Логические основы компьютеров

Логические основы компьютеров

§ 19. Логические операции

Обозначение высказываний

A – Сейчас идет дождь.
B – Форточка открыта.

простые высказывания (элементарные)

! **Любое высказывание может быть ложно (0) или истинно (1).**

Составные высказывания строятся из простых с помощью логических связок (операций) «**и**», «**или**», «**не**», «**если … то**», «**тогда и только тогда**» и др.

A и B	Сейчас идет дождь и открыта форточка.
A или не B	Сейчас идет дождь или форточка закрыта.
если A, то B	Если сейчас идет дождь, то форточка открыта.
A тогда и только тогда, когда B	Дождь идет тогда и только тогда, когда открыта форточка.

Операция НЕ (инверсия)

Если высказывание **A** истинно, то «**не A**» ложно, и наоборот.

A	не A
0	1
1	0

также $\overline{\mathbf{A}}$, $\neg\mathbf{A}$, **not A** (Паскаль), **! A** (Си)

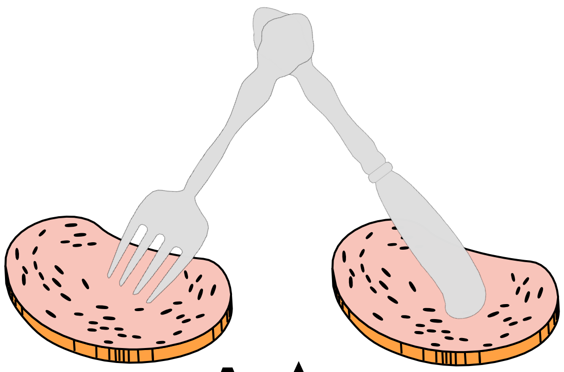
таблица истинности операции НЕ

Таблица истинности логического выражения X – это таблица, где в левой части записываются все возможные комбинации значений исходных данных, а в правой – значение выражения X для каждой комбинации.

Операция И (логическое умножение, конъюнкция)

	A	B	A и B
0	0	0	0
1	0	1	0
2	1	0	0
3	1	1	1

также: **A·B**, **A ∧ B**, **A and B** (Паскаль), **A && B** (Си)



A ∧ B

конъюнкция – от лат. *conjunctio* — соединение

Операция ИЛИ (логическое сложение, дизъюнкция)

также: **A+B**, **A ∨ B**, **A or B** (Паскаль), **A || B** (Си)

A	B	A или B
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	1

дизъюнкция – от лат. *disjunctio* — разъединение

Задачи

В таблице приведены запросы к поисковому серверу. Расположите номера запросов в порядке ***возрастания*** *количества страниц, которые найдет поисковый сервер по каждому запросу. Для обозначения логической операции «ИЛИ» в запросе используется символ |, а для логической операции «И» – &.*

1) **принтеры & сканеры & продажа**
2) **принтеры & продажа**
3) **принтеры | продажа**
4) **принтеры | сканеры | продажа**

1 2 3 4

Импликация («если …, то …»)

Высказывание «**A → B**» истинно, если не исключено, что из **A** следует **B**.

A – «Работник хорошо работает».

B – «У работника хорошая зарплата».

A	B	A → B
0	0	1
0	1	1
1	0	0
1	1	1

$$A \rightarrow B = \overline{A} + B$$

Импликация («если …, то …»)

«Если Вася идет гулять, то Маша сидит дома».

A – «Вася идет гулять».

B – «Маша сидит дома».

$$A \rightarrow B = 1$$

А если Вася не идет гулять?

A	B	$A \rightarrow B$
0	0	1
0	1	1
1	0	0
1	1	1

Маша может пойти гулять (B=0), а может и не пойти (B=1)!

Эквивалентность («тогда и только тогда, …»)

Высказывание «**A** ↔ **B**» истинно тогда и только тогда, когда **A** и **B** равны.

A	B	A ↔ B
0	0	1
0	1	0
1	0	0
1	1	1

$$A \leftrightarrow B = \overline{A \oplus B} = A \cdot B + \overline{A} \cdot \overline{B}$$

Базовый набор операций

С помощью операций **И, ИЛИ** и **НЕ** можно реализовать любую логическую операцию.

И **ИЛИ** **НЕ**

базовый набор операций

Сколько всего существует логических операций с двумя переменными?

Импликацию **можно выразить через** ***дизъюнкцию*** **и** ***отрицание*:**

$$A \to B = \overline{A} \vee B$$

Эквиваленцию **можно выразить через** ***отрицание*****,** ***дизъюнкцию*** **и** ***конъюнкцию*****:**

$$A \leftrightarrow B = (\overline{A} \vee B) \& (\overline{B} \vee A)$$

Формализация

Прибор имеет три датчика и может работать, если два из них исправны. Записать в виде формулы ситуацию «авария».

A – «Датчик № 1 неисправен».

B – «Датчик № 2 неисправен».

C – «Датчик № 3 неисправен».

Формализация – это переход к записи на формальном языке!

Аварийный сигнал:

X – «Неисправны два датчика».

X – «Неисправны датчики № 1 **и** № 2» **или**
«Неисправны датчики № 1 **и** № 3» **или**
«Неисправны датчики № 2 **и** № 3».

$$X = A \cdot B + A \cdot C + B \cdot C$$

логическая формула

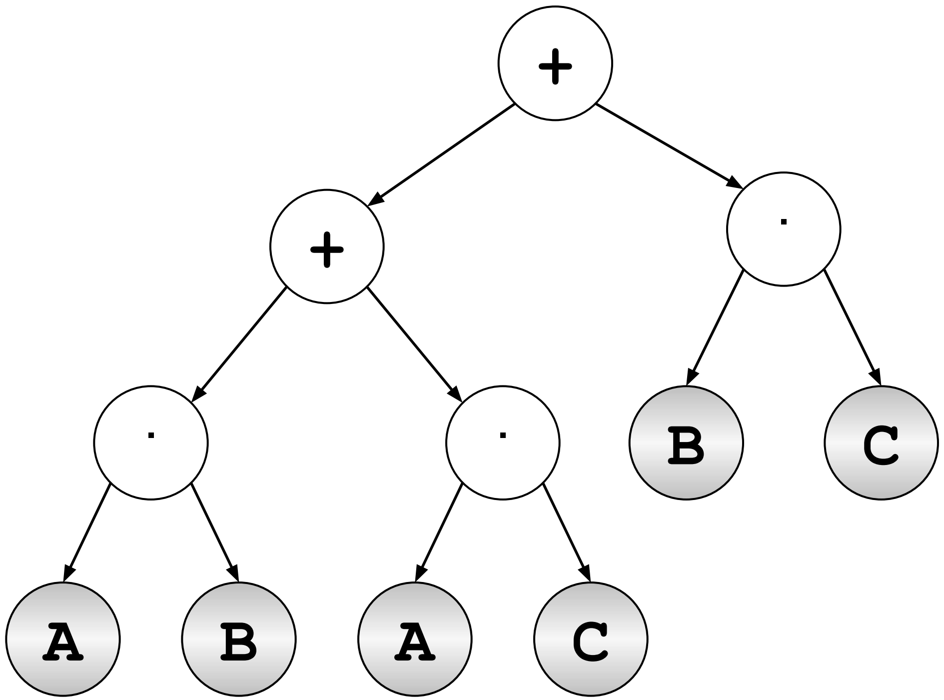
Вычисление логических выражений

1 4 2 5 3

$$X = A \cdot B + A \cdot C + B \cdot C$$

Порядок вычислений:

- скобки
- НЕ
- И
- ИЛИ, исключающее ИЛИ
- импликация
- эквивалентность



Порядок выполнения логических операций

1. Действия в скобках.
2. Инверсия, конъюнкция, дизъюнкция, импликация, эквивалентность, сложение по модулю 2.

Построение таблиц истинности для логических функций

Алгоритм построения таблицы истинности:

1. Определить *количество наборов входных переменных* - всевозможных сочетаний значений переменных, входящих в выражения, по формуле: $Q=2^n$, где n - количество входных переменных. Оно определяет количество строк таблицы.
2. Внести в таблицу все наборы входных переменных.
3. Определить количество логических операций и последовательность их выполнения.
4. Заполнить столбцы результатами выполнения логических операций в обозначенной последовательности.

Размеры таблицы

1. Количество строк = 2^n,

где n – количество логических переменных.

2. Количество столбцов = количество переменных + количество логических операций.

Составление таблиц истинности

$$X = A \cdot B + \overline{A} \cdot B + \overline{B}$$

	A	B	$A \cdot B$	$\overline{A} \cdot B$	$\overline{B}$	X
0	0	0	0	0	1	1
1	0	1	0	1	0	1
2	1	0	0	0	1	1
3	1	1	1	0	0	1

Логические выражения могут быть:

- **тождественно истинными** (всегда 1, тавтология)
- **тождественно ложными** (всегда 0, противоречие)
- **вычислимыми** (зависят от исходных данных)

Составление таблиц истинности

$$X = A \cdot B + A \cdot C + B \cdot C$$

	A	B	C	A·B	A·C	B·C	X
0	0	0	0	0	0	0	0
1	0	0	1	0	0	0	0
2	0	1	0	0	0	0	0
3	0	1	1	0	0	1	1
4	1	0	0	0	0	0	0
5	1	0	1	0	1	0	1
6	1	1	0	1	0	0	1
7	1	1	1	1	1	1	1

Задание: составить таблицы истинности

Составить таблицу истинности для формулы

$$F(A,B)=(A\vee B)\wedge(\overline{A}\vee B)$$

A	B	$A\vee B$	$\overline{A}$	$\overline{A}\vee B$	F
0	0				
0	1				
1	0				
1	1				

Задание: составить таблицы истинности

Составить таблицу истинности для формулы

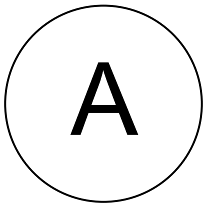
$$F(A,B) = ((A \vee \overline{B}) \to B) \wedge (\overline{A} \vee B)$$

A	B	$\overline{B}$	$A \vee \overline{B}$	$(A \vee \overline{B}) \to B$ x	$\overline{A}$	$\overline{A} \vee B$ y	$x \wedge y$

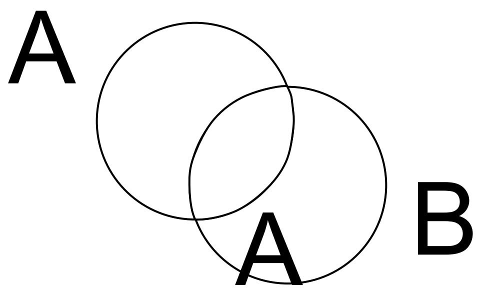
Логические основы компьютеров

§ 20. Диаграммы

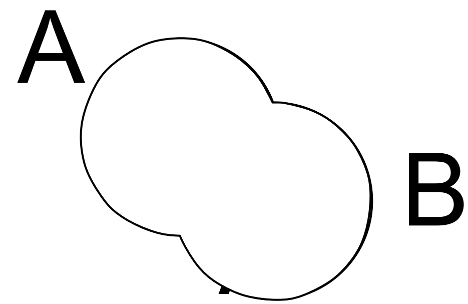
Диаграммы Венна (круги Эйлера)



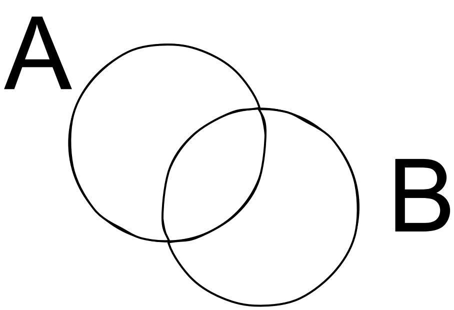
$\overline{A}$



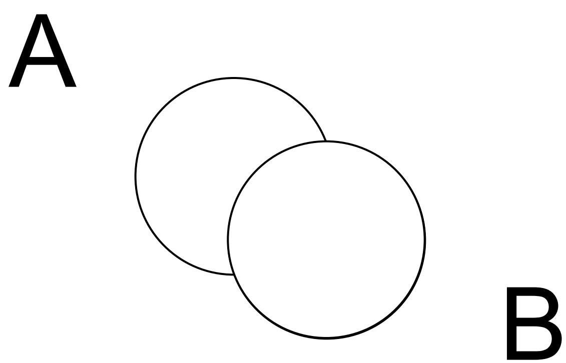
$A \cdot B$



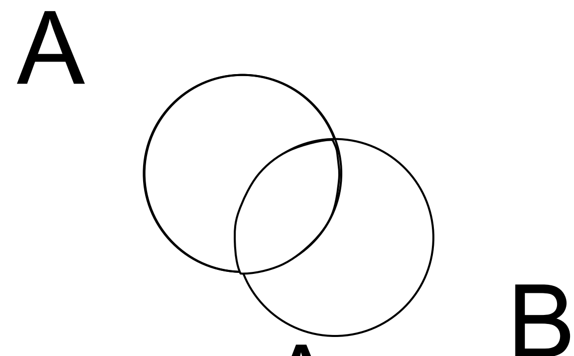
$A + B$



$A \oplus B$

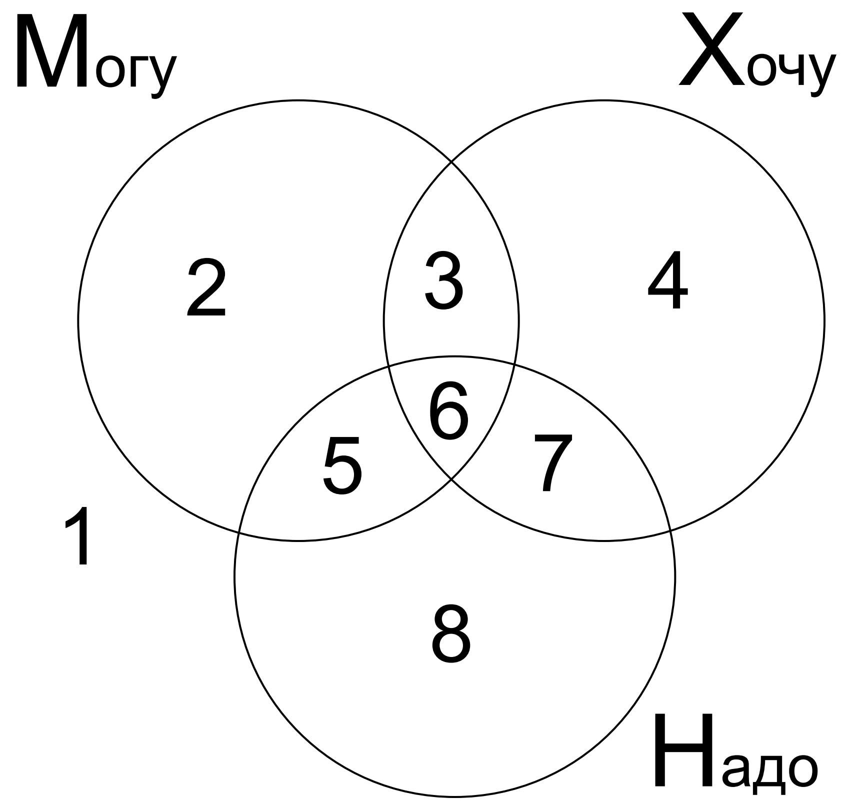


$A \to B$



$A \leftrightarrow B$

Диаграмма с тремя переменными



$$1 = \overline{М} \cdot \overline{Х} \cdot \overline{Н} \qquad 5 = М \cdot \overline{Х} \cdot Н$$

$$2 = М \cdot \overline{Х} \cdot \overline{Н} \qquad 6 = М \cdot Х \cdot Н$$

$$3 = М \cdot Х \cdot \overline{Н} \qquad 7 = \overline{М} \cdot Х \cdot Н$$

$$4 = \overline{М} \cdot Х \cdot \overline{Н} \qquad 8 = \overline{М} \cdot \overline{Х} \cdot Н$$

$$3 + 4 = М \cdot Х \cdot \overline{Н} + \overline{М} \cdot Х \cdot \overline{Н} \qquad 3 + 4 = Х \cdot \overline{Н}$$

! Логические выражения можно упрощать!

Задачи

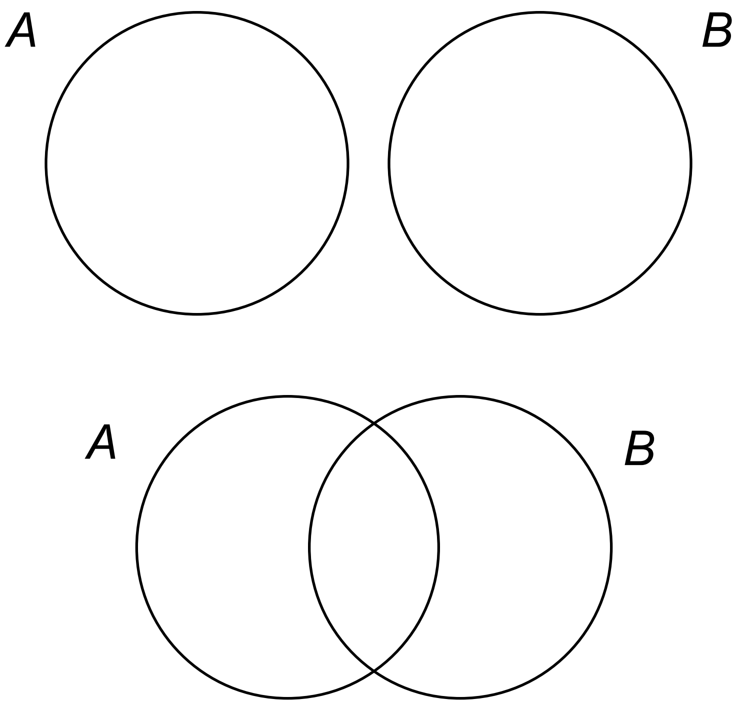
Известно количество сайтов, которых находит поисковый сервер по следующим запросам :

Запрос	***Количество сайтов***
огурцы	*100*
помидоры	*200*
огурцы & помидоры	*50*

Сколько сайтов будет найдено по запросу

```
огурцы | помидоры
```

Задачи



$N_{A|B} =$

50

огурцы & помидоры

$$N_{A|B} = N_A + N_B - N_{A\&B}$$

огурцы | помидоры

250

огурцы

100

помидоры

200

Задачи

Известно количество сайтов, которых находит поисковый сервер по следующим запросам :

Запрос	**Количество сайтов**
Динамо & Рубин	*320*
Спартак & Рубин	*280*
(Динамо | Спартак) & Рубин	*430*

Сколько сайтов будет найдено по запросу

`Динамо & Спартак & Рубин`

Общее условие с & можно отбросить !

Задачи

Известно количество сайтов, которых находит поисковый сервер по следующим запросам :

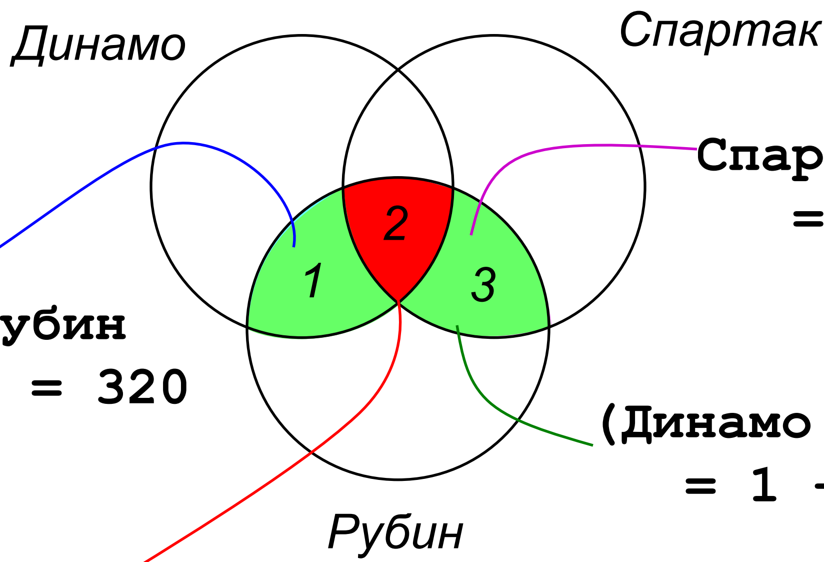
Запрос	**Количество сайтов**
Динамо	*320*
Спартак	*280*
Динамо | Спартак	*430*

Сколько сайтов будет найдено по запросу

`Динамо & Спартак`

Ответ: 320 + 280 – 430 = **170**

Задачи



Спартак & Рубин
= 2 + 3 = 280

Динамо & Рубин
= 1 + 2 = 320

(Динамо | Спартак) & Рубин
= 1 + 2 + 3 = 430

Динамо & Спартак & Рубин
= 2
= (320 + 280) – 430 = 170

Законы алгебры логики

название	для И	для ИЛИ
двойного отрицания	$\overline{\overline{A}} = A$	
исключения третьего	$A \cdot \overline{A} = 0$	$A + \overline{A} = 1$
операции с константами	$A \cdot 0 = 0, \; A \cdot 1 = A$	$A + 0 = A, \; A + 1 = 1$
повторения	$A \cdot A = A$	$A + A = A$
поглощения	$A \cdot (A + B) = A$	$A + A \cdot B = A$
переместительный	$A \cdot B = B \cdot A$	$A + B = B + A$
сочетательный	$A \cdot (B \cdot C) = (A \cdot B) \cdot C$	$A + (B + C) = (A + B) + C$
распределительный	$A + B \cdot C = (A + B) \cdot (A + C)$	$A \cdot (B + C) = A \cdot B + A \cdot C$
законы де Моргана	$\overline{A \cdot B} = \overline{A} + \overline{B}$	$\overline{A + B} = \overline{A} \cdot \overline{B}$

Упрощение логических выражений

Шаг 1. Заменить операции $\oplus \to \leftrightarrow$ на их выражения через **И**, **ИЛИ** и **НЕ**:

$$A \oplus B = A \cdot \overline{B} + \overline{A} \cdot B$$

$$A \to B = \overline{A} + B$$

$$A \leftrightarrow B = A \cdot B + \overline{A} \cdot \overline{B}$$

Шаг 2. Раскрыть инверсию сложных выражений по формулам де Моргана:

$$\overline{A \cdot B} = \overline{A} + \overline{B} \qquad \overline{A + B} = \overline{A} \cdot \overline{B}$$

Шаг 3. Используя законы логики, упрощать выражение, стараясь применять закон исключения третьего.

Упрощение логических выражений

$$Q = M \cdot X \cdot \overline{H} + \overline{M} \cdot X \cdot \overline{H} = (M + \overline{M}) \cdot X \cdot \overline{H} = X \cdot \overline{H}$$

$$X = (B \to A) \cdot \overline{(A + B)} \cdot (A \to C)$$

раскрыли →

$$= (\overline{B} + A) \cdot \overline{(A + B)} \cdot (\overline{A} + C)$$

формула де Моргана

$$= (\overline{B} + A) \cdot \overline{A} \cdot \overline{B} \cdot (\overline{A} + C)$$

распределительный

$$= (\overline{B} \cdot \overline{A} + A \cdot \overline{A}) \cdot \overline{B} \cdot (\overline{A} + C)$$

исключения третьего

$$= \overline{B} \cdot \overline{A} \cdot \overline{B} \cdot (\overline{A} + C)$$

повторения

$$= \overline{B} \cdot \overline{A} \cdot (\overline{A} + C)$$

поглощения

$$= \overline{B} \cdot \overline{A}$$

Задачи (упрощение)

Какое логическое выражение равносильно выражению

A ∧ ¬(¬B ∨ C) *?*

1) **¬A ∨ ¬B ∨ ¬C**
2) **A ∧ ¬B ∧ ¬C**
3) **A ∧ B ∧ ¬C**
4) **A ∧ ¬B ∧ C**

1) $\overline{A}+\overline{B}+\overline{C}$
2) $A\cdot\overline{B}\cdot\overline{C}$
3) $A\cdot B\cdot\overline{C}$
4) $A\cdot\overline{B}\cdot C$

$$A\cdot\overline{(\overline{B}+C)}=A\cdot\overline{\overline{B}}\cdot\overline{C}=A\cdot B\cdot\overline{C}$$