

Угол между прямыми.

**ВЗАИМНОЕ  
РАСПОЛОЖЕНИЕ ПРЯМЫХ В  
ПРОСТРАНСТВЕ.**

## ***ЦЕЛИ УРОКА:***

---

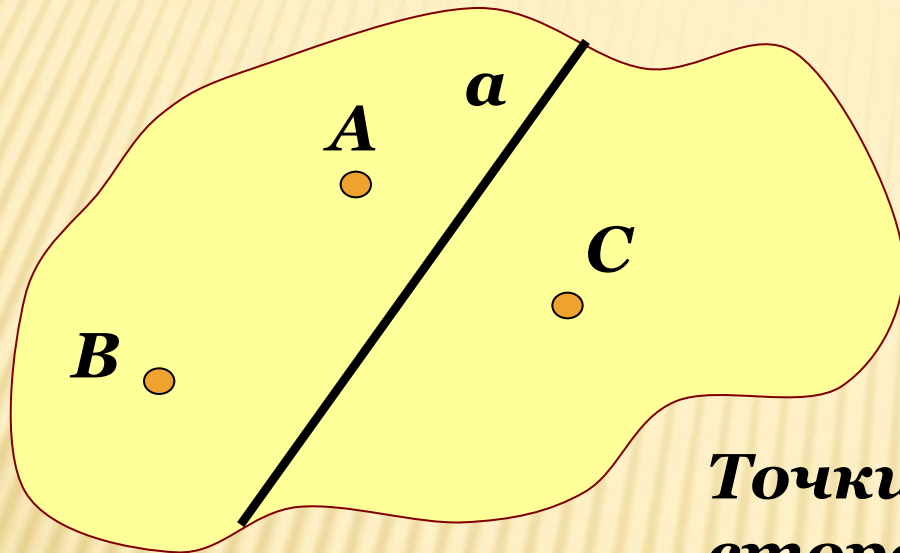
- Ввести формулировку и доказательство теоремы о равенстве углов с сонаправленными сторонами.***
- Научиться находить угол между прямыми в пространстве.***

# ПОВТОРЕНИЕ.

- Верно ли утверждение: если две прямые не имеют общих точек, то они параллельны? **Нет**
- Две прямые параллельны некоторой третьей прямой. Могут ли эти прямые а) пресекаться? **Да**  
б) быть скрещивающимися? **Да**
- Могут ли скрещивающиеся прямые  $a$  и  $b$  быть параллельными прямыми? **Нет**
- Даны две скрещивающиеся прямые  $a$  и  $b$ . Точки  $A$  и  $A_1$  лежат на прямой  $a$ , точки  $B$  и  $B_1$  лежат на прямой  $b$ . Как бы расположились отрезки  $AB$  и  $A_1B_1$ ? **Отрезки  $AB$  и  $A_1B_1$  скрещиваются.**
- Прямая  $a$  скрещивается с прямой  $b$ , а прямая  $b$  скрещивается с прямой  $c$ . Следовательно, прямые  $a$  и  $c$  - скрещивающиеся прямые. **Нет**



**ЛЮБАЯ ПРЯМАЯ  $a$ , ЛЕЖАЩАЯ В ПЛОСКОСТИ,  
РАЗДЕЛЯЕТ ПЛОСКОСТЬ НА ДВЕ ЧАСТИ,  
НАЗЫВАЕМЫЕ ПОЛУПЛОСКОСТЯМИ.**



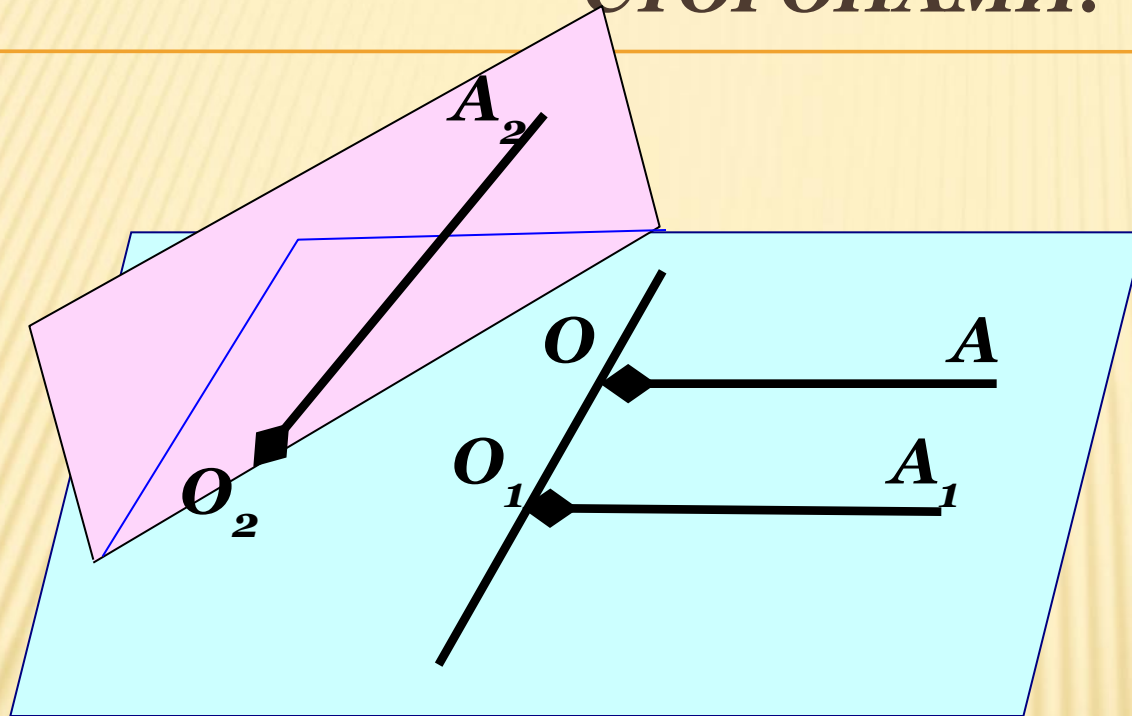
$a$  – граница  
полуплоскостей.

Точки  $A$  и  $B$  лежат по одну  
сторону от прямой  $a$ .

Точки  $A$  и  $C$  лежат по разные  
стороны от прямой  $a$ .



# УГЛЫ С СОНАПРАВЛЕННЫМИ СТОРОНАМИ.



Лучи  $OA$  и  $O_1A_1$  не лежат на одной  
прямой, параллельны, лежат в одной  
полуплоскости с границей  $OO_1 \rightarrow$

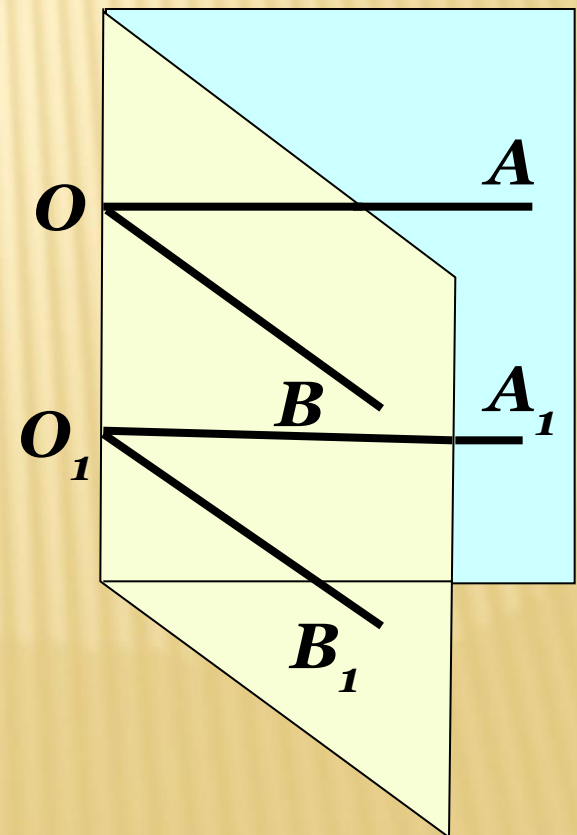
**сонаправленные**

# ТЕОРЕМА ОБ УГЛАХ С СОНАПРАВЛЕННЫМИ СТОРОНАМИ

**Если стороны двух углов соответственно сонаправлены, то такие углы равны.**

**Дано: угол  $O$  и угол  $O_1$   
с сонаправленными  
сторонами.**

**Доказать:  $\angle O = \angle O_1$**





# ТЕОРЕМА ОБ УГЛАХ С СОНАПРАВЛЕННЫМИ СТОРОНАМИ

**Доказательство:**

Отметим точки  $A, B, A_1$  и  $B_1$ , такие что  $OA = O_1A_1$  и  $OB = O_1B_1$ .

1. Рассмотрим  $OAA_1O_1$ :

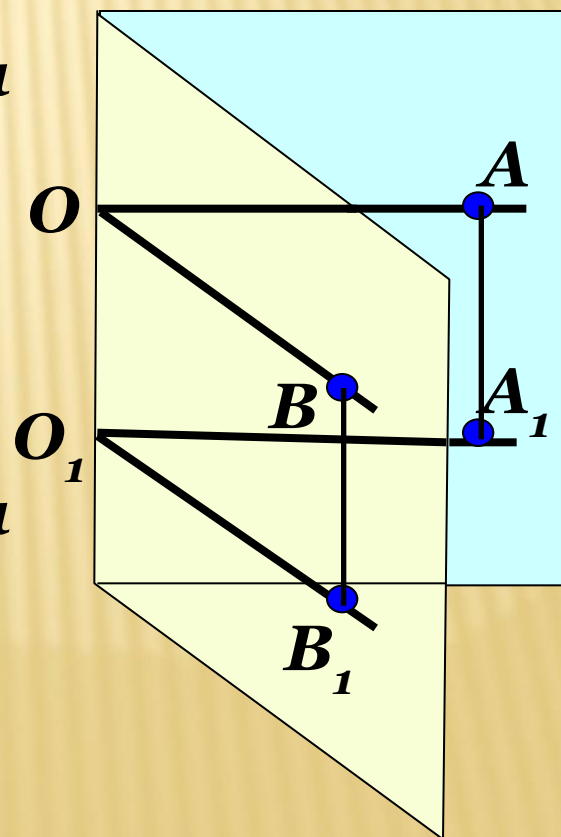
$OA \parallel O_1A_1$   $\left\{ \begin{array}{l} \xrightarrow{\text{orange arrow}} \\ OA = O_1A_1 \end{array} \right. \left. \begin{array}{l} OAA_1O_1 - \text{параллелограмм} \\ \text{( по признаку )} \end{array} \right.$

Значит,  $AA_1 \parallel OO_1$  и  $AA_1 = OO_1$ .

2. Рассмотрим  $OBV_1O_1$ :

$OB \parallel O_1B_1$   $\left\{ \begin{array}{l} \xrightarrow{\text{orange arrow}} \\ OB = O_1B_1 \end{array} \right. \left. \begin{array}{l} OBV_1O_1 - \text{параллелограмм} \\ \text{( по признаку )} \end{array} \right.$

Значит,  $BB_1 \parallel OO_1$  и  $BB_1 = OO_1$ .



# ТЕОРЕМА ОБ УГЛАХ

## С СОНАПРАВЛЕННЫМИ СТОРОНАМИ

**Вывод:**

$$AA_1 \parallel OO_1 \text{ и } BB_1 \parallel OO_1, \implies AA_1 \parallel BB_1$$

$$AA_1 = OO_1 \text{ и } BB_1 = OO_1, \implies AA_1 = BB_1$$

Следовательно,

четырехугольник  $AA_1B_1B$  –  
параллелограмм (по признаку).

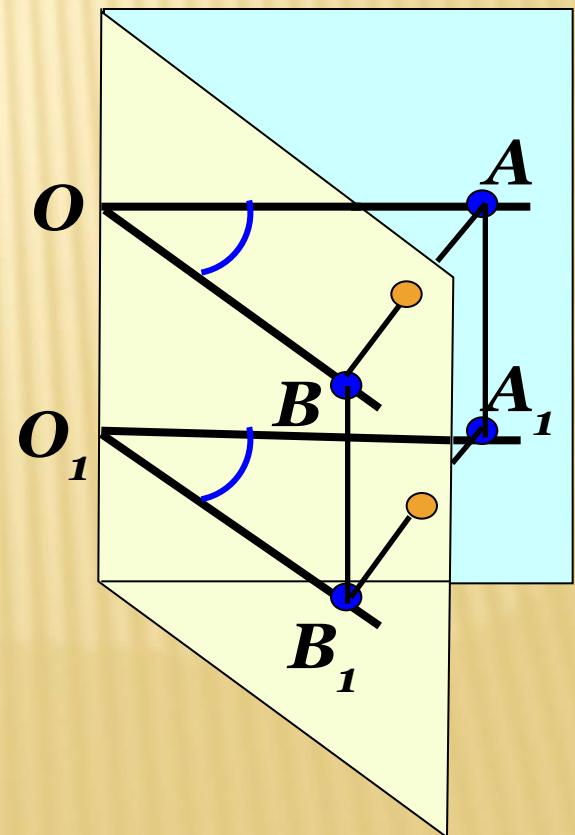
$$AB = A_1B_1$$

3. Рассмотрим  $\triangle ABO$  и  $\triangle A_1B_1O_1$ .

$$\triangle ABO = \triangle A_1B_1O_1$$

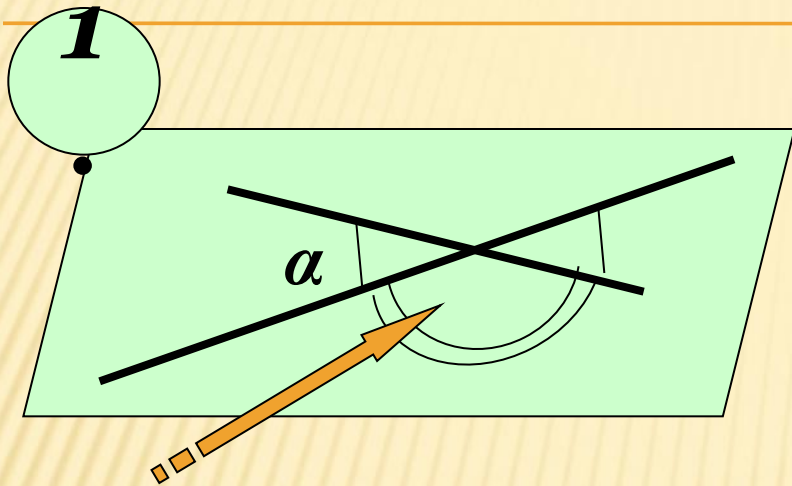
(по трем сторонам)

**Вывод:**  $\angle O = \angle O_1$

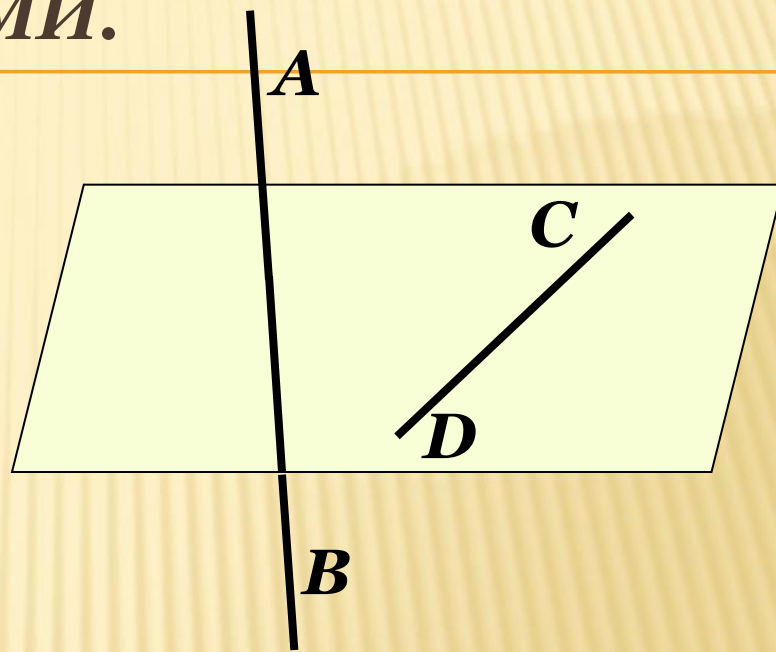




# УГОЛ МЕЖДУ СКРЕЩИВАЮЩИМИСЯ ПРЯМЫМИ.

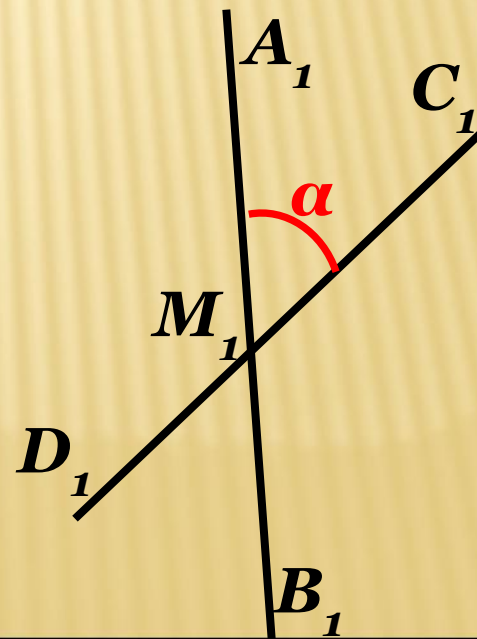


$$180^\circ - \alpha \quad 0^\circ < \alpha \leq 90^\circ$$



**2**

Угол между скрещивающимися прямыми  $AB$  и  $CD$  определяется как угол между пересекающимися прямыми  $A_1B_1$  и  $C_1D_1$ , при этом  $A_1B_1 \parallel AB$  и  $C_1D_1 \parallel CD$ .



### 3

## ПРАКТИЧЕСКОЕ ЗАДАНИЕ.

- ▣ Выбрать любую точку  $M_2$ .
- ▣ Построить  $A_2B_2 \parallel AB$  и  $C_2D_2 \parallel CD$ .
- ▣ Ответить на вопросы:

1. Почему  $A_2B_2 \parallel A_1B_1$  и  $C_2D_2 \parallel C_1D_1$ ?

2. Являются ли углы  $A_1M_1D_1$  и  $A_2M_2D_2$  углами с соответственно параллельными сторонами?

**Вывод:**

1.  $\angle A_1M_1D_1 = \angle A_2M_2D_2$

2. Величина угла между скрещивающимися прямыми не зависит от выбора точки.

Дан куб  $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ .

Найдите угол между прямыми:

1.  $BC$  и  $CC_1$

$90^\circ$

2.  $AC$  и  $BC$

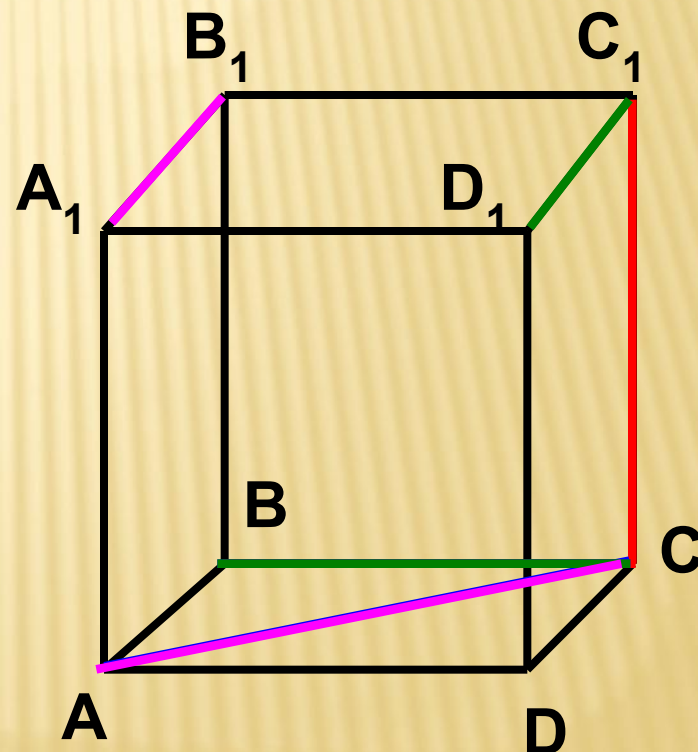
$45^\circ$

3.  $D_1 C_1$  и  $BC$

$90^\circ$

4.  $A_1 B_1$  и  $AC$

$45^\circ$





## ЗАДАЧА №44.

Дано:  $OB \parallel CD$ ,  
 $OA$  и  $CD$  – скрещивающиеся.  
Найти угол между  $OA$  и  $CD$ , если:

а)  $\angle AOB = 40^\circ$

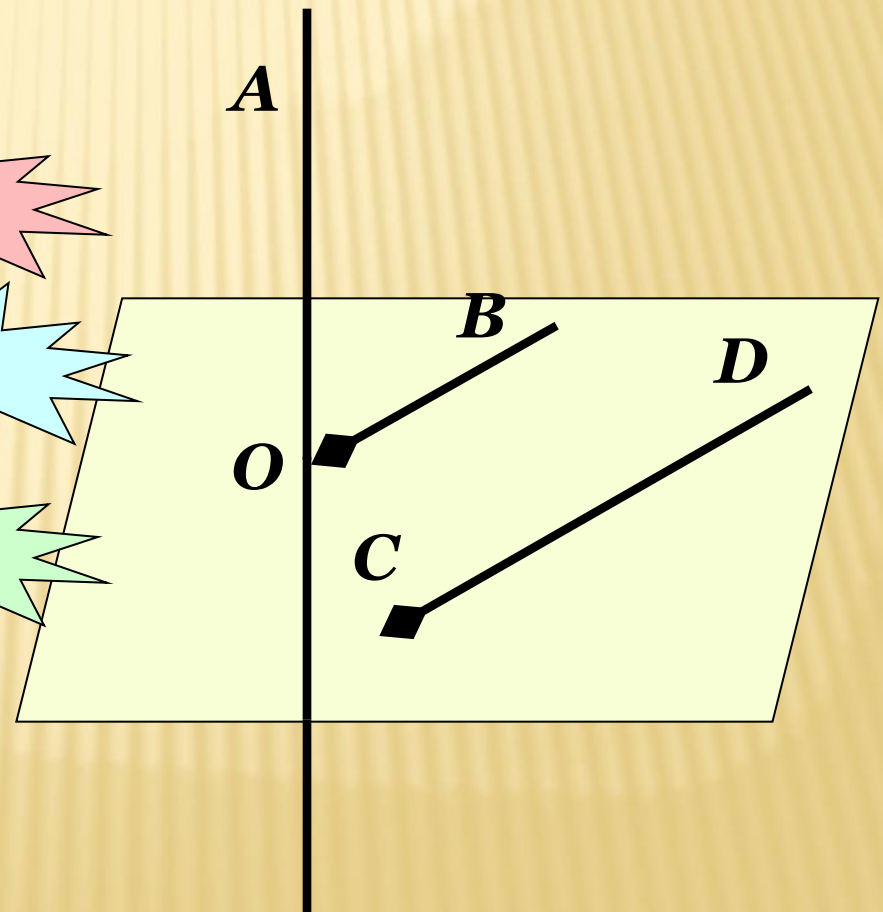
**40°**

б)  $\angle AOB = 135^\circ$

**45°**

в)  $\angle AOB = 90^\circ$

**90°**



## ДОПОЛНИТЕЛЬНАЯ ЗАДАЧА.

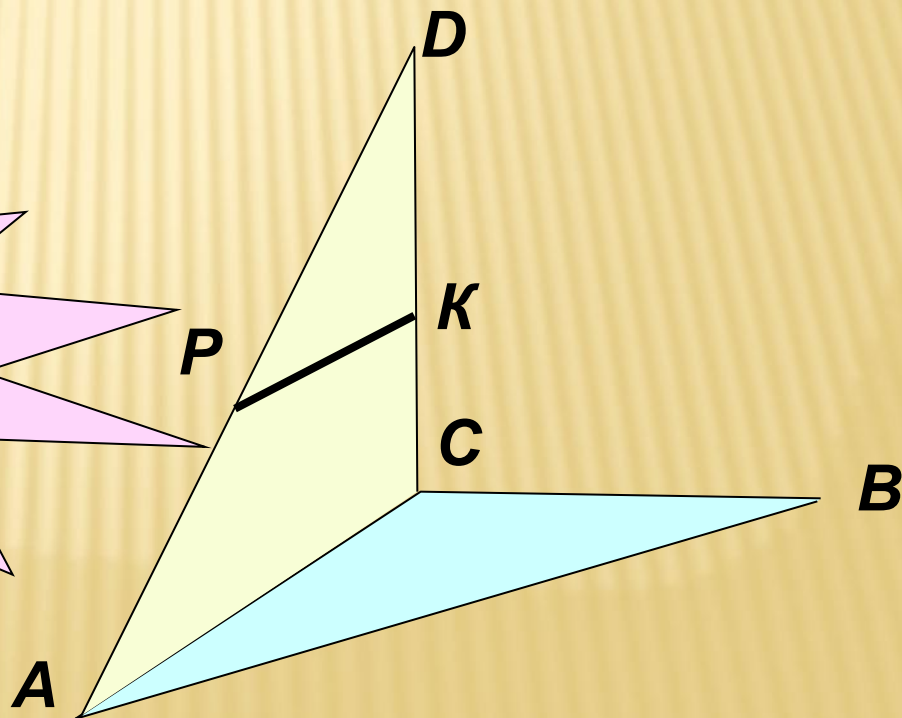
Треугольники  $ABC$  и  $ADC$  лежат в разных плоскостях.  $PK$  – средняя линия  $\triangle ADC$  с основанием  $AC$ .

Определить взаимное расположение прямых  $PK$  и  $AB$ , найти угол между ними, если  $\angle C = 80^\circ$ ,  $\angle B = 40^\circ$

**Ответ:**

1)  $AB$  и  $PK$   
скрещивающиеся

2)  $60^\circ$



Дано:  $ABCD$  – трапеция;  $ADE$  – треугольник;  
 $MP$  – средняя линия (рис. 9).

Определить: взаимное расположение прямых  
 $MP$  и  $AB$ .

Найти угол между ними, если  $\angle ABC = 110^\circ$ .

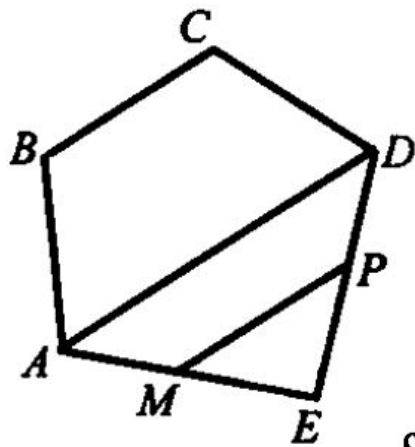


Рис. 9

Решение:

$$1. \left. \begin{array}{l} AB \cap (ADE) = A \\ A \notin MP (MP \parallel AD) \end{array} \right| \Rightarrow AB \text{ и } MP \text{ скрещивают-}$$

ся (по признаку скрещивающихся прямых).

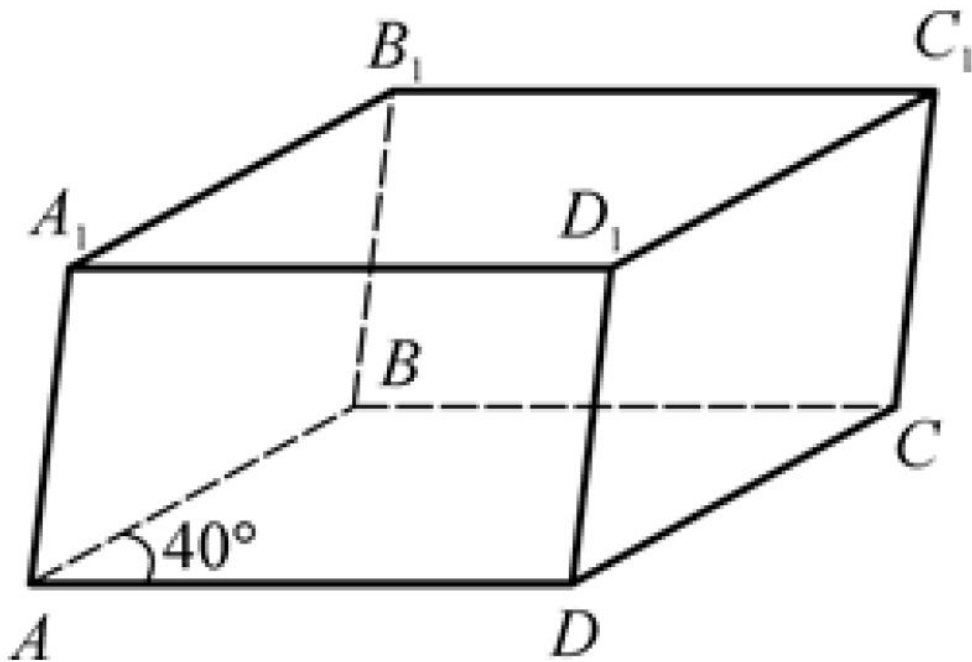
2.  $MP \parallel AD$ ,  $AB \parallel BC \Rightarrow MP \parallel BC$  (по теореме о трех параллельных прямых).

3. Угол между пересекающимися прямыми  $AB$  и  $BC$  равен:  
 $180^\circ - 110^\circ = 70^\circ$ . Угол между скрещивающимися прямыми  $AB$  и  $MP$  равен  $70^\circ$ .



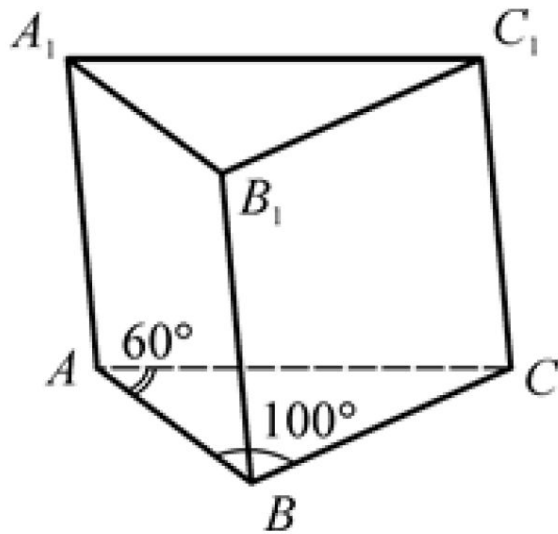
1.  $ABCD$  – параллелограмм,  
 $\angle BAD = 40^\circ$ ,  $AA_1 \parallel BB_1 \parallel CC_1 \parallel$   
 $DD_1$ ,  $AA_1 = BB_1 = CC_1 = DD_1$ .

Найдите угол между прямыми  $AB$  и  
 $A_1D_1$ ;  $BC$  и  $A_1B_1$ .



$$\angle(AB, A_1D_1) = 40^\circ, \angle(BC, A_1B_1) = 140^\circ.$$

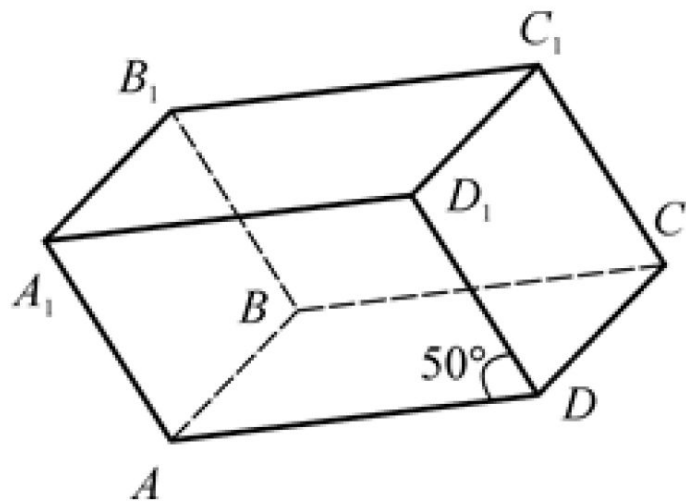
2.  $\triangle ABC$ ,  $\angle BAC = 60^\circ$ ;  $\angle ACB = 100^\circ$ ,  $AA_1 \parallel BB_1 \parallel CC_1$ ,  $AA_1 = BB_1 = CC_1$ . Найдите угол между прямыми  $AB$  и  $C_1B_1$ ;  $A_1B_1$  и  $A_1C_1$ .



$$\angle(AB, C_1B_1) = 100^\circ, \angle(A_1B_1, A_1C_1) = 60^\circ.$$

3.  $ABCD$  – параллелограмм,  $AA_1 \parallel$   
 $\parallel BB_1 \parallel CC_1 \parallel DD_1$ ,  $AA_1 = BB_1 =$   
 $= CC_1 = DD_1$ ,  $\angle ADD_1 = 50^\circ$ .

Найдите угол между прямыми  $BC$   
и  $DD_1$ ;  $BB_1$  и  $A_1D_1$ .

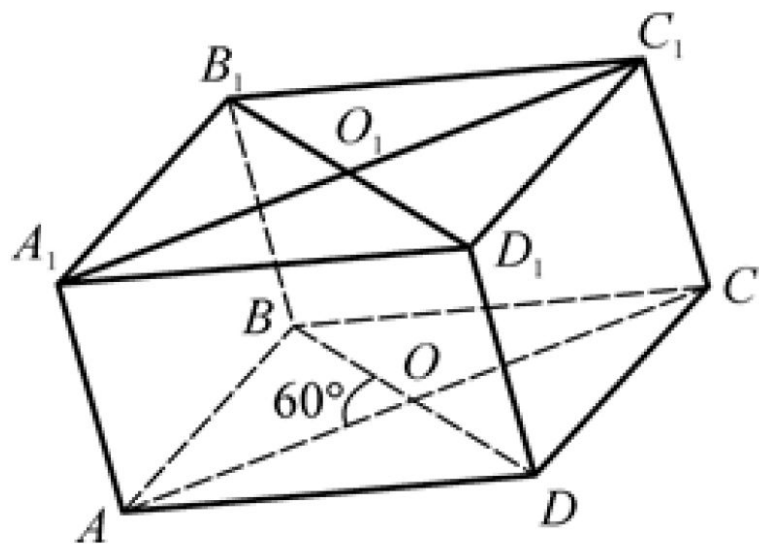


$$\angle(BC, DD_1) = 50^\circ, \angle(BB_1, A_1D_1) = 50^\circ.$$



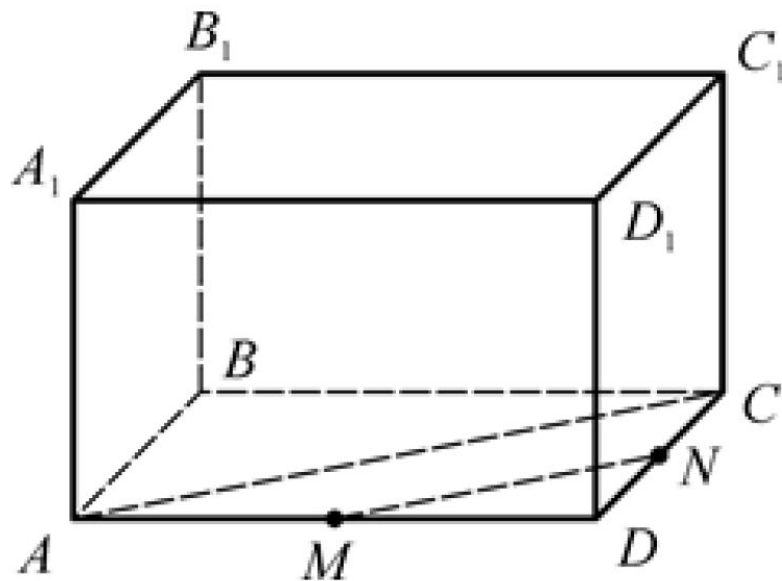
4.  $ABCD$  – прямоугольник,  
 $\angle AOB = 60^\circ$ ,  $AA_1 \parallel BB_1 \parallel CC_1 \parallel$   
 $DD_1, AA_1 = BB_1 = CC_1 = DD_1$ .

Найдите угол между прямыми  $A_1B_1$   
и  $AC$ ;  $AB$  и  $A_1D_1$ .



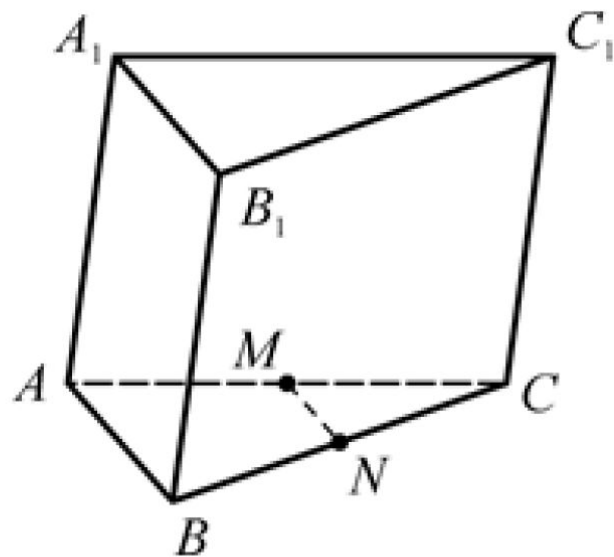
$$\angle(A_1B_1, AC) = 60^\circ, \angle(AB, A_1D_1) = 90^\circ.$$

5.  $ABCD$  – прямоугольник,  $AA_1 \parallel BB_1 \parallel CC_1 \parallel DD_1$ ,  $AA_1 = BB_1 = CC_1 = DD_1$ ,  $BB_1 \perp AC$ ,  $AM = MD$ ,  $CN = ND$ . Найдите угол между прямыми  $MN$  и  $DD_1$ ;  $BB_1$  и  $A_1C_1$ .



$$\angle(MN, DD_1) = 90^\circ, \angle(BB_1, A_1C_1) = 90^\circ.$$

6.  $\triangle ABC$  – правильный,  $AA_1 \parallel BB_1 \parallel CC_1$ ,  $AA_1 = BB_1 = CC_1$ ,  $AM = MC$ ,  $BN = NC$ . Найдите угол между прямыми  $AB$  и  $B_1C_1$ ;  $MN$  и  $A_1C_1$ .



$$\angle(AB, B_1C_1) = 60^\circ, \angle(MN, A_1C_1) = 60^\circ.$$