Тема: Обчислення границь функцій. Перша та друга важливі границі.

1. Обчислення границь функцій.

У найпростіших випадках знаходження границі $\lim\limits_{x \to x_0} f(x)$ зводиться до підстановки у функцію $f(x)$ граничного значення аргументу x_0. Але часто така підстановка приводить до невизначених виразів.

Операцію знаходження границі у цих випадках називають **розкриттям невизначеності**.

1. Невизначеність вигляду $\left(\frac{\infty}{\infty}\right)$, що задана відношенням двох многочленів. Щоб знайти границю при $x \to \infty$, тобто

$$\lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = \left(\frac{\infty}{\infty}\right)$$

треба чисельник і знаменник дробу розділити на x^k, де k – найвищій степінь цих многочленів, і використати що

$$\lim_{x\to\infty} \frac{1}{x^{\kappa}} = 0$$

Приклад. Знайти границю

$$\lim_{x \to \infty} \frac{3x^3 + 2x^2 - 4}{2 + 3x - 4x^3}$$

Розв'язання. Маємо невизначеність вигляду $\left(\frac{\infty}{\infty}\right)$.

Для знаходження границі поділимо чисельник і знаменник дробу на x^3

$$\lim_{x\to\infty}\frac{3x^3+2x^2-4}{2+3x-4x^3}=\left(\frac{\infty}{\infty}\right)=\lim_{x\to\infty}\frac{3+\frac{2}{x}-\frac{4}{x^3}}{\frac{2}{x^3}+\frac{3}{x^2}-4}=$$

$$=\frac{3+2\lim\limits_{x\to\infty}\frac{1}{x}-4\lim\limits_{x\to\infty}\frac{1}{x^3}}{2\lim\limits_{x\to\infty}\frac{1}{x^3}+3\lim\limits_{x\to\infty}\frac{1}{x^2}-4}=-\frac{3}{4}$$

2. Невизначеність вигляду $\left(\dfrac{0}{0}\right)$, що задана відношенням двох многочленів. Щоб знайти границю при $x \to x_0$, тобто

$$\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)}{g(x)}=\left(\frac{0}{0}\right)$$

, треба в чисельнику і знаменнику виділити критичний множник $x - x_0$ і скоротити на нього дріб.

Приклад. Знайти $$\lim_{x\to -2}\frac{x^3+8}{x^2-2x-8}$$

Розв’язання. Підставляючи значення $x_0 = -2$ у вирази, які стоять у чисельнику і знаменнику дробу, переконуємося, що маємо невизначеність вигляду $\left(\frac{0}{0}\right)$

Виділяємо у чисельнику і в знаменнику критичний множник $x - x_0$, тобто $x + 2$:

$$x^3 + 8 = (x + 2)(x^2 - 2x + 4);$$

$$x^2 - 2x - 8 = (x + 2)(x - 4).$$

$$\lim_{x\to -2}\frac{x^3+8}{x^2-2x-8}=\left(\frac{0}{0}\right)=\lim_{x\to -2}\frac{(x+2)(x^2-2x+4)}{(x+2)(x-4)}=$$

$$=\lim_{x\to -2}\frac{x^2-2x+4}{x-4}= -2\ .$$

3. Невизначеність вигляду $\left(\frac{0}{0}\right)$, що задана ірраціональними виразами

При знаходженні границі виразів з ірраціональностями використовують такий прийом: переведення ірраціональності із знаменника в чисельник або, навпаки, з чисельника в знаменник (домноження чисельника і знаменника на вираз, спряжений ірраціональності).

4. Розкриття невизначеностей вигляду

$$(\infty - \infty); (0 \cdot \infty)$$

При розкритті цих невизначеностей їх попередньо зводять до невизначеностей вигляду $\left(\dfrac{0}{0}\right)$ або $\left(\dfrac{\infty}{\infty}\right)$

Приклад. Знайти границю

$$\lim_{x \to +\infty} \left(\sqrt{x(x+1)} - x \right)$$

Розв'язання. Маємо невизначеність вигляду $\left(\infty - \infty\right)$. Домножимо і поділимо вираз $\sqrt{x(x+1)} - x$ на спряжений, тобто на $\sqrt{x(x+1)} + x$

$$\lim_{x\to+\infty}(\sqrt{x(x+1)}-x)=(\infty-\infty)=$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{(\sqrt{x(x+1)}-x)(\sqrt{x(x+1)}+x)}{\sqrt{x(x+1)}+x}=$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{x(x+1)-x^2}{\sqrt{x(x+1)}+x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{x}{\sqrt{x^2+x}+x}=$$

$$=\left(\frac{\infty}{\infty}\right)=\lim_{x\to+\infty}\frac{\frac{x}{x}}{\sqrt{\frac{x^2}{x^2}+\frac{x}{x^2}}+\frac{x}{x}}=$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{\sqrt{1+\frac{1}{x}}+1}=\frac{1}{2}$$

2. Перша та друга важливі границі.

Невизначеності виду $\left(\frac{0}{0}\right)$, задані виразами, що містять тригонометричні функції, часто розкривають за допомогою **першої важливої границі:**

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1$$

Наслідки.

$$1.\lim_{x\to 0}\frac{\sin kx}{x}=k\ \ (k=\text{const})$$

$$2.\lim_{x\to 0}\frac{\sin kx}{\sin mx}=\frac{k}{m}\ \ (k,m-\text{сталі},\ m\neq 0)$$

$$3.\ \lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{tg} x}{x}=1$$

$$4.\ \lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{arctg} x}{x}=1$$

$$5.\ \lim_{x\to 0}\frac{\arcsin x}{x}=1$$

Приклад. Знайти $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos x}{x^2}$

Розв'язання.

$$\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x^2}=\left(\frac{0}{0}\right)=$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{2\sin^2\dfrac{x}{2}}{x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{2\sin\dfrac{x}{2}\cdot\sin\dfrac{x}{2}}{x\cdot x}=\frac{1}{2}$$

Друга важлива границя

$$\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^{x}=e$$

використовується при розкритті **невизначеності** $\left(1^{\infty}\right)$

Трансцендентне число *e* наближено дорівнює *e* ≈2,71184….. і його називають числом Ейлера.

Наслідки.

$$1.\ \lim_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}} = e$$

$$2.\ \lim_{x\to \infty}\left(1+\frac{k}{x}\right)^{x} = e^{k}$$

$$3.\ \lim_{x\to 0}(1+kx)^{\frac{1}{x}} = e^{k}$$

3. Порівняння нескінченно малих.

Дві нескінченно малі функції порівнюються між собою за допомогою дослідження їхнього відношення. Нехай $\alpha(x)$ і $\beta(x)$ – нескінченно малі функції при $x \to x_0$, тобто $\lim\limits_{x \to x_0} \alpha(x) = 0$, $\lim\limits_{x \to x_0} \beta(x) = 0$

1. Якщо $\lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{\alpha(x)}{\beta(x)} = C \neq 0 \ (C = \text{const}),$

то функції $\alpha(x)$ і $\beta(x)$ називаються **нескінченно малими одного порядку** при $x \to x_0$

2. Якщо $\lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{\alpha(x)}{\beta(x)} = 0$,

то функція $\alpha(x)$ називається **нескінченно малою вищого порядку** ніж $\beta(x)$ при $x \to x_0$

3. Якщо $\lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{\alpha(x)}{\beta(x)} = \infty$,

то функція $\alpha(x)$ називається **нескінченно малою нижчого порядку,** ніж $\beta(x)$ при $x \to x_0$

4. Якщо $\lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{\alpha(x)}{[\beta(x)]^k} = C$,

де $k > 0$ і $C \neq 0$ – сталі, то функцію $\alpha(x)$ називають **нескінченно малою *k*-го порядку** відносно $\beta(x)$ при $x \to x_0$

5. Нескінченно малі функції $\alpha(x)$ і $\beta(x)$ називаються **непорівнянними** при $x \to x_0$, якщо в точці x_0 не існує границі їхнього відношення.

6. Якщо $\lim\limits_{x \to x_0} \frac{\alpha(x)}{\beta(x)} = 1$,

то нескінченно малі $\alpha(x)$ та $\beta(x)$ називаються **еквівалентними нескінченно малими** при $x \to x_0$. Позначається це так:

$$\alpha(x) \sim \beta(x).$$

Властивості еквівалентних нескінченно малих функцій.

Теорема. Нескінченно малі функції $\alpha(x)$ та $\beta(x)$ еквівалентні при $x \to x_0$ тоді і тільки тоді, коли різниця $\alpha(x) - \beta(x)$ є нескінченно малою функцією вищого порядку, ніж кожна з функцій $\alpha(x)$ та $\beta(x)$.

Теорема. Нехай $\alpha(x) \sim \alpha_1(x)$, $\beta(x) \sim \beta_1(x)$ при $x \to x_0$. Якщо існує границя

$\lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{\alpha(x)}{\beta(x)}$, то існує і границя $\lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{\alpha_1(x)}{\beta_1(x)}$,

і ці границі рівні:

$$\lim_{x \to x_0} \frac{\alpha(x)}{\beta(x)} = \lim_{x \to x_0} \frac{\alpha_1(x)}{\beta_1(x)}$$

Еквівалентні нескінченно малі величини.

Нехай $\lim\limits_{x \to x_0} \alpha(x) = 0$, тобто $\alpha(x)$ є

нескінченно малою функцією при $x \to x_0$
Тоді мають місце наступні еквівалентності в околі точки $x = x_0$

$$\sin\alpha \sim \alpha$$

$$\arcsin\alpha \sim \alpha$$

$$tg\,\alpha \sim \alpha$$

$$arctg\,\alpha \sim \alpha$$

$$1-\cos\alpha \sim \frac{\alpha^2}{2}$$

$$e^{\alpha}-1 \sim \alpha$$

$$\ln(1+\alpha) \sim \alpha$$

$$\log_a(1+\alpha) \sim \alpha\log_a e$$