданными значениями D и F определяются лишь отношением энергии сигнала к спектральной плотности шума. Поэтому несущественно, какую форму имеет когерентный сигнал - импульсный он или непрерывный и по какому закону он модулирован.



Кривые обнаружения для сигналов:

с полностью известными параметрами (штрих-пунктир);

со случайной начальной фазой (пунктир);

со случайными амплитудой и начальной фазой (сплошные линии).

3. Заключительная часть

1. Отношение правдоподобия для сигналов со случайной начальной фазой, либо случайными начальной фазой и амплитудой пропорционально модулю корреляционного интеграла.

2. Кривые обнаружения для сигнала со случайными неинформативными параметрами сдвигаются по сравнению с кривыми с полностью известными параметрами вправо.

3. Параметр обнаружения когерентного сигнала заданного вида зависит только от энергии сигнала и спектральной плотности шума.

Задание на самостоятельную подготовку:

Отработать материал лекции в соответствии с рекомендованной литературой.

Л 1/о с. 90-100;

Л 1/д с. 165-167;