Электротехника

Электрические
цепи синусоидального тока

Электрические цепи синусоидального тока

Электрические цепи синусоидального тока – цепи в которых токи и напряжения являются синусоидальными функциями времени (гармоническими).

Преимущество: гармонические цепи обеспечивают наиболее экономичный способ генерирования, преобразования и использования электрической энергии.

Способы представления синусоидальных токов, напряжений, ЭДС

Тригонометрическая форма

Ток $i(t) = I_m \sin(\omega t + \psi_i),$

Напряжение

$$u(t) = U_m \sin(\omega t + \psi_u),$$

ЭДС

$$e(t) = E_m \sin(\omega t + \psi_e),$$

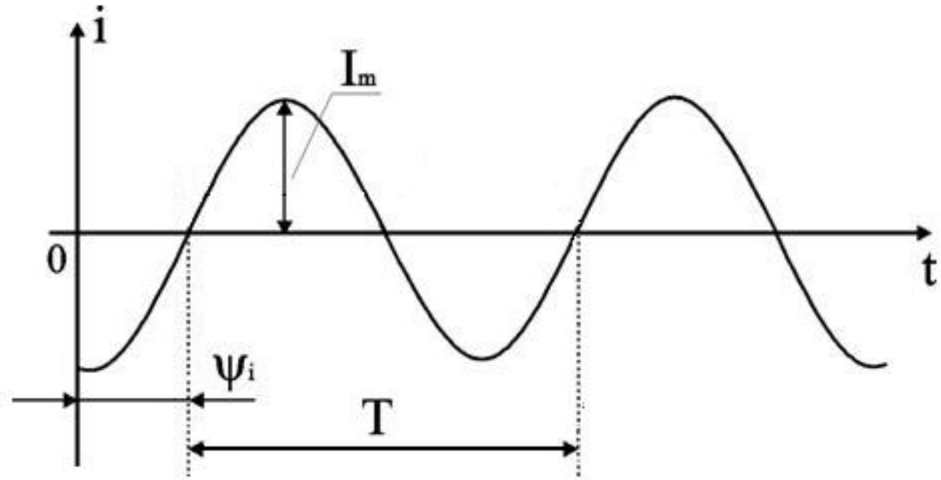
Способы представления синусоидальных токов, напряжений, ЭДС

- **i, u, e** – мгновенные значения тока, напряжения, ЭДС;
- $\mathbf{I_m}$, $\mathbf{U_m}$, $\mathbf{E_m}$ – амплитуды тока, напряжения, ЭДС;
- аргумент синусоидальной функции (значение в скобках) – фаза;
- $\boldsymbol{\psi_i}$, $\boldsymbol{\psi_u}$, $\boldsymbol{\psi_e}$ – начальная фаза тока, напряжения, ЭДС, [рад] или [градус] ;
- **ω** – круговая частота, ω = 2πf, [рад/с];
- **f** – циклическая частота, [Гц = 1/с], f = 1 / T;
- **T** – период, [с].

Способы представления синусоидальных токов, напряжений, ЭДС

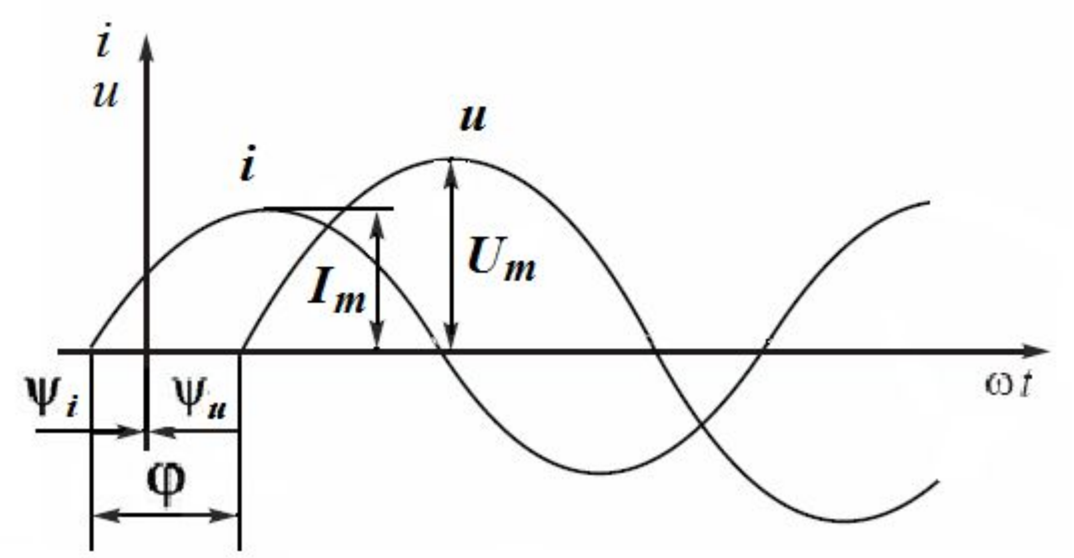
Временная диаграмма - представляет графическое изображение синусоидальной величины в заданном масштабе в зависимости от времени.

$$i(t) = I_m \sin(\omega t - \psi_i).$$



Начальная фаза положительная, если перемещение от начала синусоиды к началу системы координат совпадает с положительным направлением оси времени.

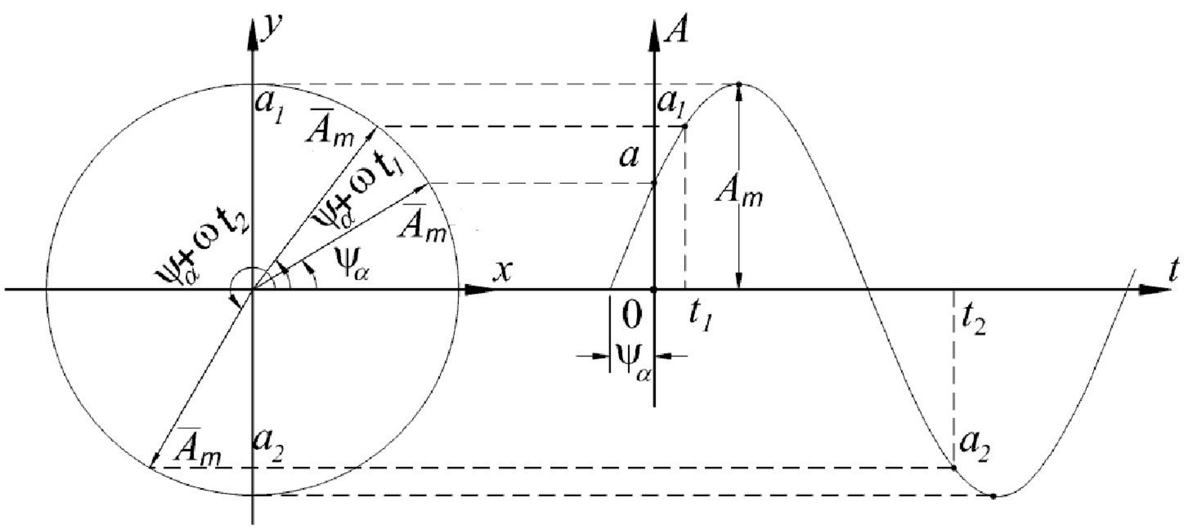
Способы представления синусоидальных токов, напряжений, ЭДС



$\varphi = \psi_u - \psi_i$ – разность начальных фаз (сдвиг по фазе)

Способы представления синусоидальных токов, напряжений, ЭДС

Векторные диаграммы



$t = 0.$

$x_0 = A_m \cos \psi,$

$y_0 = A_m \sin \psi.$

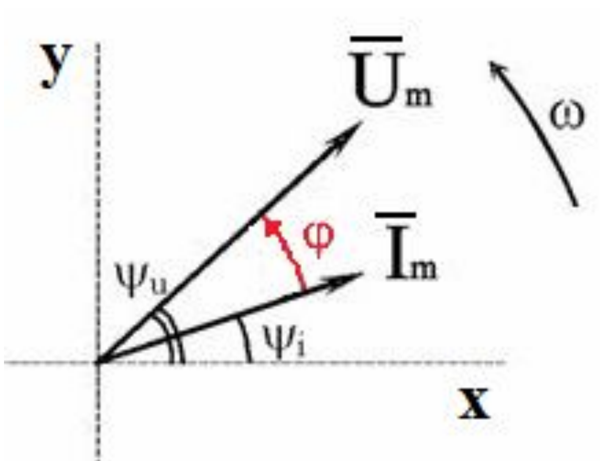
$t = t_1.$

$x_1 = A_m \cos (\omega t_1 + \psi),$

$y_1 = A_m \sin (\omega t_1 + \psi).$

Способы представления синусоидальных токов, напряжений, ЭДС

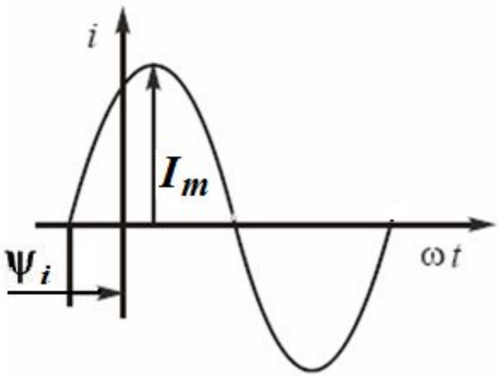
Гармоническую функцию можно представить в виде вращающегося с угловой скоростью **ω** вектора длиной равной амплитудному $\mathbf{A}_{\mathbf{m}}$ значению функции и расположенного, в начальный момент времени, под углом к оси абсцисс равным начальной фазе **ψ**.



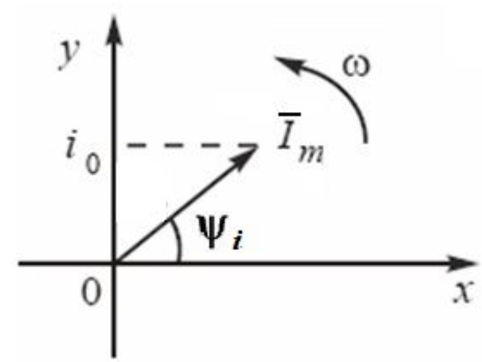
Векторная диаграмма –

совокупность вращающихся векторов, изображающих синусоидальные величины (ток, напряжение, ЭДС) одной и той же частоты.

Аналитический метод с использованием комплексных чисел



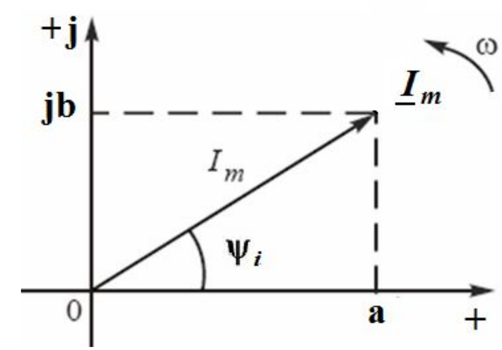
$$i(t) = I_m \sin(\omega t + \psi_i),$$



$$\underline{I}_m = I_m e^{j(\omega t + \psi_i)} = I_m e^{j\psi_i} e^{j\omega t}$$

$$\underline{I}_m = I_m e^{j\psi_i} = I_m \cos\psi_i + j\, I_m \sin\psi_i$$

$$\underline{I}_m = a + jb$$



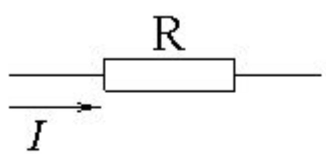
$$I_m = \sqrt{a^2 + b^2}\,; \qquad \psi_i = \mathrm{arctg}\,\frac{b}{a}$$

$$j = \sqrt{-1}$$

Действующее значение гармонической функции

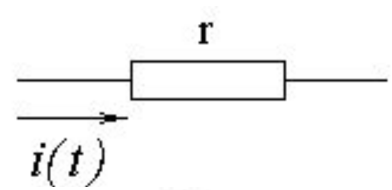
Действующее значение переменного тока численно равно такому постоянному току, при котором за время равное одному периоду в проводнике с сопротивлением ***R*** выделяется такое же количество тепловой энергии, как и при переменном токе.

Постоянный ток



$$Q_{=} = I^2RT$$

Переменный ток



$$Q_{\sim} = \int_0^T i^2(t)\, r\, dt$$

Действующее значение гармонической функции

Действующее значение переменного периодического тока

$$\int_0^T i^2(t)\, r\, dt = I^2 R\, T; \quad \longrightarrow \quad I = \sqrt{\frac{1}{T}\int_0^T i^2(t)\, dt}$$

Действующее значение гармонического тока

Примем начальную фазу синусоидального тока ψ_i равной нулю. Тогда $i = I_m \sin \omega t$,

$$I = \sqrt{\frac{1}{T}\int_0^T I_m^2 \sin^2 \omega t\, dt} = \frac{I_m}{\sqrt{2}} = 0{,}707\, I_m\,.$$

Средние значения

В общем случае ***среднее значение переменной периодической функции*** – это её среднее значение за период, например среднее значение переменного тока

$$I_{\text{ср}} = \frac{1}{T}\int_0^T i\,\mathrm{d}t\,.$$

Среднее значение гармонической функции за период равно нулю. Поэтому <u>среднее значение гармонической функции</u> определяют за полпериода.

$$I_{\text{ср}} = \frac{2}{T}\int_0^{\frac{T}{2}} i\,\mathrm{d}t = \frac{2}{T}\int_0^{\frac{T}{2}} I_m \sin\omega t\,\mathrm{d}t = \frac{2}{\pi} I_m = 0{,}637\, I_m$$

Символический метод расчета

I закон Кирхгофа

$$\sum_{k=1}^{n} i_k = 0 ,$$

$$\sum_{k=1}^{n} \underline{I}_k = 0 .$$

II закон Кирхгофа

$$\sum_{k=1}^{m} u_k = 0,$$

$$\sum_{k=1}^{m} \underline{U}_k = 0 .$$

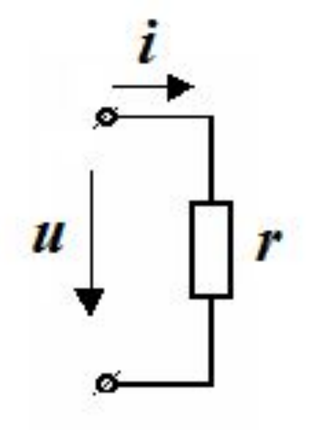
$$\sum_{k=1}^{m} \underline{U}_k = \sum_{k=1}^{n} \underline{E}_k .$$

Теоретические основы электротехники

Двухполюсники
в цепи переменного тока

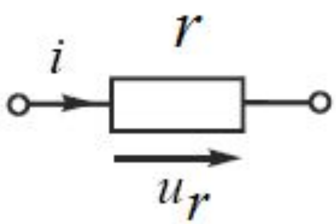
Резистивные элементы

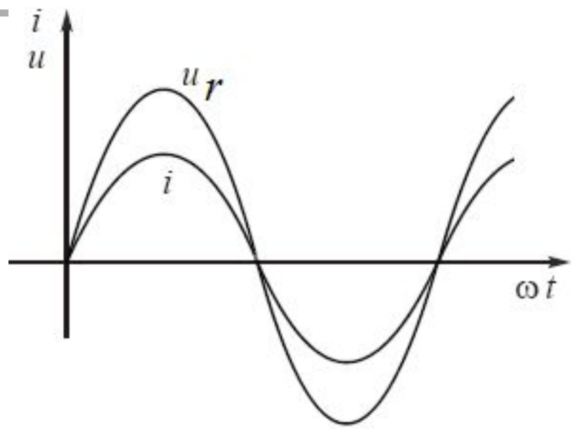
Резистор – электротехническое устройство, обладающее электрическим сопротивлением *r* и применяемое для ограничения электрического тока или создания падения напряжения определенной величины.



Электрическое сопротивление - параметр элемента электрической цепи характеризует свойство элемента преобразовывать электрическую энергию в другие виды энергии

Резистивный элемент



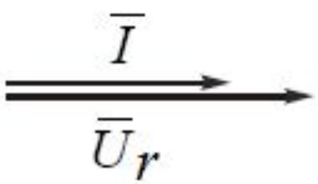


$$i = I_m \sin(\omega t + \psi_i),$$

$$u_r = r\,i = r I_m \sin(\omega t + \psi_i),$$

$$u_r = U_m \sin(\omega t + \psi_u),$$

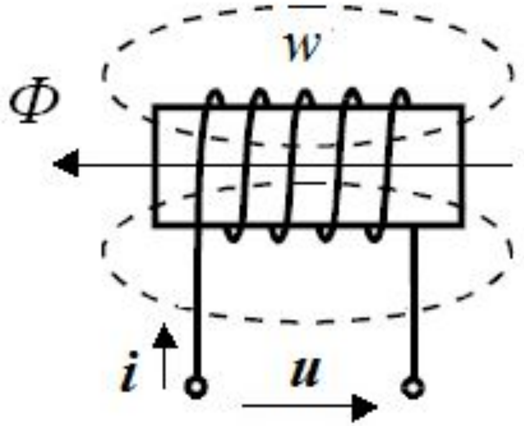
где: $U_m = rI_m, \;\; \psi_i = \psi_u$.



В комплексной форме:

$\underline{U}_m = r\,\underline{I}_m$, или $\underline{U} = r\,\underline{I}$.

Индуктивные элементы

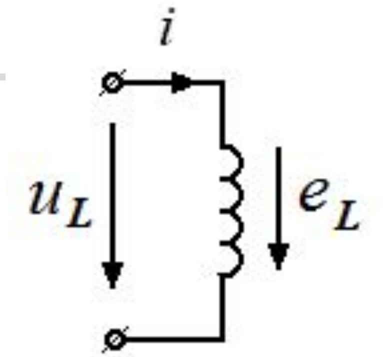


$$\boldsymbol{\Psi = w\Phi}, \quad [Вб = В \cdot с],$$

$$\boldsymbol{L = \Psi / i}, \quad [Г].$$

Индуктивность *L [Г]* - параметр, характеризующий свойство участка или элемента электрической цепи накапливать энергию магнитного поля.

Индуктивный элемент



Идеальный индуктивный элемент

$$i = I_m \sin(\omega t + \psi_i), \qquad e_L = \frac{-\mathrm{d}\Psi}{\mathrm{d}t} = \frac{-L\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t},$$

$$e_L = -L\omega I_m \cos(\omega t + \psi_i) = -E_{Lm}\sin(\omega t + \psi_i + \frac{\pi}{2});$$

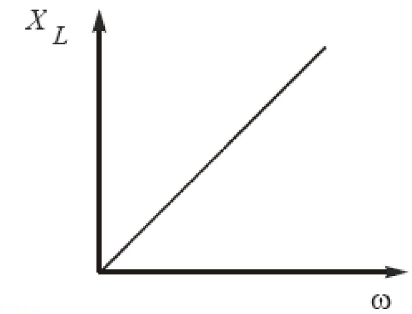
$$u = -e_L = U_m \sin(\omega t + \psi_i + \frac{\pi}{2}) = U_m \sin(\omega t + \psi_u).$$

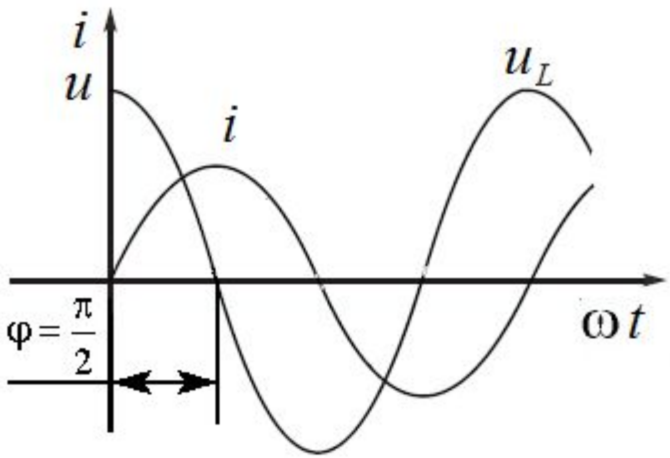
$$L\omega = 2\pi f L = x_L, \qquad E_{Lm} = U_m = L\omega I_m = x_L I_m,$$

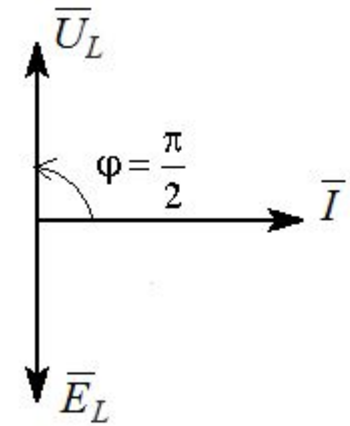
$$\psi_u = \psi_i + \frac{\pi}{2}. \qquad \varphi = \psi_u - \psi_i = \frac{\pi}{2}$$

Индуктивный элемент

Величина $x_L = L\omega$ называется индуктивным реактивным сопротивлением (Ом).





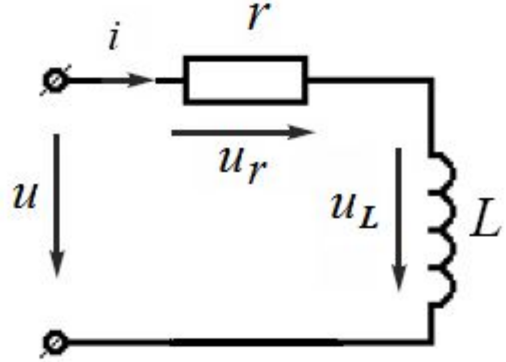


В комплексной форме:

$$\underline{U}_m = jx_L \underline{I}_m \quad \text{или} \quad \underline{U} = jx_L \underline{I}.$$

Индуктивный элемент

Реальная катушка индуктивности



$$i = I_m \sin(\omega t + \psi_i),$$

$$u = u_r + u_L, \quad u = r\,i + L\frac{di}{dt},$$

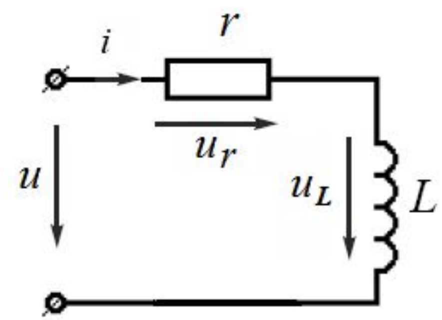
$$u = r\,I_m \sin(\omega t + \psi_i) + L\omega I_m \sin(\omega t + \psi_i + \frac{\pi}{2}),$$

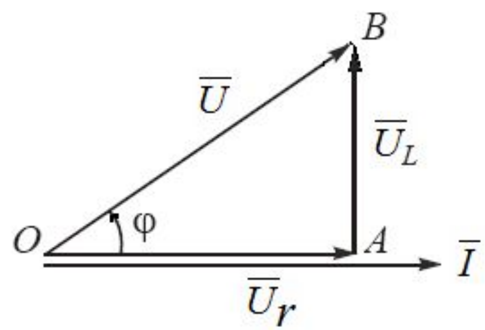
$$u = U_m \sin(\omega t + \psi_u).$$

U_m - ? $\quad\quad$ ψ_u - ?

Индуктивный элемент

Построим векторную диаграмму для данной электрической цепи





$$U_r = r\,I$$

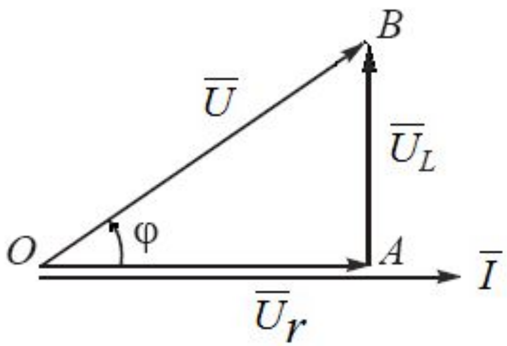
$$U_L = x_L\,I$$

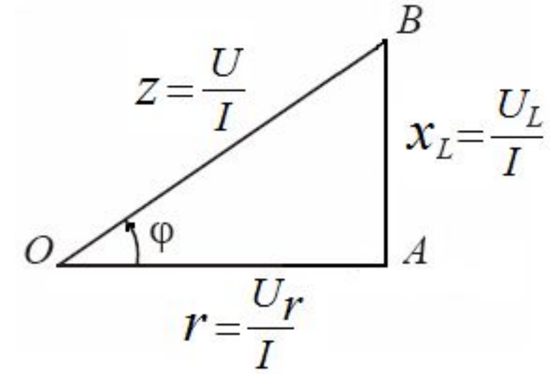
$$U = \sqrt{U_r^2 + U_L^2}\,,$$

$$\varphi = \operatorname{Arc\,tg}\frac{U_L}{U_r}$$

Индуктивный элемент

Треугольник сопротивлений



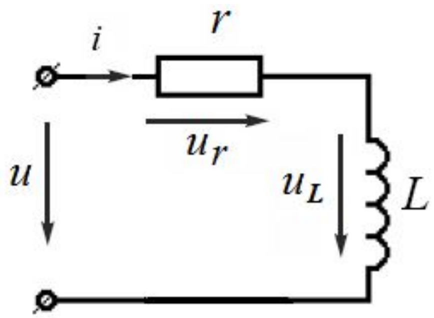


$$Z=\sqrt{r^2+X_L^2}\;;\qquad \varphi=\operatorname{arc\,tg}\frac{X_L}{r}\;;$$

$$r=Z\cdot\cos\varphi;\quad X_L=Z\cdot\sin\varphi.$$

Индуктивный элемент

В комплексной форме



$$i = I_m \sin(\omega t + \psi_i),$$

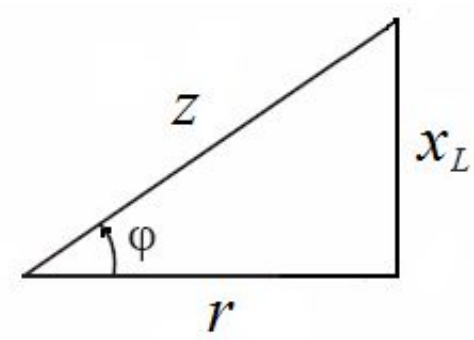
$$\underline{I}_m = I_m e^{j\psi_i};$$

$$\underline{I} = I e^{j\psi_i}$$

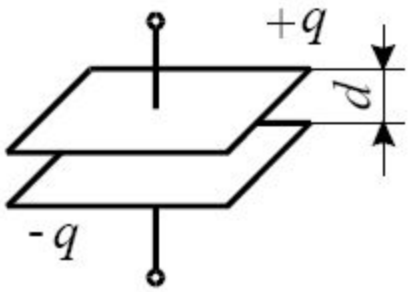
$$u = u_r + u_L, \quad u = r\,i + L\frac{di}{dt}, \qquad \underline{U} = \underline{U}_r + \underline{U}_L.$$

$$\underline{U} = r\underline{I} + jX_L\underline{I} = (r + jX_L)\underline{I},$$

$$\underline{Z} = r + jX_L = Z e^{j\varphi}, \quad \underline{U} = \underline{Z}\,\underline{I}.$$



Ёмкостной элемент



$$i_C = \frac{dq}{dt}, \quad q = C u_C.$$

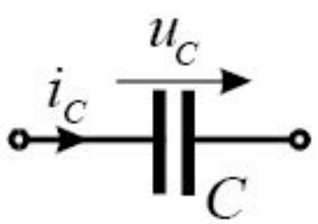
$$i_C = C \frac{du_C}{dt}.$$

Емкость C [Ф] - параметр, характеризующий способность участка электрической цепи или конденсатора накапливать энергию электрического поля.

Ёмкостной элемент

Идеальный ёмкостной элемент

$$u_C = U_{Cm}\sin(\omega t + \psi_u).$$



$$i_C = C\frac{\mathrm{d}u_C}{\mathrm{d}t} = C\omega U_{Cm}\cos(\omega t + \psi_u),$$

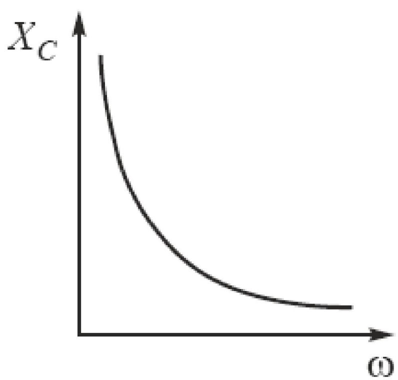
$$i_C = C\omega U_{Cm}\sin\left(\omega t + \psi_u + \frac{\pi}{2}\right) = I_{Cm}\sin(\omega t + \psi_i).$$

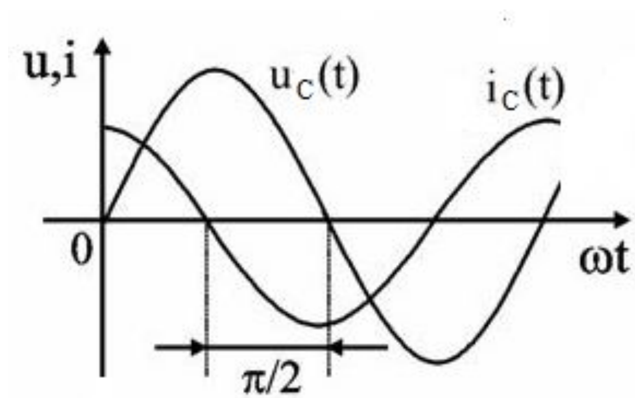
$$\frac{1}{\omega C} = \frac{1}{2\pi f C} = x_C, \qquad I_{Cm} = \frac{U_{Cm}}{X_C}$$

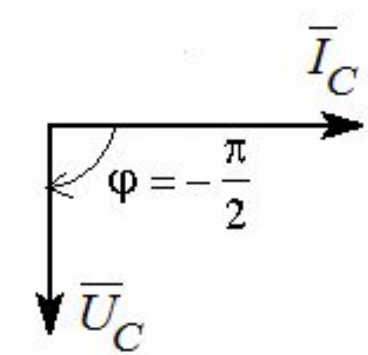
$$\psi_i = \psi_u + \frac{\pi}{2} \qquad \varphi = \psi_u - \psi_i = -\frac{\pi}{2}$$

Ёмкостной элемент

Величина $x_C = 1/\omega C = 1/2\pi f C$ называется ёмкостным реактивным сопротивлением (Ом).



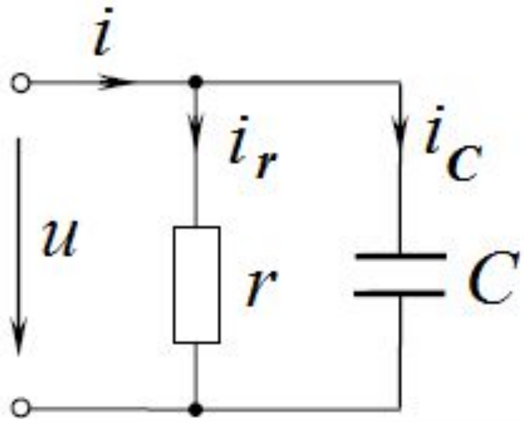




В комплексной форме: $\underline{I}_{Cm} = \dfrac{\underline{U}_{Cm}}{-jx_C}$ или $\underline{I}_C = \dfrac{\underline{U}_C}{-jx_C}$

Ёмкостной элемент

Конденсатор с потерями



$$u = U_m \sin(\omega t + \psi_u)$$

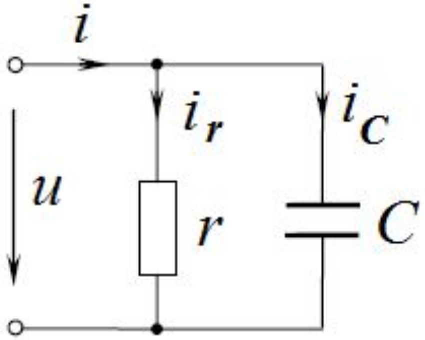
$$i = i_r + i_C, \qquad i = \frac{u}{r} + C\,\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{dt}},$$

$$i = \frac{1}{r} U_m \sin\left(\omega t + \psi_u\right) + C\omega\, U_m \sin\left(\omega t + \psi_u + \frac{\pi}{2}\right),$$

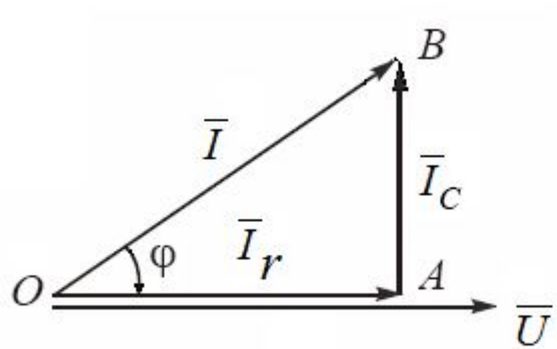
$$i = I_m \sin(\omega t + \psi_i). \qquad I_m \text{ - ?} \qquad \psi_i \text{ - ?}$$

Ёмкостной элемент

Построим векторную диаграмму для данной электрической цепи



$$\bar{I} = \bar{I}_r + \bar{I}_C$$

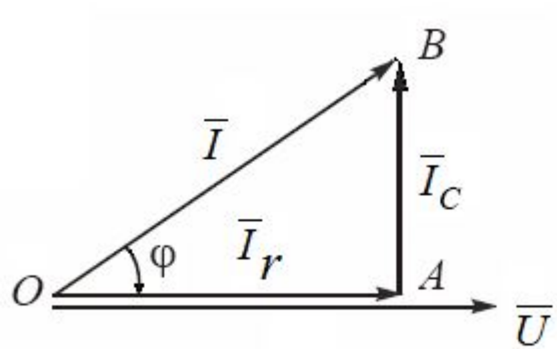


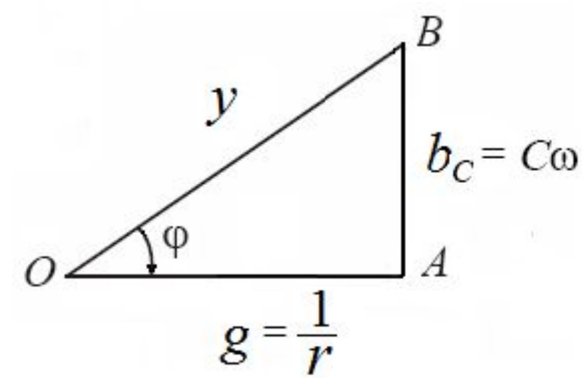
$$I_r = \frac{1}{r}U\,; \qquad I = \sqrt{I_r^2 + I_C^2}\,;$$

$$I_C = C\omega U\,; \qquad \varphi = \mathrm{arc\,tg}\frac{I_C}{I_r}\,.$$

Ёмкостной элемент

Треугольник проводимостей



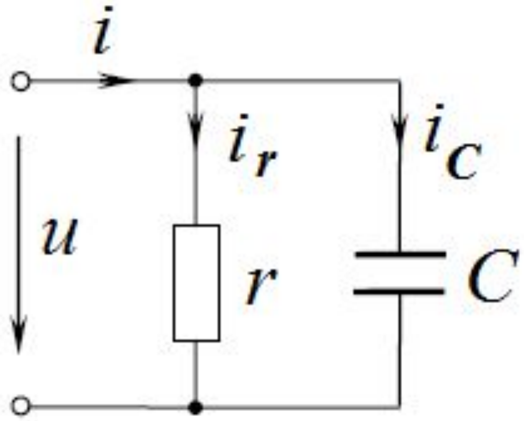


$$y = \sqrt{g^2 + b_C^2}; \qquad \varphi = \mathrm{Arc\,tg}\,\frac{b_C}{g};$$

$$g = y \cdot \cos\varphi; \quad b_C = y \cdot \sin\varphi.$$

Ёмкостной элемент

Взаимосвязь между током и напряжением конденсатора.



$$u = U_m \sin(\omega t + \psi_u)$$

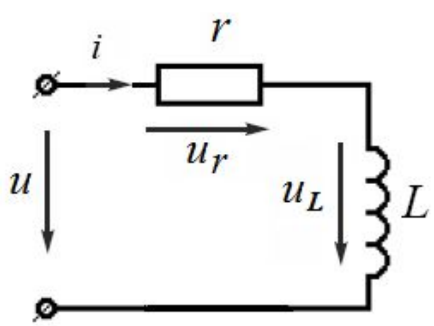
$$i = i_r + i_C,$$

$$\underline{I} = \frac{\underline{U}}{r} + \frac{\underline{U}}{-jX_C} = \left[\frac{1}{R} + \frac{1}{-jX_C}\right]\underline{U} = (g + j\,b_C)\,\underline{U}$$

$$\underline{I} = \underline{Y}_C\,\underline{U}; \qquad \underline{Y}_C = (g + j\,b_C)$$

Индуктивный элемент

В комплексной форме



$$i = I_m \sin(\omega t + \psi_i),$$

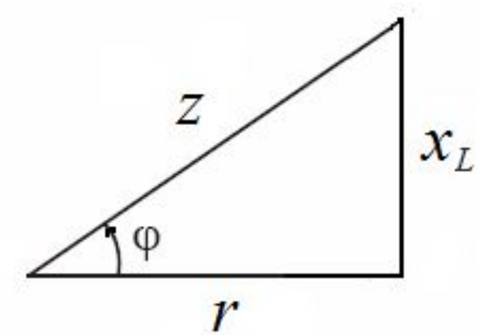
$$\underline{I}_m = I_m e^{j\psi_i};$$

$$\underline{I} = I e^{j\psi_i}$$

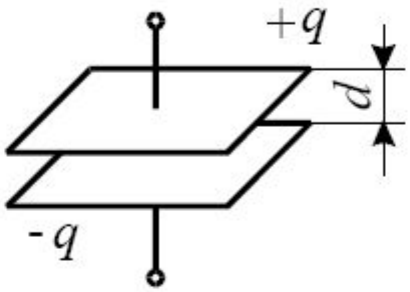
$$u = u_r + u_L, \quad u = r\,i + L\frac{di}{dt}, \quad \underline{U} = \underline{U}_r + \underline{U}_L.$$

$$\underline{U} = r\underline{I} + jX_L\underline{I} = (r + jX_L)\underline{I},$$

$$\underline{Z} = r + jX_L = Z e^{j\varphi}, \quad \underline{U} = \underline{Z}\,\underline{I}.$$



Ёмкостной элемент



$$i_C = \frac{dq}{dt}, \quad q = C u_C.$$

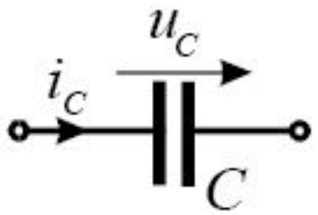
$$i_C = C \frac{du_C}{dt}.$$

Емкость C [Ф] - параметр, характеризующий способность участка электрической цепи или конденсатора накапливать энергию электрического поля.

Ёмкостной элемент

Идеальный ёмкостной элемент

$$u_C = U_{Cm}\sin(\omega t + \psi_u).$$



$$i_C = C\frac{du_C}{dt} = C\omega U_{Cm}\cos(\omega t + \psi_u),$$

$$i_C = C\omega U_{Cm}\sin\left(\omega t + \psi_u + \frac{\pi}{2}\right) = I_{Cm}\sin(\omega t + \psi_i).$$

$$\frac{1}{\omega C} = \frac{1}{2\pi f C} = x_C,$$

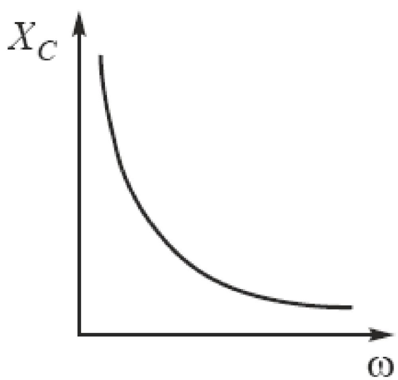
$$I_{Cm} = \frac{U_{Cm}}{X_C}$$

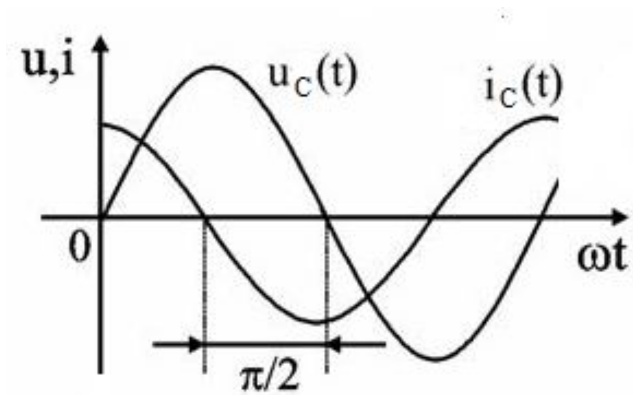
$$\psi_i = \psi_u + \frac{\pi}{2}$$

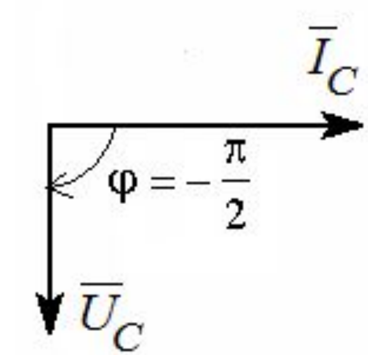
$$\varphi = \psi_u - \psi_i = -\frac{\pi}{2}$$

Ёмкостной элемент

Величина $x_C = 1/\omega C = 1/2\pi fC$ называется ёмкостным реактивным сопротивлением (Ом).



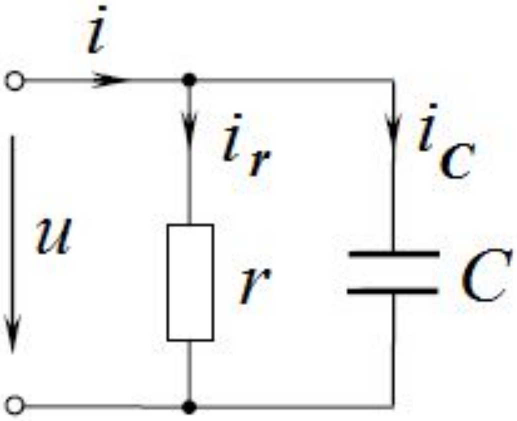




В комплексной форме: $\underline{I}_{Cm} = \dfrac{\underline{U}_{Cm}}{-jx_C}$ или $\underline{I}_C = \dfrac{\underline{U}_C}{-jx_C}$

Ёмкостной элемент

Конденсатор с потерями



$$u = U_m \sin(\omega t + \psi_u)$$

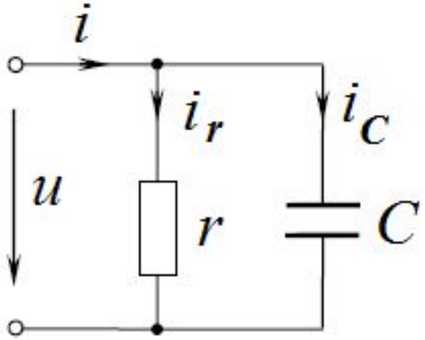
$$i = i_r + i_C, \qquad i = \frac{u}{r} + C\,\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{dt}},$$

$$i = \frac{1}{r}U_m \sin\left(\omega t + \psi_u\right) + C\omega\, U_m \sin\left(\omega t + \psi_u + \frac{\pi}{2}\right),$$

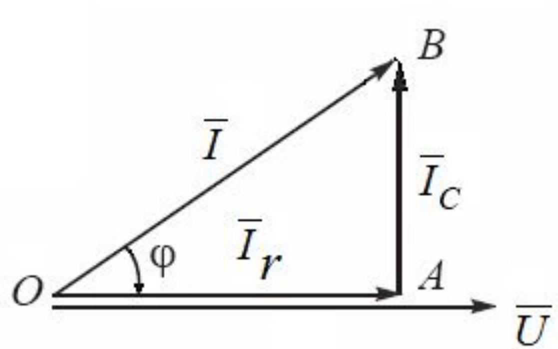
$$i = I_m \sin(\omega t + \psi_i). \qquad I_m \text{ - ?} \qquad \psi_i \text{ - ?}$$

Ёмкостной элемент

Построим векторную диаграмму для данной электрической цепи



$$\bar{I} = \bar{I}_r + \bar{I}_C$$

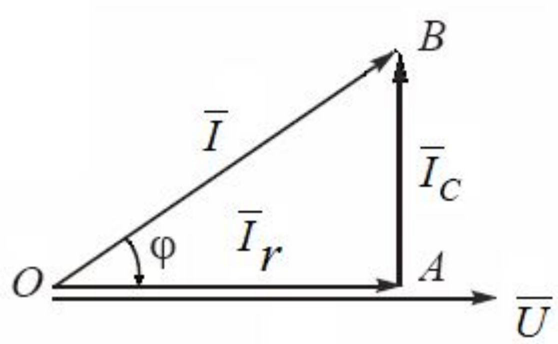


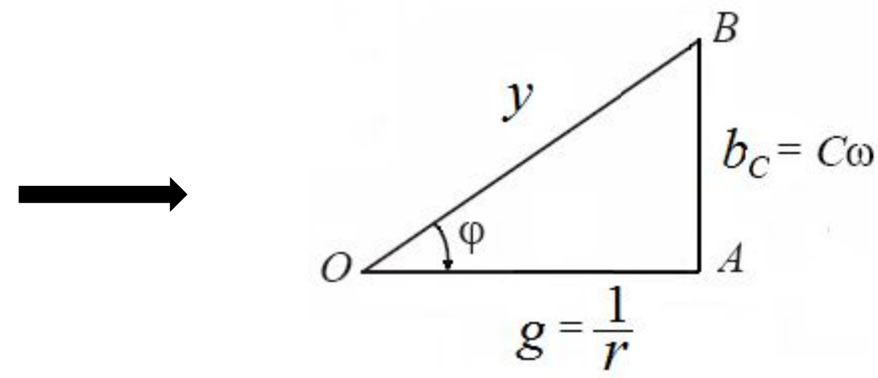
$$I_r = \frac{1}{r}U\,; \qquad I = \sqrt{I_r^2 + I_C^2}\,;$$

$$I_C = C\omega U\,; \qquad \varphi = \mathrm{arc\,tg}\frac{I_C}{I_r}\,.$$

Ёмкостной элемент

Треугольник проводимостей



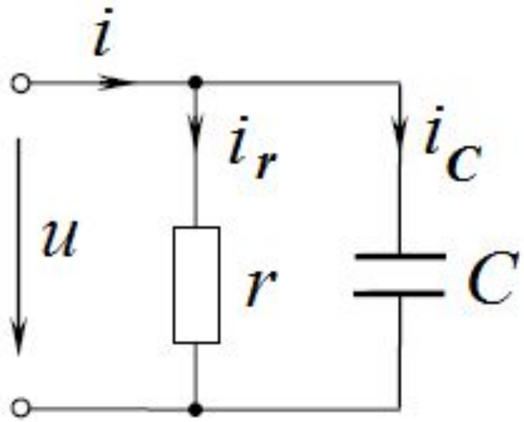


$$y = \sqrt{g^2 + b_C^2}; \qquad \varphi = \mathrm{Arc\,tg}\,\frac{b_C}{g};$$

$$g = y \cdot \cos\varphi; \quad b_C = y \cdot \sin\varphi.$$

Ёмкостной элемент

Взаимосвязь между током и напряжением конденсатора.



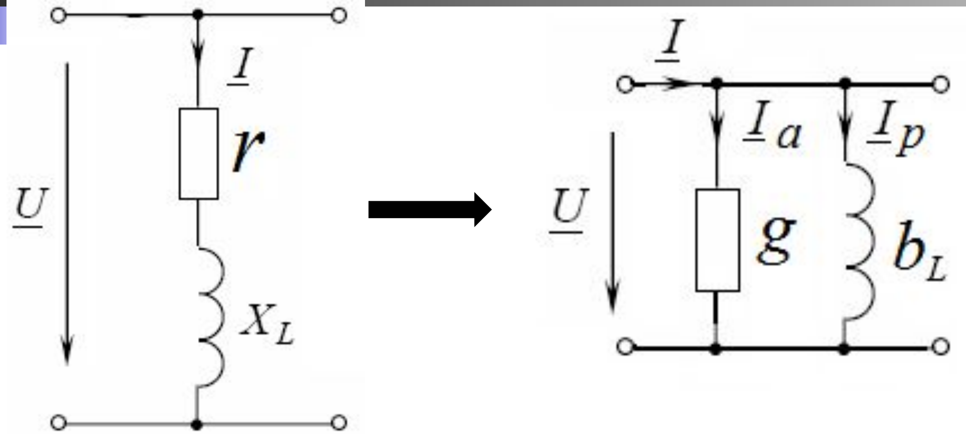
$$u = U_m \sin(\omega t + \psi_u)$$

$$i = i_r + i_C,$$

$$\underline{I} = \frac{\underline{U}}{r} + \frac{\underline{U}}{-jX_C} = \left[\frac{1}{R} + \frac{1}{-jX_C}\right]\underline{U} = (g + jb_C)\,\underline{U}$$

$$\underline{I} = \underline{Y}_C\,\underline{U}; \qquad \underline{Y}_C = (g + jb_C)$$

Схемы замещения двухполюсников



$$\underline{Z} = r + jX_L .$$

$$\underline{Y} = \frac{1}{\underline{Z}} = \frac{1}{r + jX_L} .$$

$$\underline{Y} = \frac{r - jX_L}{(r + jX_L)(r - jX_L)} = \frac{r - jX_L}{r^2 + X_L^2} = \frac{r}{r^2 + X_L^2} - j\frac{X_L}{r^2 + X_L^2} .$$

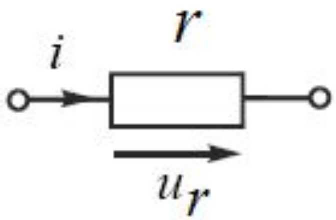
$$\frac{r}{r^2 + X_L^2} = g , \quad \frac{X_L}{r^2 + X_L^2} = b_L , \quad \sqrt{g^2 + b_L^2} = y .$$

$$\underline{Y} = g - j\,b_L = y\,\mathrm{e}^{-j\varphi} . \qquad \varphi = \mathrm{arc\,tg}\frac{b_L}{g} .$$

Мощность цепи переменного тока

Мгновенное значение мощности любой электрической цепи: $p(t) = u(t)\,i(t)$.

Резистивный элемент.



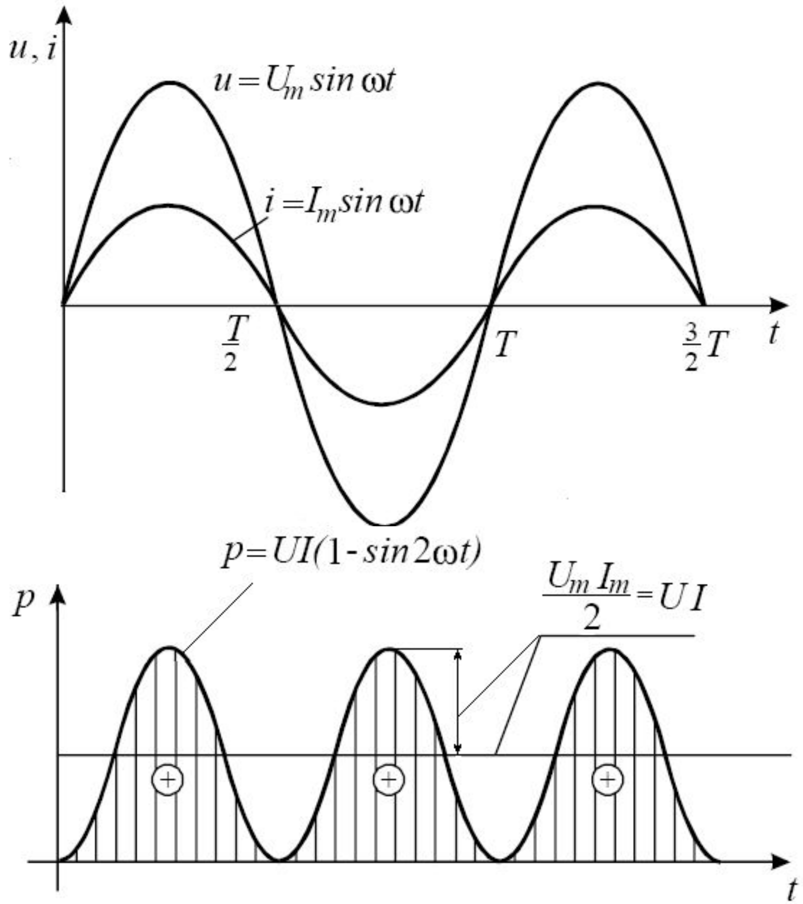
$$i = I_m \sin\omega t\,,$$

$$u = i\cdot r = r\cdot I_m \sin\omega t = U_m \sin\omega t\,,$$

$$p = u\cdot i = U_m\cdot I_m \sin\omega t \sin\omega t =$$

$$\frac{U_m\cdot I_m}{2}\left(1-\cos 2\omega t\right) = U\cdot I\cdot\left(1-\cos 2\omega t\right)$$

Мощность цепи переменного тока



1. Постоянная составляющая

$$\frac{U_m I_m}{2} = U I$$

2. Амплитуда переменной составляющей

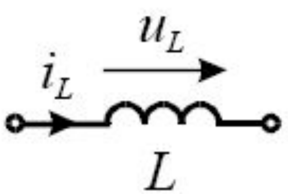
$$\frac{U_m I_m}{2} = U I$$

3. Частота изменения мощности $\omega_p = 2\omega_{i\,(u)}$
4. *p (t)* > 0
5. Энергия преобразуемая в резисторе

$$W = \int_0^t p dt = U \cdot I \int_0^t (1 - \cos 2\omega t) dt .$$

Мощность цепи переменного тока

Идеальный индуктивный элемент



$$i_L = I_m \sin \omega t, \qquad u_L = L\frac{di_L}{dt},$$

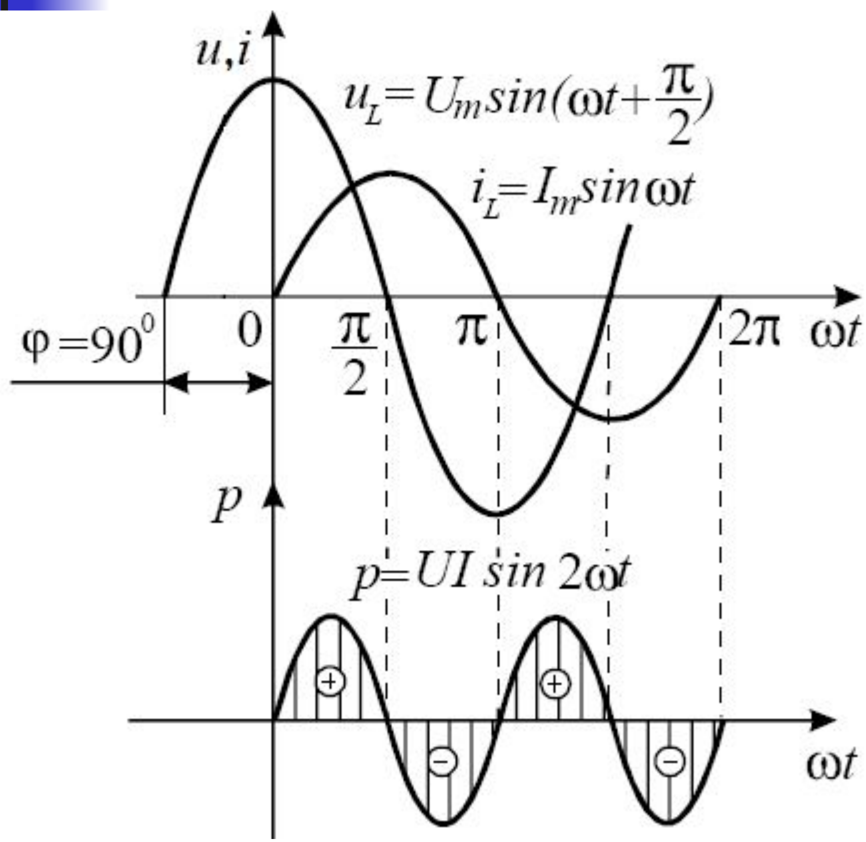
$$u_L = U_m \sin(\omega t + \frac{\pi}{2}).$$

$$p_L = u_L \cdot i_L = U_m \cos \omega t \cdot I_m \sin \omega t =$$

$$\frac{U_m \cdot I_m}{2} \sin 2\omega t = U \cdot I \sin 2\omega t = X_L \cdot I^2 \sin 2\omega t.$$

Амплитуда синусоиды, $x_L I^2 = Q_L$ - **реактивная индуктивная мощность** [*ВАр*].

Мощность цепи переменного тока

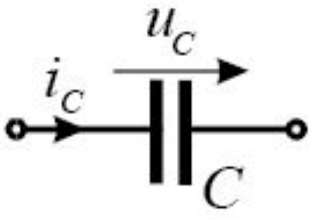


- Мгновенная мощность на индуктивном элементе имеет только переменную составляющую изменяющуюся с двойной частотой ω тока и напряжения.
- Максимальная энергия, запасенная в индуктивном элементе, определится по
.

$$W_m = \int_0^{T/4} p\,dt = \int_0^{T/4} U \cdot I \sin 2\omega t = \frac{L \cdot I_m^2}{2}.$$

Мощность цепи переменного тока

Идеальный ёмкостной элемент



$$u_c = U_m \cos\omega t, \quad i_c = C\frac{du_c}{dt}.$$

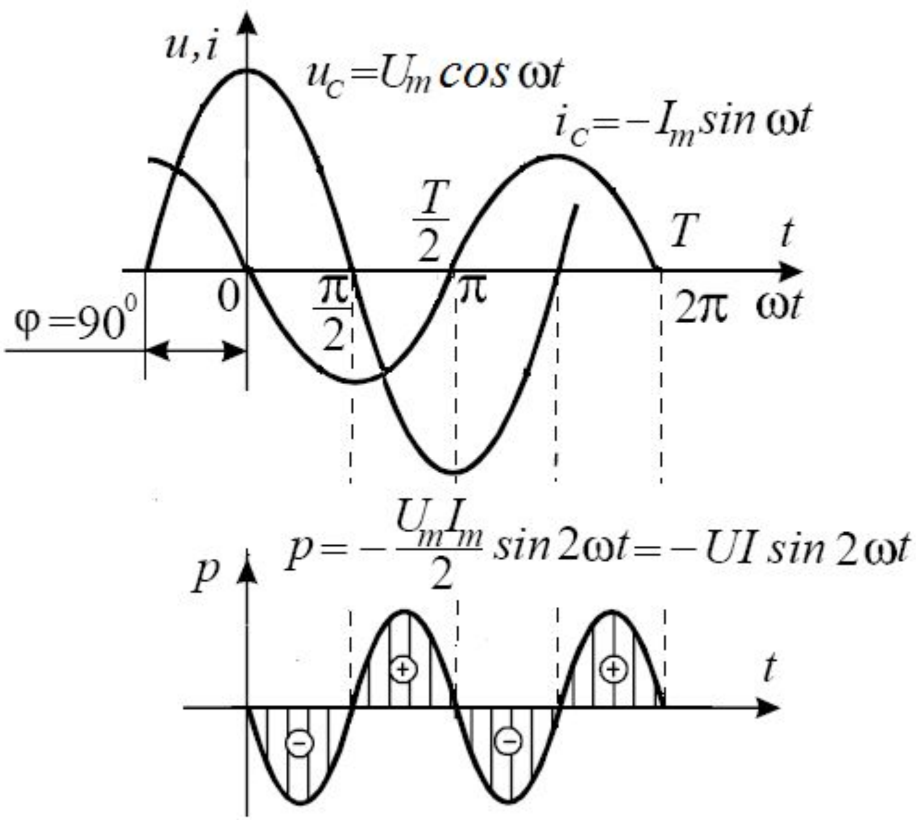
$$i_c = C\frac{du_c}{dt} = -\omega \cdot C \cdot U_m \sin\omega t = -I_m \sin\omega t.$$

$$p_c = u_c \cdot i_c = -U_m \cos\omega t \cdot I_m \sin\omega t =$$

$$-\frac{U_m \cdot I_m}{2}\sin 2\omega t = -U \cdot I \sin 2\omega t = -X_C I^2 \sin 2\omega t.$$

Амплитуда синусоиды, $x_C I^2 = Q_C$ - **реактивная емкостная мощность** [*ВАр*].

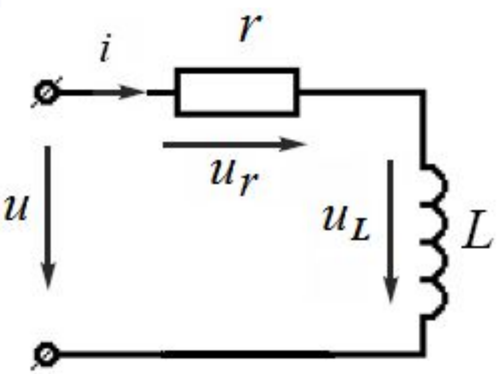
Мощность цепи переменного тока



- Мгновенная мощность на ёмкостном элементе имеет только переменную составляющую изменяю-щуюся с двойной частотой ω тока и напряжения.
- Максимальная энергия, запасенная в ёмкостном элементе, определится по формуле:

$$W_m=\int_{T/4}^{T/2} p\,dt=\int_{T/4}^{T/2}-U\cdot I\sin 2\omega t=-\frac{C\cdot U_m^2}{2}.$$

Мощность цепи переменного тока



$$i = I_m \sin \omega t\,,$$

$$u = U_m \sin(\omega t + \varphi)$$

$$p = u \cdot i = U_m \cdot I_m \sin \omega t \sin(\omega t + \varphi)\,,$$

учитывая, что

$\sin a \cdot \sin \beta = ½\,[\cos(a - \beta) - \cos(a + \beta)]$,

$$p = UI \cos \varphi - UI \cos(2\omega t + \varphi). \quad (*)$$

Мощность цепи переменного тока

Среднее значение мгновенной мощности за период синусоидального тока

$$P_{\text{ср}} = \frac{1}{T}\int_0^T p\,dt = \frac{U\,I}{T}\int_0^T \left[\cos\varphi - \cos(2\omega t + \varphi)\right] dt = U\,I\cos\varphi.$$

$P_{\text{ср}} = U\,I\cos\varphi = r\,I^2 = P$ - активная мощность.

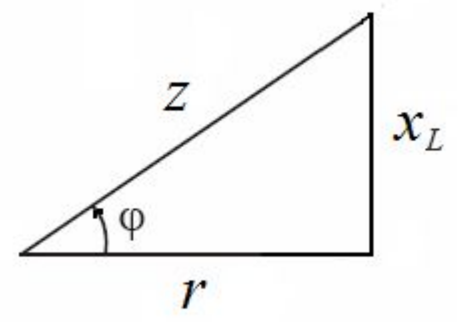
Учитывая, что $\cos(\alpha + \beta)] = \cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha \cdot \sin\beta$

(*) можно представить в виде

$p = UI\cos\varphi - UI(\cos 2\omega t\cos\varphi - \sin 2\omega t\sin\varphi) =$

$= UI\cos\varphi(1 - \cos 2\omega t) + UI\sin\varphi\sin 2\omega t.$

Мощность цепи переменного тока



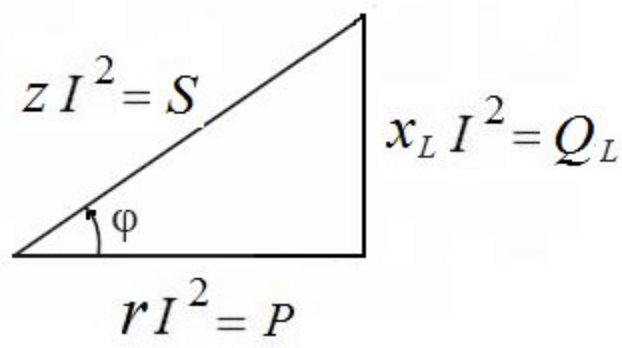
Из треугольника сопротивлений следует, что:

$\cos\varphi = r/z, \quad \sin\varphi = x_L / z.$

Тогда

$$p = r I^2 (1 - \cos 2\omega t) + x_L I^2 \sin 2\omega t = p_{\boldsymbol{r}} + p_{\boldsymbol{L}}.$$

Умножим все стороны треугольника сопротивлений на величину I^2.



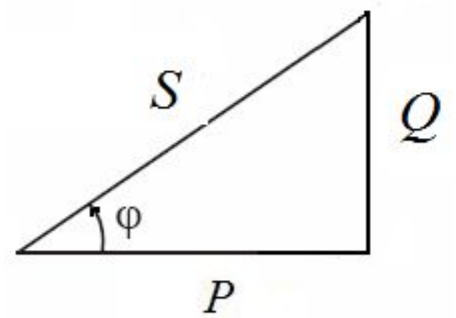
Получили треугольник мощностей, $S = UI$ – полная мощность [*ВА*].

Мощность цепи переменного тока

Из треугольника мощностей следует:

$$P = S\cos\varphi; \qquad Q = S\sin\varphi;$$

$$S = \sqrt{P^2 + Q^2};$$



$$\cos\varphi = P / S; \qquad \mathrm{tg}\,\varphi = Q / P.$$

В комплексной форме выражение мощности имеет вид

$$P + jQ = \check{S} = UI\cos\varphi + jUI\sin\varphi = UI\,e^{j\varphi}$$

$$= UI\,e^{j(\psi_u - \psi_i)} = U\,e^{j\psi_u}\,I\,e^{-j\psi_i};$$

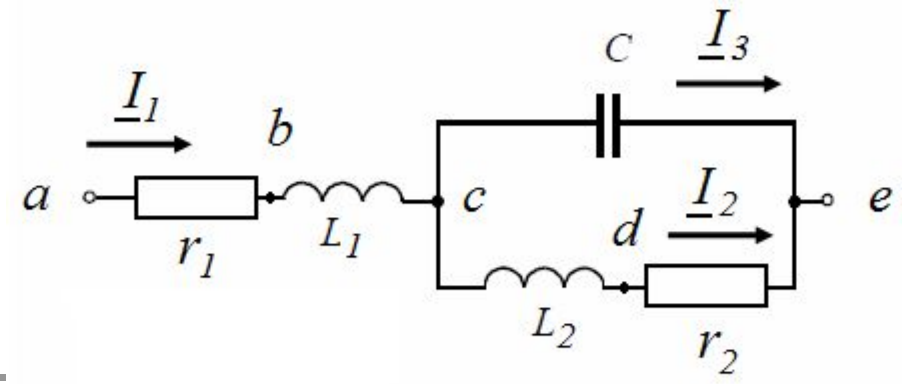
Комплекс полной мощности - $\check{S} = P + jQ = \check{S} = \underline{U}\,\overset{*}{\underline{I}}.$

Векторная диаграмма - ?

Векторная диаграмма - совокупность радиус-векторов, изображающих синусоидально изменяющиеся функции - ЭДС, напряжения, токи и т. д.

Топографическая диаграмма

Топографическая диаграмма представляют собой соединенные соответственно схеме электрической цепи точки (комплексные числа) на комплексной плоскости, отображающие их потенциалы.



Пример:

$U = 100$ В; $x_{L1} = 200$ Ом; $r_1 = 25$ Ом;

$x_{L2} = 50$ Ом; $r_2 = 20$ Ом; $x_C = 50$ Ом;

Определить токи в ветвях схемы, построить топографическую диаграмму.

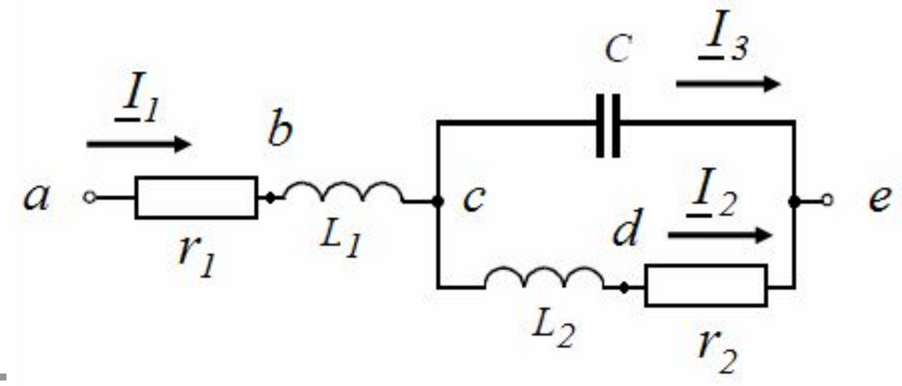
$$\underline{Z}_2 = r_2 + jx_{L2} = 20 + j\,50 \text{ Ом};$$

$$\underline{Z}_{23} = \frac{-jx_C \cdot \underline{Z}_2}{-jx_C + \underline{Z}_2} = \frac{-j\,50\,(20 + j\,50)}{-j\,50 + 20 + j\,50} = 125 - j\,50 \text{ Ом};$$

$$\underline{Z}_{ВХ} = r_1 + j\,X_{L1} + \underline{Z}_{23} = 25 + j\,200 + 125 - j\,50 =$$

$$= 150 + j\,150 = 211{,}5\,e^{j45^\circ} \text{ Ом}.$$

Пример:



Токи ?

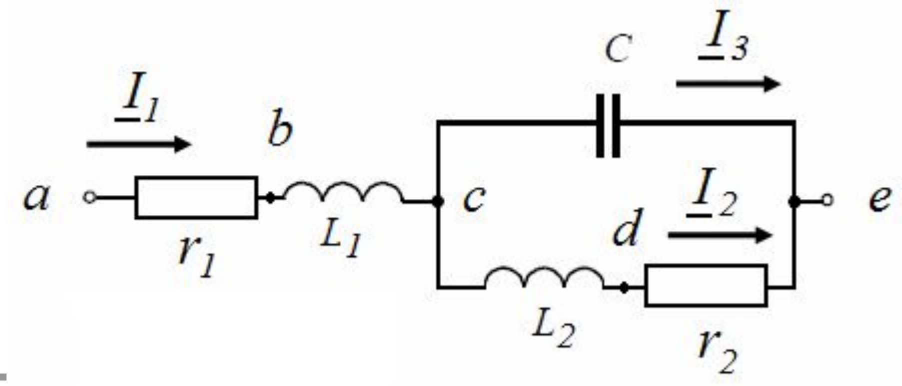
$$\underline{I}_1 = \underline{U} / \underline{Z}_{BX} = 120 / 211{,}5\, e^{j45^o} = 0{,}57\, e^{-j45^o} = 0{,}4 - j\, 0{,}4 \text{ (A)};$$

$$\underline{I}_2 = \underline{I}_1 \frac{-jX_C}{-jX_C + \underline{Z}_2} = 0{,}57\, e^{-j45^o} \frac{-j\,50}{-j\,50 + 20 + j\,50} =$$

$$= 1{,}43\, e^{-j135^o} = -1 - j \text{ (A)};$$

$$\underline{I}_3 = \underline{I}_1 - \underline{I}_2 = 1{,}4 + j\, 0{,}6 \text{ (A)}.$$

Пример:



Комплексы потенциалов точек схемы.

Примем $\underline{\varphi}_e = 0$.

$\underline{\varphi}_d = r_2 \underline{I}_2 = (-1 - j)20 = -20 - j20$ (B);

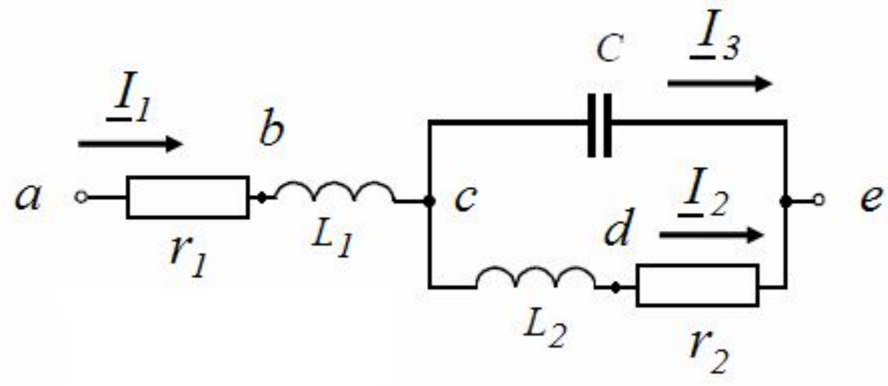
$\underline{\varphi}_c = \underline{\varphi}_d + j\,x_{L2}\underline{I}_2 = -20 - j20 + (-1 - j)\,j\,50 = 30 - j70$ (B);

$\underline{\varphi}_c = -j\,x_C\,\underline{I}_3 = -j\,50\,(1{,}4 + j\,0{,}6) = 30 - j70$ (B);

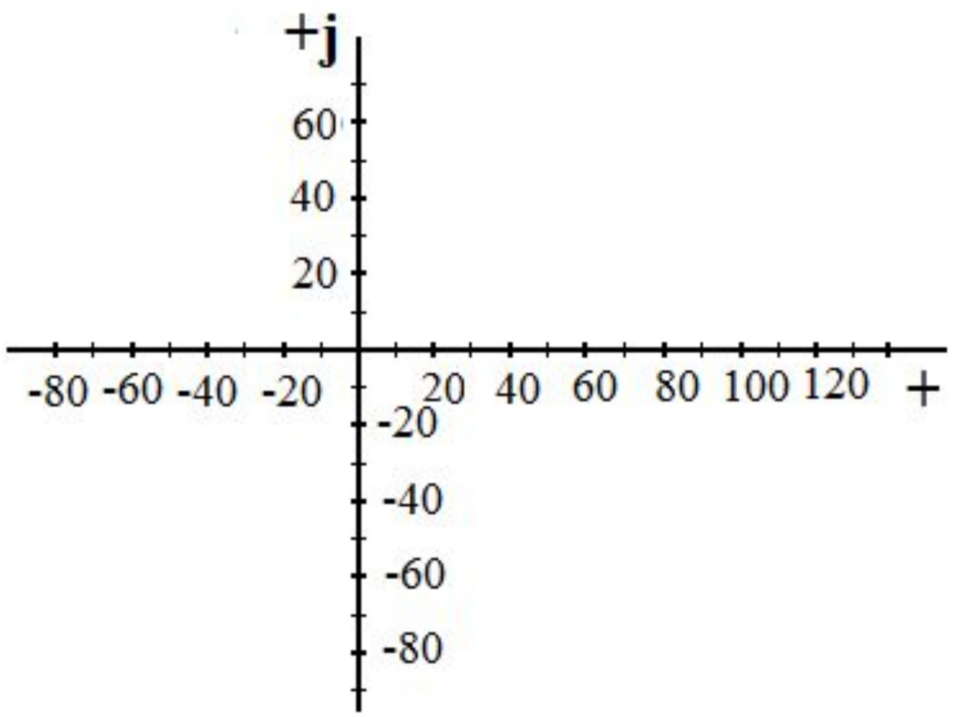
$\underline{\varphi}_b = \underline{\varphi}_c + j\,x_{L1}\underline{I}_1 = 30 - j70 + j\,200\,(0{,}4 - j\,0{,}4) = 110 + j\,10$ (B);

$\underline{\varphi}_a = \underline{\varphi}_b + r_1\underline{I}_1 = 110 + j\,10 + 25\,(0{,}4 - j\,0{,}4) = 120$ (B).

Пример:

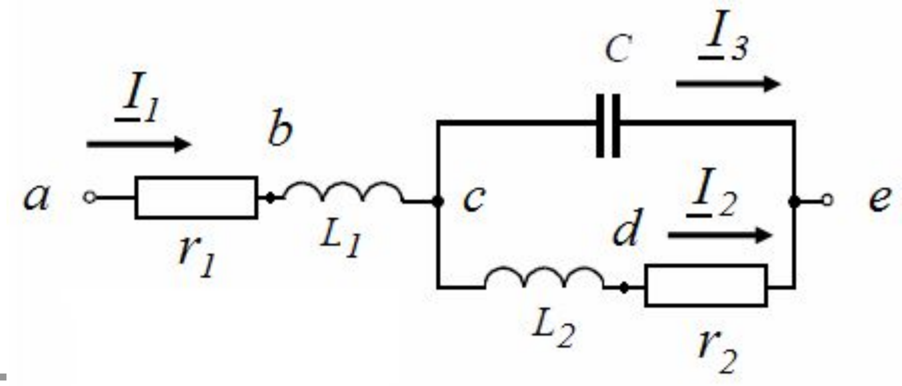


$\underline{I}_1$
b
C
$\underline{I}_3$
a
c
$\underline{I}_2$
e
d
r_1
L_1
L_2
r_2

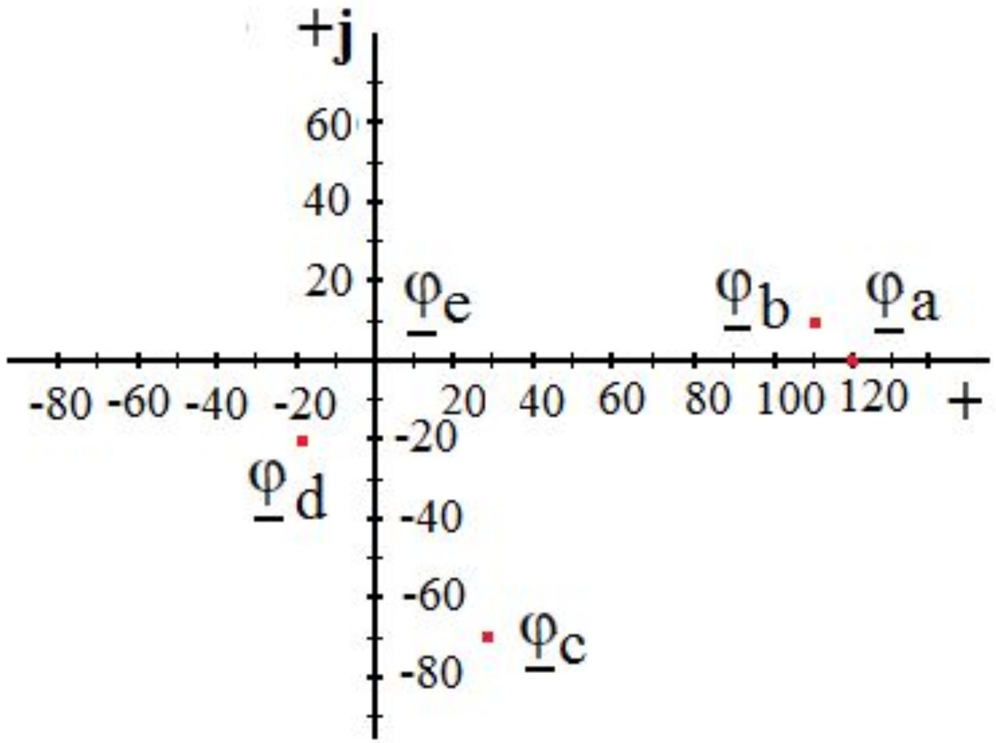


+j
60
40
20
-80 -60 -40 -20
20 40 60 80 100 120
+
-20
-40
-60
-80

Пример:

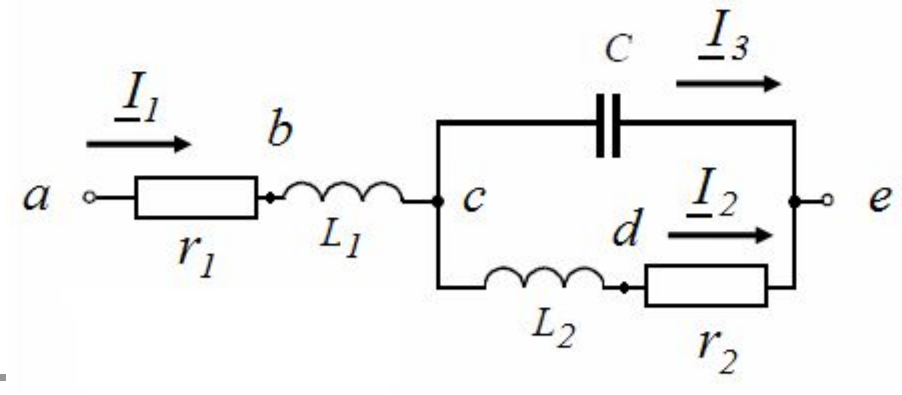


$\underline{I}_1$
$\underline{I}_3$
$\underline{I}_2$
a
b
c
d
e
C
r_1
L_1
L_2
r_2

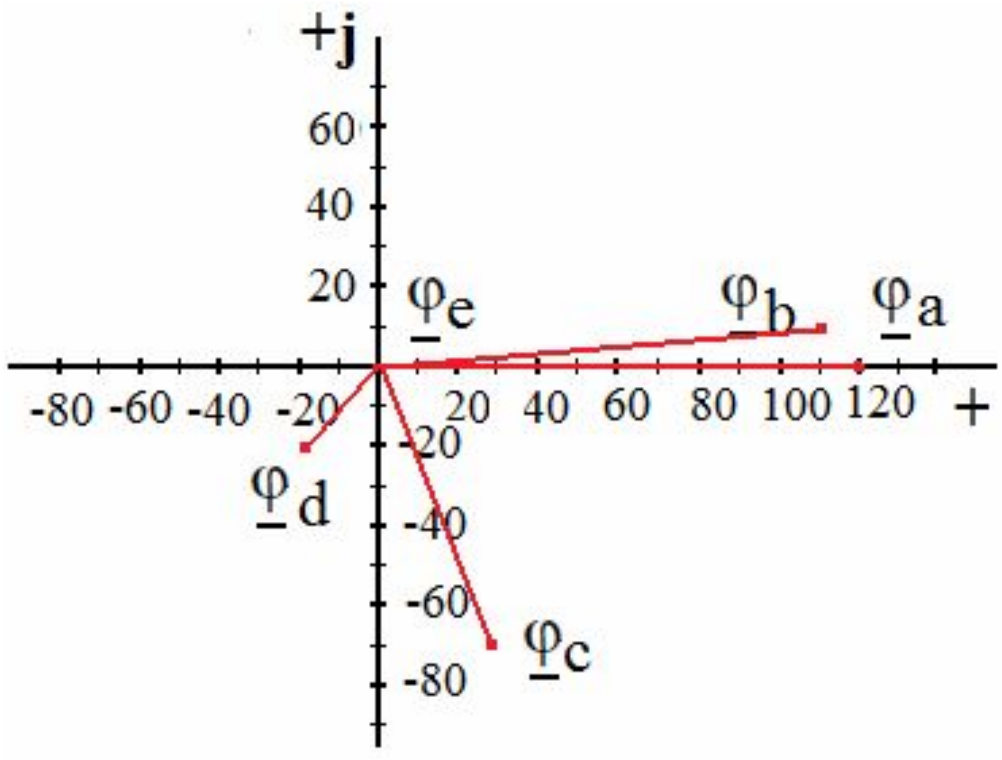


+j
+
$\underline{\varphi}_a$
$\underline{\varphi}_b$
$\underline{\varphi}_c$
$\underline{\varphi}_d$
$\underline{\varphi}_e$
60
40
20
-20
-40
-60
-80
-80 -60 -40 -20
20 40 60 80 100 120

Пример:

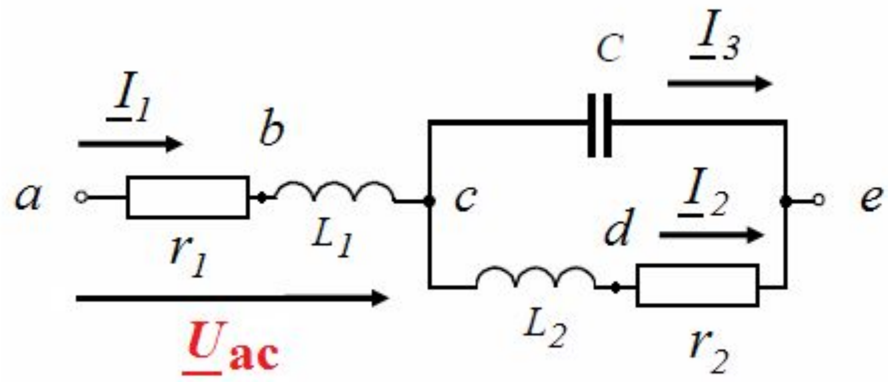


$\underline{I}_1$
$\underline{I}_2$
$\underline{I}_3$
a
b
c
d
e
C
r_1
L_1
L_2
r_2

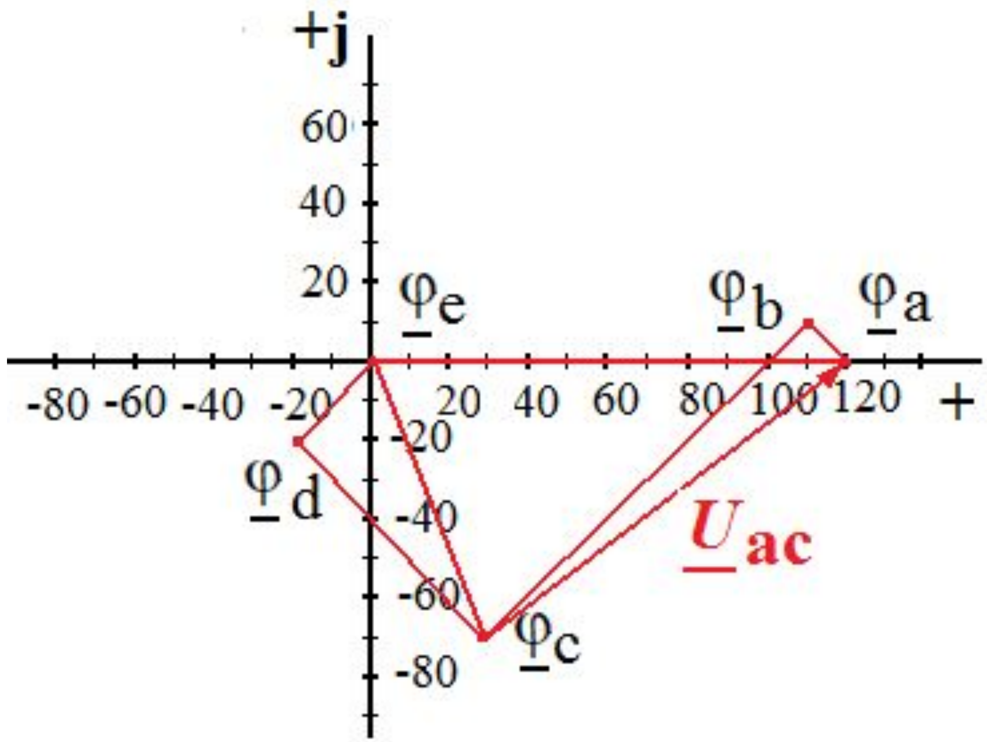


+j
60
40
20
-20
-40
-60
-80
-80 -60 -40 -20
20 40 60 80 100 120
+
$\underline{\varphi}_e$
$\underline{\varphi}_b$
$\underline{\varphi}_a$
$\underline{\varphi}_d$
$\underline{\varphi}_c$

Пример:

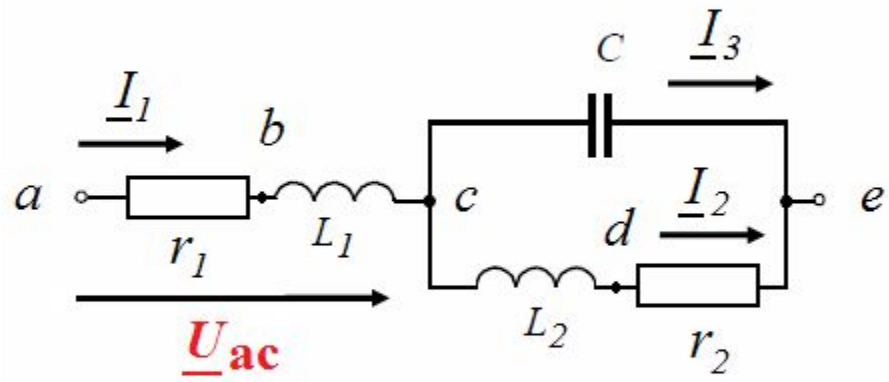


$\underline{I}_1$
$\underline{I}_3$
$\underline{I}_2$
a
b
c
d
e
C
r_1
L_1
L_2
r_2
$\underline{U}_{ac}$

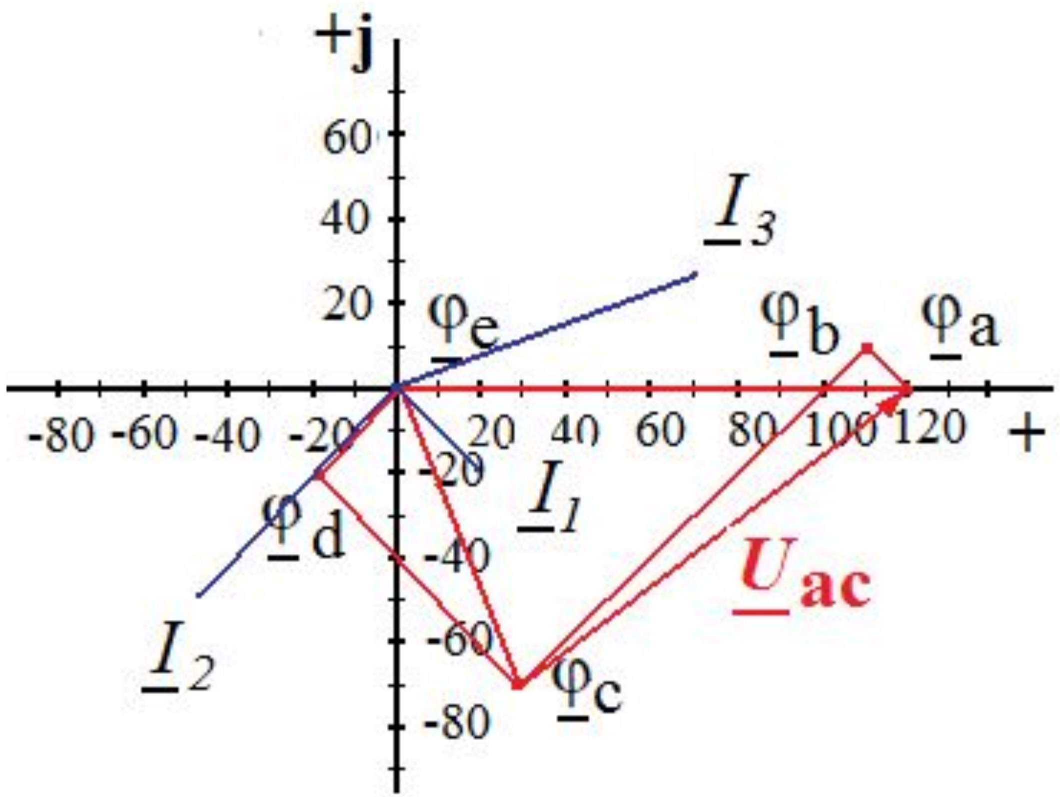


+j
+
$\underline{\varphi}_e$
$\underline{\varphi}_b$
$\underline{\varphi}_a$
$\underline{\varphi}_d$
$\underline{\varphi}_c$
$\underline{U}_{ac}$
-80 -60 -40 -20 20 40 60 80 100 120
60 40 20 -20 -40 -60 -80

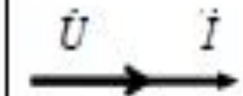
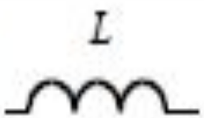
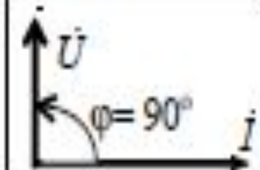
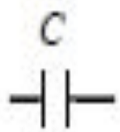
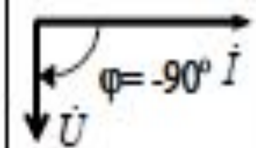
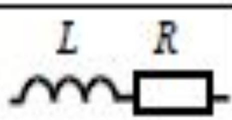
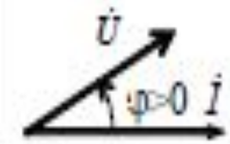
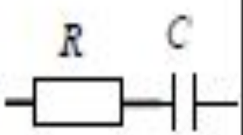
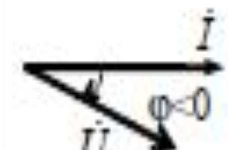
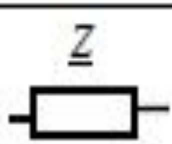
Пример:



a
b
c
d
e
C
$\underline{I}_1$
$\underline{I}_2$
$\underline{I}_3$
r_1
L_1
L_2
r_2
$\underline{U}_{ac}$



+j
+
60
40
20
-20
-40
-60
-80
-80 -60 -40 -20
20 40 60 80 100 120
$\underline{I}_3$
$\underline{I}_1$
$\underline{I}_2$
$\underline{\varphi}_e$
$\underline{\varphi}_b$
$\underline{\varphi}_a$
$\underline{\varphi}_d$
$\underline{\varphi}_c$
$\underline{U}_{ac}$

Элементы схем замещения		Запись закона Ома	Полное комплексное сопротивление, Ом	Модуль полного комплексного сопротивления, Ом	Аргумент полного комплексного сопротивления	Упрощенная векторная диаграмма
Название	Обозначение					
Идеальный резистивный элемент		$\dot I = \dot U_R / R$ $\dot U_R = R\dot I$	R	R	0	
Идеальный индуктивный элемент		$\dot I = \dot U_L/(jX_L)$, $\dot U_L = jX_L\dot I$	$jX_L = j\omega L =$ $= \omega L e^{j90^0}$	$X_L = \omega L$	90^o	
Идеальный емкостный элемент		$\dot I = \dot U_C/(-jX_C)$, $\dot U_C = -jX_C\dot I$	$-jX_C = -j/(\omega C) =$ $= [1/(\omega C)]e^{-j90^0}$	$X_C = 1/(\omega C)$	-90^o	
Реальная индуктивная катушка		$\dot I = \dot U/\underline{Z}$	$\underline{Z} = R + jX_L$	$Z = \sqrt{R^2 + X_L^2}$	$\varphi = \mathrm{arctg}\dfrac{X_L}{R}$	
Последовательное соединение резистивного и идеального емкостного элементов		$\dot I = \dot U/\underline{Z}$	$\underline{Z} = R - jX_C$	$Z = \sqrt{R^2 + X_C^2}$	$\varphi = \mathrm{arctg}\dfrac{-X_C}{R}$	
Обобщенный элемент		$\dot I = \dot U/\underline{Z}$	$\underline{Z} = R + j(X_L - X_C)$	$Z =$ $= \sqrt{R^2 + (X_L - X_C)^2}$	$\varphi = \mathrm{arctg}\dfrac{X_L - X_C}{R}$	