МИНИСТЕРСТВО ПРОСВЕЩЕНИЯ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ
ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ БЮДЖЕТНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
«ЧЕЧЕНСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ ПЕДАГОГИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ»

Институт дистанционного и заочного обучения
Кафедра математического анализа

ПРИБЛИЖЕННЫЕ ВЫЧИСЛЕНИЯ В МАТЕМАТИЧЕСКОМ АНАЛИЗЕ

Выполнила: студентка 6 курса Эдильсултанова П.У.
Руководитель: к.ф-м.н., доцент Закриева Л.А.

Актуальность исследования

- Многие задачи математического анализа невозможно решить точными методами. Это относится к задачам, где нужно найти числовое значение некоторой величины. Например, найти значение функции в некоторой точке, вычислить площадь плоской фигуры, найти значение определенного интеграла, найти корни нелинейного уравнения, найти частное решение дифференциального уравнения и другие задачи. Это связано с громоздкими аналитическими формулами, заданием функции таблицей, сложностями с вычислением интегралов и т.д. Если для решения задачи достаточно получить только числовое значение, то прибегают к численным методам и получают приближенные значения величин. Эти значения находятся с помощью конечного числа арифметических действий над числами.
- Стремительное внедрение математики в научные исследования в различных отраслях, появление информационных технологий привело к бурному развитию численных методов решения математических задач.

Цели и задачи исследования

Цель исследования

- *изучить приближенные методы решения математических задач в математическом анализе функций одной переменной.*

Задачи исследования

- ознакомиться с научной и учебной литературой по выбранной теме;
- изучить методы приближенного вычисления корней уравнений;
- изучить методы приближенного вычисления определенных интегралов;
- изучить приближенные методы вычислений с помощью дифференциала;
- изучить метод Эйлера решения дифференциального уравнения первого порядка

Объект исследования

- приближенное решение задач математического анализа для функции одной переменной.

Предмет исследования

- методы приближенного вычисления в математическом анализе.

Данная выпускная квалификационная работа состоит из введения, трех глав, заключения и списка использованной литературы.

В первой главе «Вычисления корней нелинейных уравнений» рассмотрены метод касательных, хорд и комбинированный метод хорд и касательных решения нелинейных уравнений. Эти методы применяются в математическом анализе при исследовании функций с использованием дифференциального исчисления.

Во второй главе «Приближенные методы вычисления определенных интегралов» рассмотрены методы вычисления определенных интегралов от достаточно сложных аналитических выражений.

В третьей главе «Дифференциал и дифференциальные уравнения первого порядка» рассмотрены приближенные методы решения задач с использованием дифференциала. Изучен метод Эйлера приближенного решения дифференциальных уравнений первого порядка.

В каждой главе рассмотрено достаточно большое число примеров на изучаемые методы приближенных вычислений.

В заключении отмечены результаты выполненного исследования, практическая значимость данной работы.

В работе рассмотрены следующие задачи:

- численные методы решения нелинейных уравнений (метод Ньютона, метод хорд, комбинированный метод хорд и касательных);

- численные методы вычисления определенных интегралов (методы прямоугольников, метод трапеций, метод Симпсона);

- вычисление значений функции в точке;

- численный метод Эйлера решения дифференциального уравнения первого порядка.

Например, в работе рассмотрен пример

- Найти приближенное решение уравнения

$$\frac{dy}{dx} = x + y$$

при $x = 1$, если оно удовлетворяет начальному условию $y_{x=0} = 1$.

Решение.

Решим заданное уравнение известным точным методом и сравним с приближенным решением по методу Эйлера.

Заданное уравнение является уравнением вида

$$\frac{dy}{dx} + P(x)y = Q(x),$$

где $P(x) = -1, Q(x) = x$.

Решение этого линейного дифференциального уравнения первого порядка можно найти по формуле

$$y = e^{-\int P(x)dx}\left(\int Q(x)\, e^{\int P(x)dx}\, dx + \mathrm{C}\right).$$

Выполнив необходимые вычисления , находим

$$y = e^{x}(-xe^{-x} - e^{-x} + \mathrm{C}) = \mathrm{C}e^{x} - x - 1.$$

Из начального условия определим постоянную С:

$$1 = \mathrm{C} - 1, \mathrm{C} = 2.$$

Получим общее решение уравнения:

$$y = 2e^{x} - x - 1.$$

При $x = 1$ из точного решения получаем

$$y_{x=1} = 2(e - 1) = 3{,}437.$$

Найдем приближенное решение заданного уравнения. Отрезок $[0, 1]$ разобьем на десять равных частей с шагом $h = 0{,}1$. Применяя формулу

$$y_i = y_{i-1} + f(x_{i-1}, y_{i-1})h,$$

получим

$$y_i = y_{i-1} + (x_{i-1} + y_{i-1})h.$$

Вычисления занесем в таблицу, где выполняется процесс последовательных приближений, находятся выражения $x_i, y_i, x_i + y_i, (x_i + y_i)h$.

0	1,000	1,000	0,1
0,1	1,100	1,200	0,120
0,2	1,220	1,420	0,142
0,3	1,362	1,620	0,162
0,4	1,524	1,924	0,192
0,5	1,716	2,216	0,221
0,6	1,938	2,538	0,254
0,7	2,192	2,892	0,289
0,8	2,481	3,281	0,328
0,9	2,809	3,709	0,371
1,0	3,180		

Из таблицы находим

$$y_{x=1} = 3{,}180.$$

Найдем абсолютную и относительные погрешности:

$$\Delta y = |y - \overline{y}| = |3{,}180 - 3{,}437| = 0{,}257,$$

$$\delta y = \Delta y/|\overline{y}| = \frac{0{,}257}{3{,}180} = 0{,}081.$$

Относительная погрешность приблизительно равна 8%.

- Все рассмотренные в работе задачи обоснованы теоретически. Построен вычислительный алгоритм решения изученных задач, который можно реализовать на компьютере или в Excel. На каждый метод приведены практические примеры решения, в которых определена погрешность выполненных действий.

- Результатами данной выпускной квалификационной работы могут воспользоваться студенты, изучающие курс «Численные методы» или «Вычислительная математика».

Спасибо
за
внимание!