



# *7 класс алгебра*



## *Системы двух линейных уравнений с двумя переменными*

### *Урок № 14 Основные понятия.*



## Цели:



- Сформировать представление о математической модели **система уравнений**.
- Познакомиться с понятием системы двух линейных уравнений и ее решении.
- Изучить **графический способ решения** систем двух уравнений.
- Вопрос о **количестве решений** системы двух линейных уравнений с двумя переменными.
- Решение более сложных систем двух уравнений с двумя неизвестными.

**Вспомним!**

Уравнение вида:  $ax + b = 0$   
называется **линейным уравнением**  
**с одной переменной** (где  $x$  – переменная,  
 $a$  и  $b$  некоторые числа).

**Внимание!**

$x$  – переменная **входит в уравнение**  
**обязательно в первой степени.**

$$45x - 18 = 0$$

**линейное уравнением**  
**с одной переменной**

$$3x^2 + 6x + 7 = 0$$

**не линейное уравнением**  
**с одной переменной**

*Вспомним!*

*Линейное уравнение с двумя переменными*

*Уравнение вида:*

$$ax + by + c = 0$$

*называется линейным уравнением с двумя переменными (где  $x$ ,  $y$  - переменные,  $a$ ,  $b$  и  $c$  - некоторые числа).*

*$(x; y)$*

*Решением уравнения с двумя неизвестными называется пара переменных, при подстановке которых уравнение становится верным числовым равенством.*

*Вспомним!*  
*Решить линейное уравнение —*  
*это значит найти те значения*  
*переменной, при каждом из*  
*которых*  
*уравнение обращается в верное*  
*числовое равенство.*

*Таких решений бесконечно много.*

# *Вспомним!*

$$x + y - 3 = 0$$

| <i>Реальная ситуация<br/>(словесная модель)</i> | <i>Алгебраическая<br/>модель</i>                                       | <i>Геометрическая<br/>модель</i>                                                          |
|-------------------------------------------------|------------------------------------------------------------------------|-------------------------------------------------------------------------------------------|
| <i>Сумма двух чисел<br/>равна 3.</i>            | $x + y = 3$<br><i>(линейное<br/>уравнение с двумя<br/>переменными)</i> | <i>прямая <math>m</math><br/>(график линейного<br/>уравнения с двумя<br/>переменными)</i> |

## *Теорема:*

*Графиком любого линейного уравнения  
 $ax + by + c = 0$  есть **прямая**.*

*Для построения графика достаточно найти  
координаты **двух точек**.*

**Вспомним!**

**Алгоритм построения графика  
уравнения  $ax + by + c = 0$**

1. Придать переменной  $x$  конкретное значение  $x_1$ ; найти из уравнения  $ax + by + c = 0$  соответствующее значение  $y_1$ .  
Получим  $(x_1; y_1)$ .

2. Придать переменной  $x$  конкретное значение  $x_2$ ; найти из уравнения  $ax + by + c = 0$  соответствующее значение  $y_2$ .  
Получим  $(x_2; y_2)$ .

3. Построим на координатной плоскости точки  $(x_1; y_1)$ ,  $(x_2; y_2)$  и соединим прямой.

4. Прямая – есть график уравнения.

Часто приходится рассматривать математическую модель состоящую из **двух линейных уравнений с двумя переменными**.

$$\begin{cases} a_1x + b_1y + c_1 = 0 \\ a_2x + b_2y + c_2 = 0 \end{cases}$$

$(x; y)$

**Решение системы уравнений с двумя неизвестными** называется пара переменных, при подстановке которых уравнения становятся верными числовыми равенствами.

**Решить систему** - это значит найти все ее решения или доказать, что их нет.

Решить систему уравнений:

$$\begin{cases} 2x - y - 3 = 0, \\ x + 2y - 4 = 0. \end{cases}$$

Построим график уравнения  
 $-y - 3 = 0$ ,  $y = 2x - 3$ .

|     |    |   |
|-----|----|---|
| $x$ | 1  | 2 |
| $y$ | -1 | 1 |

Получим точки:  
(1; -1), (2; 1)

Построим график уравнения  
 $+2y - 4 = 0$ ,  $2y = -x + 4$ ,  
 $= (-x + 4) : 2$ .

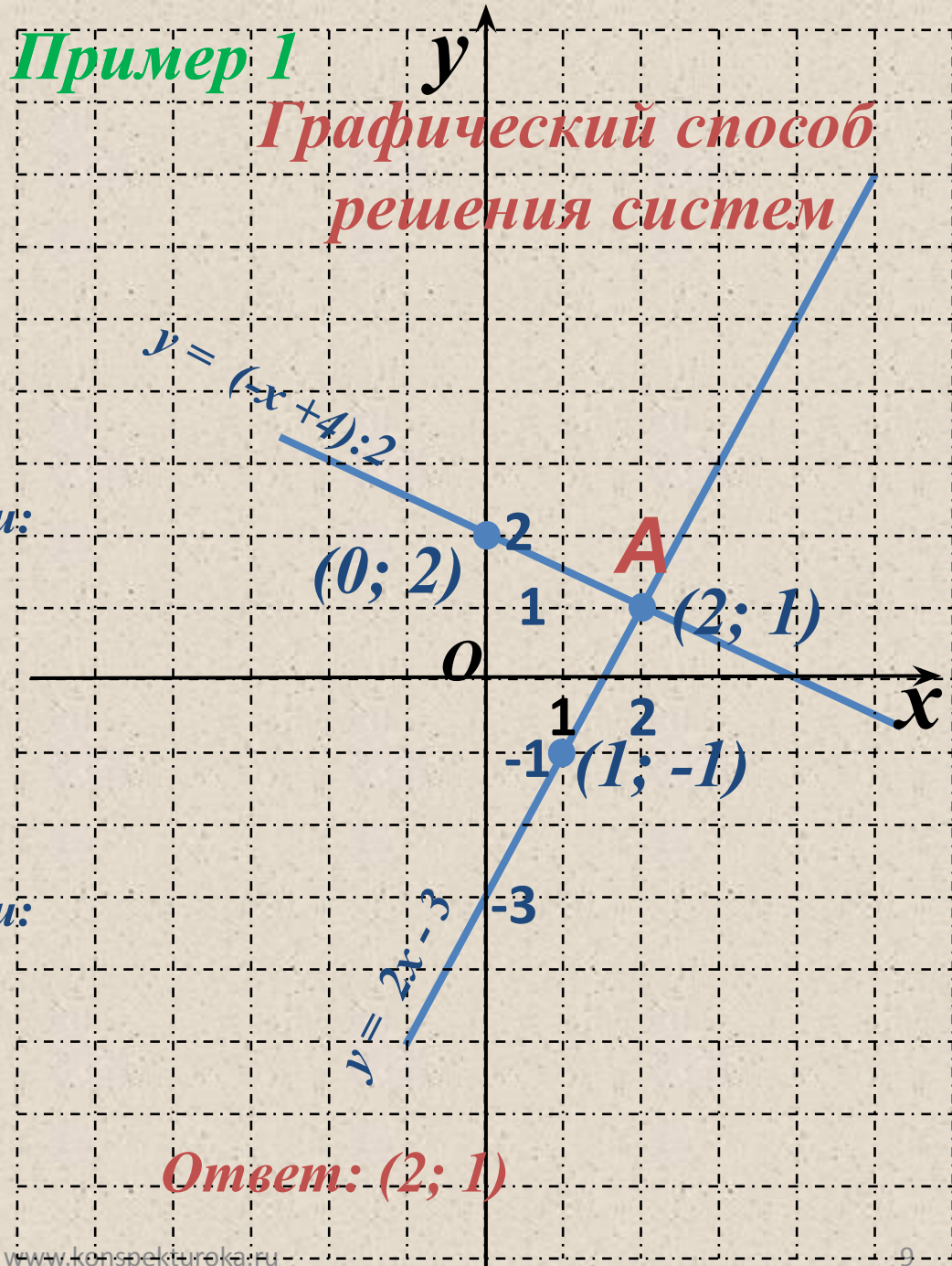
|     |   |   |
|-----|---|---|
| $x$ | 0 | 2 |
| $y$ | 2 | 1 |

Получим точки:  
(0; 2), (2; 1)

Прямые пересекаются в  
единственной точке **A(2;1)**

**Пример 1**

**Графический способ  
решения систем**



**Ответ: (2; 1)**

## **Количество решений** двух линейных уравнений с двумя переменными.

$$\begin{cases} a_1x + b_1y + c_1 = 0 \\ a_2x + b_2y + c_2 = 0 \end{cases}$$

1) Если  $\frac{a_1}{a_2} \neq \frac{b_1}{b_2}$ , **то прямые пересекаются и система**

2) Если  $\frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2} \neq \frac{c_1}{c_2}$ , **то прямые параллельны и система не имеет решений. Система называется несовместной.**

3) Если  $\frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2} = \frac{c_1}{c_2}$ , **то прямые совпадают и система имеет бесконечно много решений. Система называется неопределенной.**

Решить систему уравнений:

$$\begin{cases} x + 2y - 5 = 0, \\ 2x + 4y + 3 = 0. \end{cases}$$

Построим график уравнения  
 $x + 2y - 5 = 0$ ,  $y = (5 - x) : 2$ .

|     |   |   |
|-----|---|---|
| $x$ | 1 | 3 |
| $y$ | 2 | 1 |

Получим точки:  
(1; 2), (3; 1)

Построим график уравнения  
 $2x + 4y + 3 = 0$ ,  $4y = -2x - 3$ ,  
 $y = -(2x + 3) : 4$ .

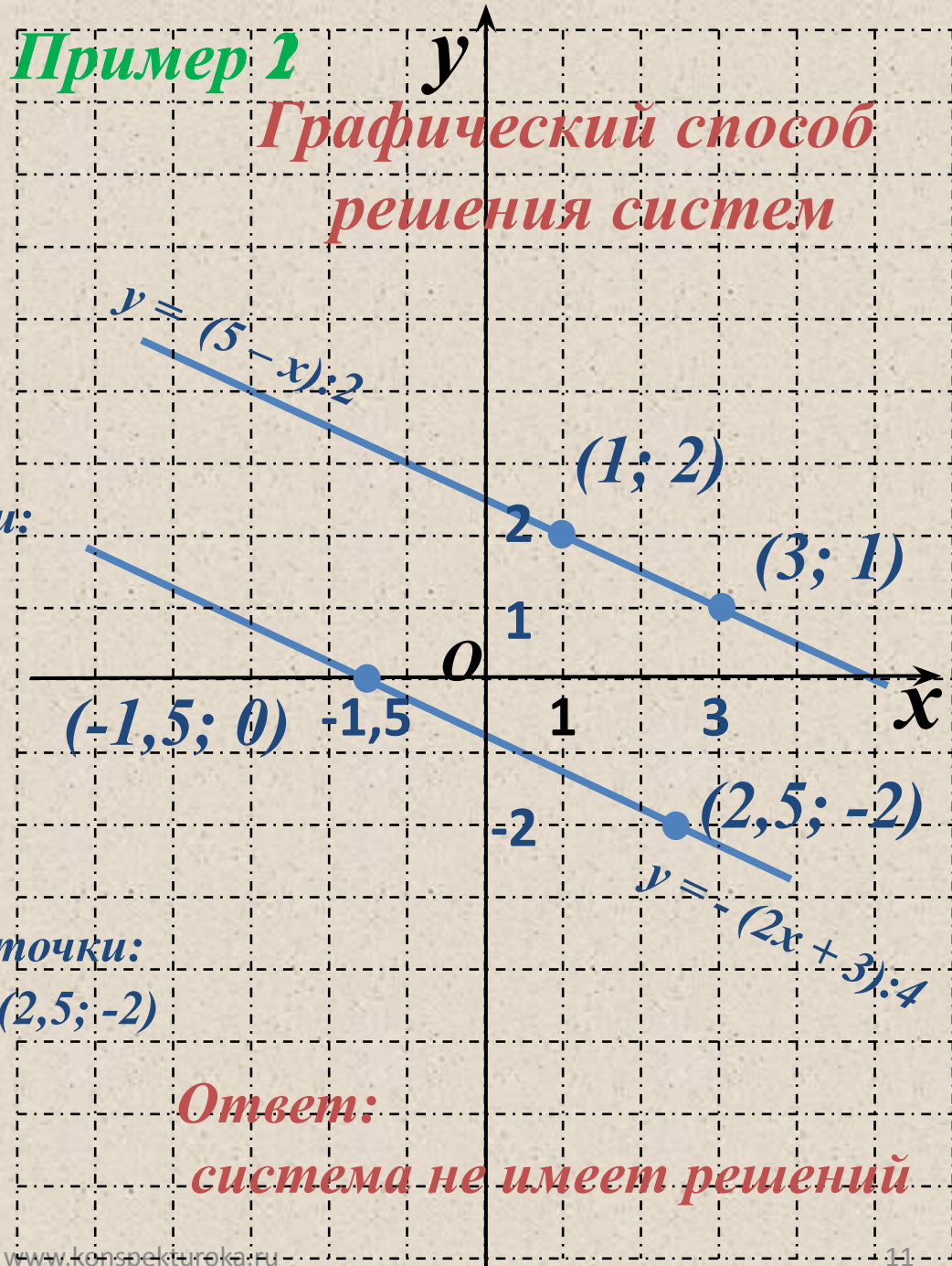
|     |      |     |
|-----|------|-----|
| $x$ | -1,5 | 2,5 |
| $y$ | 0    | -2  |

Получим точки:  
(-1,5; 0), (2,5; -2)

Прямые **параллельны**.

**Пример 2**

**Графический способ  
решения систем**



**Ответ:**

**система не имеет решений**

### Пример 3

При каких значениях ***a*** система уравнений имеет **единственное решение**:

$$\begin{cases} (2a - 1)x + 3y = 7a + 1, \\ (a + 2)x + 2y = 5a - 3. \end{cases}$$

#### Решение

Условие при которых система уравнений имеет **единственное решение**:

$$\frac{2a - 1}{a + 2} \neq \frac{3}{2},$$

Используем свойство пропорции:

$$2(2a - 1) \neq 3(a + 2),$$

$$4a - 2 \neq 3a + 6$$

$$4a - 3a \neq 2 + 6$$

$$a \neq 8$$

**Ответ:** при всех значениях ***a***, кроме  $a = 8$ , данная функция имеет **единственное решение**.

## Пример 4

При каких значениях **a** система уравнений **несовместна**:

$$\begin{cases} (2a - 1)x + 3y = 7a + 1, \\ (2a + 1)x + 5y = 5a - 3. \end{cases}$$

### Решение

Условие при которых система уравнений **несовместна**:

$$\frac{2a - 1}{2a + 1} = \frac{3}{5} \neq \frac{7a + 1}{5a - 3}$$

1) Сначала рассмотрим равенство

$$\frac{2a - 1}{2a + 1} = \frac{3}{5}$$

Используем свойство пропорции:

$$5(2a - 1) = 3(2a + 1),$$

$$10a - 5 = 6a + 3$$

$$10a - 6a = 3 + 5$$

$$4a = 8$$

$$a = 2$$

2) Теперь проверим неравенство:

$$\frac{3}{5} \neq \frac{7a + 1}{5a - 3}$$

При подстановке значения  $a = 2$  имеем:

$$\frac{3}{5} \neq \frac{7 \cdot 2 + 1}{5 \cdot 2 - 3}$$

$$\frac{3}{5} \neq \frac{15}{7} \quad - \text{ верное неравенство}$$

**Ответ:** при  $a = 2$ , данная система **несовместна**.

## Пример 5

При каких значениях **a** система уравнений **неопределенна**:

$$\begin{cases} (2a - 1)x + 3y = 7a + 1, \\ (a + 1)x + 6y = 11a + 5. \end{cases} \quad \text{Укажите решения системы.}$$

### Решение

Условие при которых система уравнений **неопределенна**:

$$\frac{2a - 1}{a + 1} = \frac{3}{6} = \frac{7a + 1}{11a + 5}$$

1) Сначала рассмотрим равенство

$$\frac{2a - 1}{a + 1} = \frac{3}{6} \quad \frac{2a - 1}{a + 1} = \frac{1}{2}$$

Используем свойство пропорции:

$$2(2a - 1) = a + 1,$$

$$4a - 2 = a + 1$$

$$4a - a = 1 + 2$$

$$3a = 3$$

$$a = 1$$

2) Теперь проверим равенство:

$$\frac{3}{6} = \frac{7a + 1}{11a + 5}$$

При подстановке значения  $a = 1$  имеем:

$$\frac{3}{6} \neq \frac{7 \cdot 1 + 1}{11 \cdot 1 + 5}$$

$$\frac{1}{2} = \frac{1}{2} \quad - \text{ верное равенство}$$

Итак при  $a = 1$ , данная система **неопределенна**.

При подстановке значения  $a = 1$  в данную систему имеем:

$$\begin{cases} (2 \cdot 1 - 1)x + 3y = 7 \cdot 1 + 1, \\ (1 + 1)x + 6y = 11 \cdot 1 + 5. \end{cases} \quad \begin{cases} x + 3y = 8, \\ 2x + 6y = 16. \end{cases}$$

Поделим второе уравнение на 2, имеем:

$$\begin{cases} x + 3y = 8, \\ x + 3y = 8. \end{cases}$$

**Ответ:** решением системы будет любая пара чисел  $x$  и  $y$ , в которой  $x = 8 - 3y$ , а  $y$  – произвольное число.

# Ответить на вопросы

а) что собой представляют графики обоих уравнений системы?

б) в каком случае система имеет **единственное решение**?

в) какая система является **несовместимой**?

г) о какой системе говорят, что она **неопределенна**?

д) что называется **решением** системы уравнений с двумя переменными?

е) что значит решить систему уравнений?

*Спасибо за внимание!*

