§7. Линейные пространства

п.1. Линейная зависимость.

Упорядоченная совокупность n действительных чисел

называется n-мерным вектором.

Числа называются координатами вектора.

Пример.

— 2-мерный вектор

— 3-мерный вектор

— 4-мерный вектор

Линейные операции над n-мерными векторами (сложение, вычитание, умножение на число) определяются аналогично случаю векторов на плоскости и в пространстве (в координатной форме).

Совокупность всех n-мерных векторов, для которых определены линейные операции называется n-мерным векторным пространством и обозначается

Рассмотрим систему из m n-мерных векторов

Вектор b называется линейной комбинацией системы , если существуют такие числа

что

Числа

называются коэффициентами линейной комбинации.

Пример.

Если три вектора некомпланарны, то

Система векторов называется **линейно зависимой**, если существуют числа хотя бы одно из которых не равно нулю, такие, что справедливо равенство

Система векторов называется **линейно независимой**, если существуют она не является линейно зависимой.

Для линейно независимой системы векторов равенство

возможно тогда и только тогда, когда

Свойства линейно (не)зависимых систем векторов

1) Если среди векторов системы $a_1, a_2, ..., a_m$ есть нулевой, то система линейно зависима.

Доказательство.

Пусть, например,

Тогда

Здесь

Значит, система линейно зависима.

2) Если среди векторов системы $a_1, a_2, ..., a_m$ есть k ( ) линейно зависимых векторов, то система линейно зависима.

Доказательство.

Пусть векторы линейно зависимы.
Тогда

причем, хотя бы одно из чисел не равно нулю.

Поэтому из равенства

следует линейная зависимость системы

3) Если система векторов линейно независима, то любая ее подсистема линейно независима.

4) Для того, чтобы система векторов была линейно зависима, необходимо и достаточно, чтобы хотя бы один из ее векторов линейно выражался через остальные.

Доказательство.

Необходимость. Пусть система векторов

линейно зависима.

Тогда

причем хотя бы одно из чисел не равно нулю, например

Значит

т.е. вектор линейно выражается через остальные.

Достаточность. Пусть вектор линейно выражается через остальные, т.е.

Поэтому из равенства

следует линейная зависимость системы

Если вектор b является линейной комбинацией векторов линейно независимой системы , т.е.

то числа называются координатами вектора b в системе

Теорема 1.

Координаты вектора b в линейно независимой системе , задаются однозначно, т.е. разложение

единственно.

Диагональной называется система векторов следующего вида

…………………………

где

<u>Теорема 2.</u>

Диагональная система векторов линейно независима.

Единичными векторами пространства $\mathbf{R}^n$ называются векторы

……………………

<u>Теорема 3.</u>

а) Система единичных векторов линейно независима.

б) Любой вектор пространства являеется линейной комбинацией единичных векторов этого пространства, причем координаты вектора a в этой системе совпадают с его координатами

Рассмотрим систему векторов

Матрица

называется матрицей системы векторов.

Теорема 4.

Система векторов линейно независима тогда и только тогда, когда количество векторов в системе равно рангу матрицы этой системы векторов.

Пример. Проверить линейную зависимость системы векторов.

Решение. Составим матрицу этой системы (транспонированную)

Найдем ее ранг

Значит, система линейно зависима.

п.2. Базис и ранг системы векторов.

Базисом системы векторов называется содержащая максимальное количество векторов ее линейно независимая подсистема.

Замечание 1.

Система векторов может иметь несколько базисов.

Количество векторов в любом базисе системы векторов одинаково.

Число векторов в базисе называется рангом системы векторов.

Теорема 5.

Ранг системы векторов равен рангу матрицы этой системы векторов.

Базисом n-мерного векторного пространства называется n линейно независимых векторов этого пространства.

Теорема 6.

Пусть — базис пространства

Тогда любой вектор b этого пространства разлагается по данному базису, т.е.

причем это разложение единственно.

Доказательство. Пусть

Коэффициенты определим из системы:

Так как векторы линейно независимы, то ранг матрицы коэффициентов этой системы равен n (определитель матрицы не равен нулю).
Поэтому система имеет единственное решение, которое можно найти по правилу Крамера.

п.3. Евклидово пространство.

Пусть

Скалярным произведением векторов x и y называется сумма произведений соответствующих координат этих векторов:

Модулем вектора x называется квадратный корень из скалярного произведения этого вектора на себя:

Косинус угла между векторами x и y определяется по правилу:

Евклидовым пространством называется n-мерное векторное пространство, в котором задано скалярное произведение.

Векторы x и y евклидова пространства называются ортогональными, если:

Система векторов

называется ортогональной, если:

Теорема 7.

Ортогональная система векторов линейно независима.

Доказательство. Пусть

— ортогональная система.

Рассмотрим равенство

Значит,

т.е. система линейно независима.

Теорема 8.

Ортогональная система n векторов

образует базис n-мерного пространства.

При этом координаты произвольного вектора

в этом базисе можно найти по правилу:

Доказательство.

По определению базиса пространства и теореме 7 система

является базисом.

Тогда любой вектор можно представить в виде

Значит,

Ортогональная система векторов называется ортонормированной, если длина каждого вектора этой системы равна 1.

<u>Теорема 9.</u>

Координаты произвольного вектора

в ортонормированном базисе

можно найти по правилу