Проект «История Математического анализа»

Проект выполнил Воскобойников Артём
Ученик 10 «А» класса

1. Название проекта: «математический анализ»

2. Учебный предмет в рамках которого разрабатывается проект: математика

3. Тип проекта:

- по виду деятельности – информативный
- по организационной форме – индивидуальный
    - по содержанию – межпредметный
    - по времени выполнения – долговременный

4. Цель проекта:

С помощью различных источников информации: толковых словарей, учебной, научно-популярной, художественной литературы, видео-материалов и аудио материалов, осмыслить роль понятия как инструмента познания мира и определить его место в картине мира.

Подобрать пословицы и поговорки в которых можно увидеть определения и свойства понятия «Математический анализ»

5. Задачи проекта:

Пользуясь словарями найти различные значения термина понятия: «Математический анализ», проанализировать их с точки зрения математического определения понятия

Познакомиться с историей формирования понятия «Математический анализ» в математике, проследить тенденции его развития.

Описать особенности применения понятия в различных науках и сферах человеческой деятельности.

6. Руководитель проекта: Сенцова Наталья Ивановна

7. Возраст участников проекта: 17 лет Воскобойников Артём Сергеевич

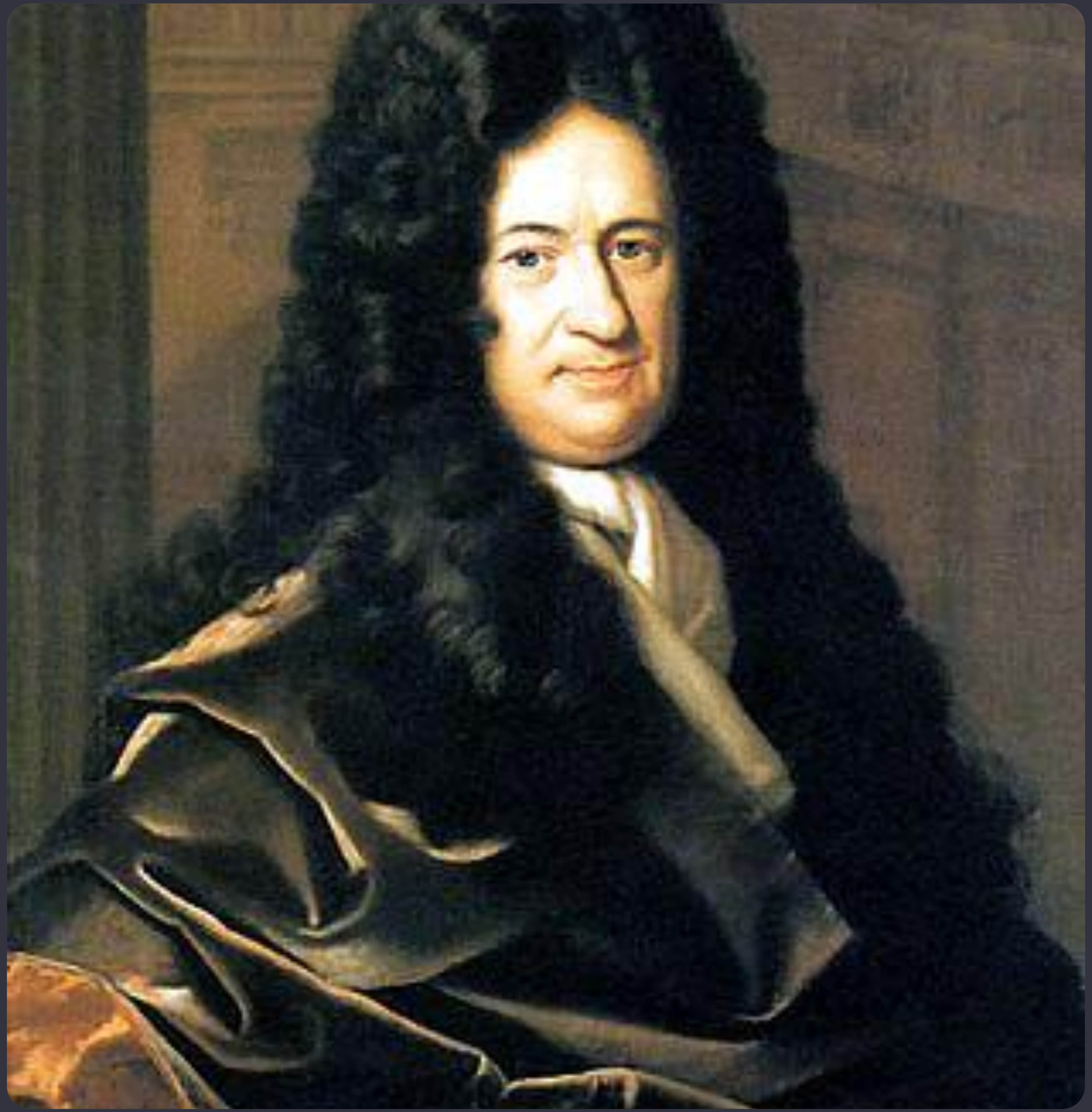
История

Математический анализ (классический математический анализ) — совокупность разделов математики, соответствующих историческому разделу под наименованием «анализ бесконечно малых», объединяет дифференциальное и интегральное исчисления.

На классическом математическом анализе основывается современный анализ, который рассматривается как одно из трёх основных направлений математики (наряду с алгеброй и геометрией). При этом термин «математический анализ» в классическом понимании используется, в основном, в учебных программах и материалах. В англо-американской традиции классическому математическому анализу соответствуют программы курсов с наименованием «исчисление» .

Лейбниц и его ученики

В конце 17 века вокруг Лейбница возникает кружок, виднейшими представителями которого были братья Бернулли (Якоб и Иоганн). В 1696, используя лекции И. Бернулли, Лопиталь написал первый учебник, излагавший новый метод в применении к теории плоских кривых. Он назвал его Анализ бесконечно малых, дав тем самым и одно из названий новому разделу математики. В основу изложения положено понятие переменных величин, между которыми имеется некоторая связь, из-за которой изменение одной влечёт изменение другой. У Лопиталя эта связь даётся при помощи плоских кривых: если M – подвижная точка плоской кривой, то её декартовы координаты x и y, именуемые абсциссой и ординатой кривой, суть переменные, причём изменение x влечёт изменение y. Понятие функции отсутствует: желая сказать, что зависимость переменных задана, Лопиталь говорит, что «известна природа кривой».



Эйлер

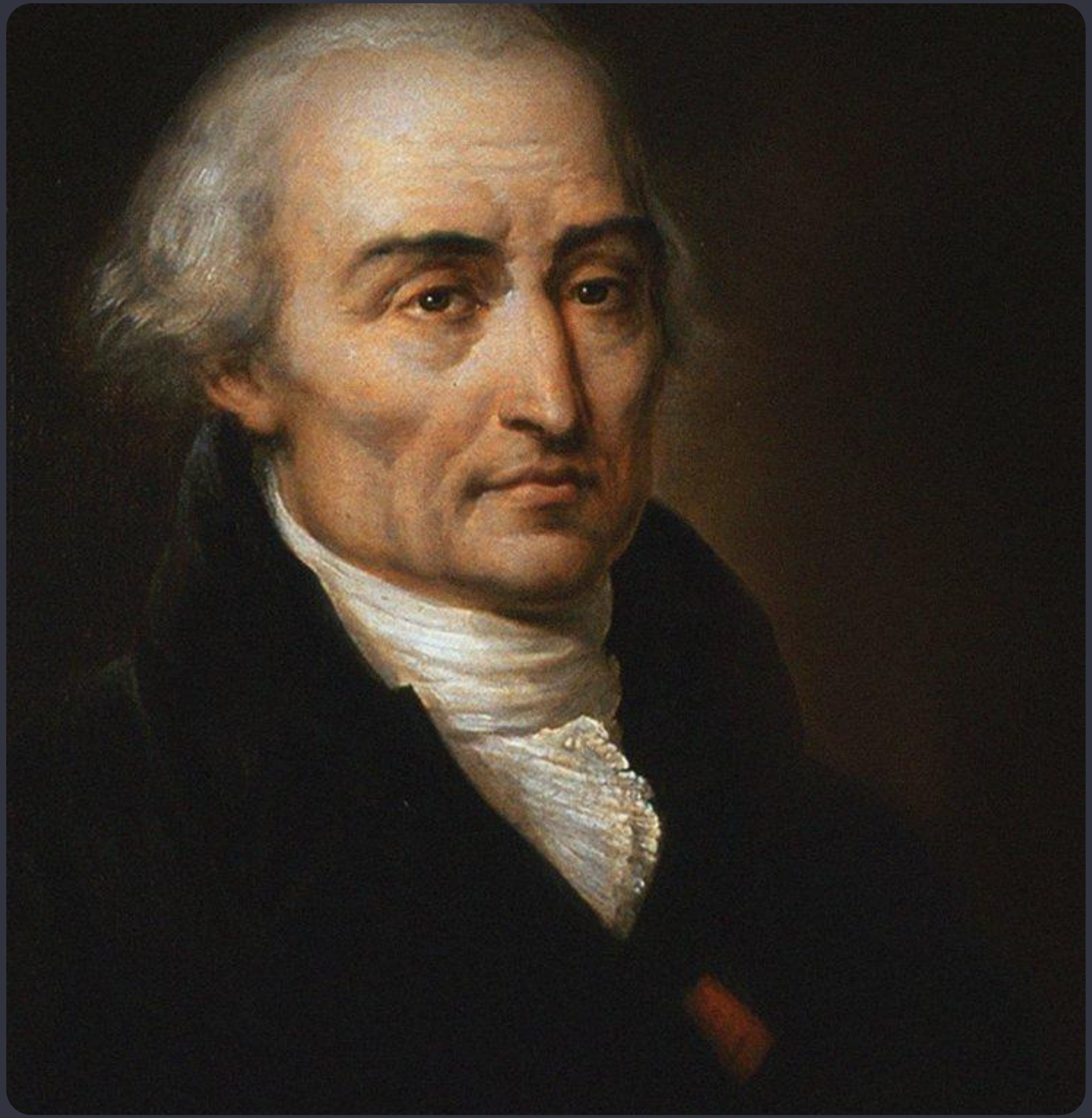
МАТЕМАТИК

Перемены, произошедшие за последующие полвека, отражены в обширном трактате Эйлера. Изложение анализа открывает двухтомное «Введение», где собраны изыскания о различных представлениях элементарных функций. Термин «функция» впервые появляется лишь в 1692 у Лейбница, однако на первые роли его выдвинул именно Эйлер. Изначальная трактовка понятия функции состояла в том, что функция — это выражение для счёта или аналитическое выражение.

«Функция переменного количества есть аналитическое выражение, составленное каким-либо образом из этого переменного количества и чисел или постоянных количеств.»

Подчёркивая, что «основное различие функций лежит в способе составления их из переменного и постоянных», Эйлер перечисляет действия, «посредством которых количества могут друг с другом сочетаться и перемешиваться; действиями этими являются: сложение и вычитание, умножение и деление, возведение в степень и извлечение корней; сюда же следует отнести также решение [алгебраических] уравнений. Кроме этих действий, называемых алгебраическими, существует много других, трансцендентных, как то: показательные, логарифмические и бесчисленные другие, доставляемые интегральным исчислением». Такая трактовка позволяла без труда обращаться с многозначными функциями и не требовала пояснения, над каким полем рассматривается функция: выражение для счёта определено для комплексных значений переменных даже тогда, когда для рассматриваемой задачи это не нужно.

Ланграж



Следующим крупным произведением, сыгравшим значительную роль в развитии концепции анализа, явилась Теория аналитических функций Ланграажа и обширный пересказ работ Лагранжа, выполненный Лакруа в несколько эклектической манере.

Желая избавиться от бесконечно малого вовсе, Лагранж обратил связь между производными и рядом Тейлора. Под аналитической функцией Лагранж понимал произвольную функцию, исследуемую методами анализа. Саму функцию он обозначил f(x) дав графический способ записи зависимости — ранее же Эйлер обходился одними переменными. Для применения методов анализа по мнению Лагранжа необходимо, чтобы функция разлагалась в ряд

$$f(x+h) = f(x) + ph + qh^2 + \ldots$$

коэффициенты которого будут новыми функциями x . Остаётся назвать p производной (дифференциальным коэффициентом) и обозначить его как f’(x). Таким образом, понятие производной вводится на второй странице трактата и без помощи бесконечно малых. Остаётся заметить, что

$$f'(x+h) = p + 2qh + \ldots$$

поэтому коэффициент q является удвоенной производной f(x), то есть

$$q = \frac{1}{2!} f''(x)$$

Такой подход к трактовке понятия производной используется в современной алгебре и послужил основой для создания теории аналитических функций Вейерштрасса.

Лагранж оперировал такими рядами как формальными и получил ряд замечательных теорем. В частности, впервые и вполне строго доказал разрешимость начальной задачи для обыкновенных дифференциальных уравнений в формальных степенных рядах.

Вопрос об оценке точности приближений, доставляемых частными суммами ряда Тейлора, впервые был поставлен именно Лагранжем: в конце Теории аналитических функций он вывел то, что теперь называют формулой Тейлора с остаточным членом в форме Лагранжа. Однако, в противоположность современным авторам, Лагранж не видел нужды в употреблении этого результата для обоснования сходимости ряда Тейлора.

Вопрос о том, действительно ли функции, употребимые в анализе, могут быть разложены в степенной ряд, впоследствии стал предметом дискуссии. Конечно, Лагранжу было известно, что в некоторых точках элементарные функции могут не разлагаться в степенной ряд, однако в этих точках они и не дифференцируемы ни в каком смысле. Коши в своём Алгебраическом анализе привёл в качестве контрпримера функцию

$$f(x) = e^{-1/x^2},$$

доопределённую нулём в нуле. Эта функция всюду гладкая на вещественной оси и в нуле имеет нулевой ряд Маклорена, который, следовательно, не сходится к значению f(x). Против этого примера Пуассон возразил, что Лагранж определял функцию как единое аналитическое выражение, в примере Коши же функция задана по-разному в нуле, и при x не равном 0. Лишь в конце XIX века Прингсхайм доказал, что существует бесконечно дифференцируемая функция, заданная единым выражением, ряд Маклорена для которой расходится. Пример такой функции представляет выражение.

$$\Psi(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\cos\left(3^k x\right)}{k!}$$

Дальнейшее развитие

В 18 веке были на основе классического анализа разработаны и практически применены такие новые ветви, как варионное исчисление, обыкновенные дифференциальные уравнения и дифференциальные уравнения в частных производных, преобразования Фурье и производящие функции. На фундаменте анализа возникла математическая физика, аналитические методы глубоко проникли в геометрию и даже в теорию чисел.

В 19 веке Коши первым дал анализу твёрдое логическое обоснование, введя понятие предела последовательности, он же открыл новую страницу комплексного анализа. Пуассон, Лиувулль, Фурье и другие изучали дифференциальные уравнения в частных производных и гармонический анализ.

В последней трети 19 века Вейерштрасс создал первую строгую теорию множества вещественных чисел. В это же время попытки усовершенствования теоремы об интегрируемости по Риману привели к созданию классификации разрывности вещественных функций. Также были открыты «патологические» примеры (нигде не дифференцируемые непрерывные функции, заполняющие пространство кривые). В связи с этим Жордан разработал теорию меры, а Кантор — теорию множест, и в начале 20 века математический анализ был формализован с их помощью. Другим важным событием XX века стала разработка Робинсоном нестандартного анализа — альтернативного подхода к обоснованию анализа; притом средствами нестандартного анализа обнаружены несколько новых результатов, которые не были известны в классическом анализе, но принципиально могли бы быть получены и классическими средствами.

Применение

Математический анализ широко применяется в физике, информатики, статистике, технике, экономике, бизнесе, финансах, медицине, демографии и других областях, в которых для решения проблемы может быть построена математическая модель и необходимо найти её оптимальное решение.

В частности, практически все понятия в классической механике и электромагнетизме неразрывно связаны между собой именно средствами классического математического анализа. Например, при известном распределении плотности объекта его масса, моменты инерции , а также полная энергия в потенциальном поле могут быть найдены с помощью дифференциального исчисления. Другой яркий пример применения математического анализа в механике — второй закон Ньютона: исторически сложилось так, что в нём напрямую используется термин «скорость изменения» в формулировке «Сила = масса × ускорение», так как ускорение — производная по времени от скорости или вторая производная по времени от траектории или пространственного положения.

Теория электромагнетизма Максвелла и общая теория относительно Эйнштейна также выражаются языком дифференциального исчисления. В химии исчисление используется при определении скорости реакций и скорости радиоактивного распада. В биологии с помощью исчисления делается расчёт динамики популяций, учитывающей данные по воспроизводству и смертности вида.

Математический анализ может использоваться в сочетании с другими математическими дисциплинами. Например, оно может использоваться совместно с линейной алгебры, чтобы найти «наилучшую» линейную аппроксимацию для множества точек в области определения. Или его можно использовать в теории вероятностей для определения вероятности непрерывной случайной величины в зависимости от плотности распределения. В аналитической геометрии при изучении графиков функций исчисление используется для поиска точек максимума и минимума, наклона, кривизны и точек перегиба.

Теорема Грина, которая устанавливает соотношение между криволинейным интегралом по простой замкнутой кривой C и двойным интегралом по плоской области D, ограниченной этой кривой C, применяется в инструменте, известном как планиметр, который используется для расчёта площади плоской поверхности на чертеже. Например, его можно использовать для расчёта площади фигуры неправильной формы: цветника или бассейна при проектировании своего участка.

Дискретная теорема Грина устанавливающая соотношение между двойным интегралом функции по периметру прямоугольника и линейной комбинацией значений первообразной по угловым точкам прямоугольника, позволяет быстро вычислить сумму площадей прямоугольных областей. Например, она может использоваться для эффективного расчёта суммы прямоугольных областей на изображениях, для того чтобы быстро находить свойства и идентифицировать объекты.

В области медицины математический анализ применяется для нахождения оптимального угла ветвления кровеносных сосудов, максимизирующего поток. Зная закон затухания применительно к выводу какого-либо препарата из тела, исчисление используется для оценки уровня дозирования этих препаратов. В ядерной медицине исчисление используется для разработки моделей переноса излучения в целевой терапии опухолей.

В экономике средства математического анализа позволяют определить максимальную прибыль с использованием понятий предельных издержек и предельного дохода.
Математический анализ используется также для нахождения приближённых решений уравнений. На практике это стандартный способ решения дифференциальных уравнениях и нахождение корней в большинстве приложений. Примерами являются метод Ньютона, метод простой итерации и метод линейной аппроксимации. Например, при расчётах траектории космических аппаратов используется вариант метода Эйлера для аппроксимации криволинейных курсов движения при отсутствии силы тяжести

Спасибо
За
Внимание
!