ПРОГРЕССИИ

Работу выполнила ученица 9 а класса Ясько Наталия.

Виды прогрессий

Арифметическая прогрессия, последовательность чисел (a_1, a_2, ..., a_n),из которых каждое следующее получается из предыдущего прибавлением постоянного числа.

Геометрическая прогрессия, последовательность чисел (a_1, a_2,¼, a_n¼),из которых каждое равно предыдущему, умноженному на постоянное для данной прогрессии число *q*

Формулы

	Прогрессии	
	Арифметическая	Геометрическая
	$\div\ a$	$\div\div\ b$
Определение	$a_{n+1} = a_n + d$	$b_{n+1} = b_n g$
Формула n первых членов прогрессии	$a_n = a_1 + d(n-1)$	$b_n = b_1 g^{n-1}$
Сумма n первых членов прогрессии	$S_n = \frac{2a_1 + d(n-1)}{2} \bullet n$	$S_n = \frac{b_1(g^n - 1)}{g-1}$
Свойства	$a_n = \frac{a_{n+1} + a_{n-1}}{2}$	$b_n = \sqrt{b_{n+1} b_{n-1}}$

Прогрессии древности

Задачи на прогрессии, дошедшие до нас из древности, были связаны с запросами хозяйственной жизни: распределение продуктов, деления наследства и др.

НАЗАД, В ИСТОРИЮ!

Понятие числовой последовательности возникло и развивалось задолго до создания учения о функциях.

На связь между прогрессиями первым обратил внимание великий **АРХИМЕД** (ок. 287–212 гг. до н.э)

Термин "прогрессия" был введен римским автором Боэцием (в 6 веке) и понимался в более широком смысле, как бесконечная числовая последовательность. Названия "арифметическая" и "геометрическая" были перенесены из теории непрерывных пропорций, которыми занимались древние греки.

Формула суммы членов арифметической прогрессии была доказана древнегреческим ученым Диофантом (в 3 веке). Формула суммы членов геометрической прогрессии дана в книге Евклида "Начала" (3 век до н.э.).

Правило для нахождения суммы членов произвольной арифметической прогрессии впервые встречается в сочинении «Книги абака» в 1202г. (Леонардо Пизанский)

Германия

КАРЛ ГАУСС
(1777 – 1855)

Нашел моментально сумму всех натуральных чисел от 1 до 100, будучи еще учеником начальной школы.

Решение

$1 + 2 + 3 + 4 + \ldots\ldots + 99 + 100 = (1 + 100) + (2 + 99) + \ldots\ldots + (50 + 51) = 101 \cdot 50 = 5050$

Древняя Греция

Сведения, связанные с прогрессиями, впервые встречаются в дошедших до нас документах Древней Греции. Уже в V в. до н. э. греки знали следующие прогрессии и их суммы:

$$1+2+3+......+n=\frac{n(n+1)}{2}$$

$$2+4+6+......+2n=n(n+1)$$

Древний Египет

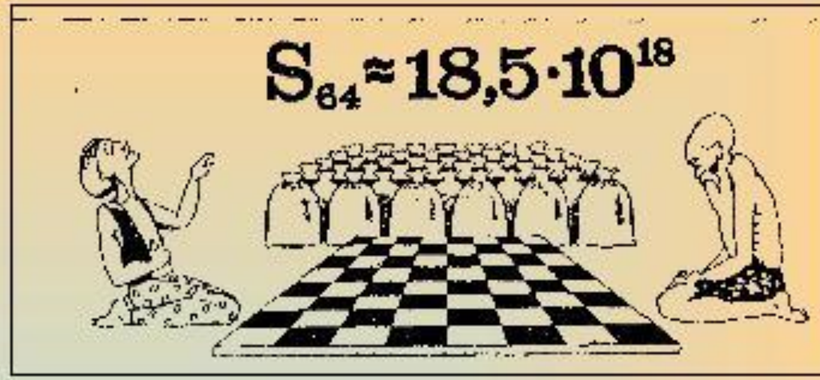
Задача из египетского папируса Ахмеса:

«Пусть тебе сказано: раздели 10 мер ячменя между 10 человеками, разность же между каждым человеком и его соседом равна $\frac{1}{8}$ меры»

Формула, которой пользовались египтяне:

$$a = \frac{S}{n} - (n-1)\bullet\frac{d}{2}\left(S = \frac{a+b}{2}\bullet n\right)$$

Задача-легенда



Индийский царь Шерам позвал к себе изобретателя шахматной игры, своего подданного Сету, чтобы наградить его за остроумную выдумку. Сета, издеваясь над царем, потребовал за первую клетку шахматной доски 1 зерно, за вторую — 2 зерна, за третью — 4 зерна и т. д. Обрадованный царь посмеялся над Сетой и приказал выдать ему такую «скромную» награду. Стоит ли царю смеяться?

Решение задачи - легенды

Дано $\boxed{\div\div}$ **; 1, 2, 4, 8, 16…**

$$b_1 = 1, \quad g = 2,$$ n = 64

$$S_{64} - ?$$

$$S_{64} = 2^{64} - 1$$

Сумма равна **18 446 744 073 709 551 615**

Вывод

Если бы царю удалось засеять пшеницей площадь всей поверхности Земли, считая моря, и океаны, и горы, и пустыню, и Арктику с Антарктикой, и получить удовлетворительный урожай, то, пожалуй, лет за 5 он смог бы рассчитаться.

Такое количество зерен пшеницы можно собрать лишь с площади в 2000 раз большей поверхности Земли. Это превосходит количество пшеницы, собранной человечеством до настоящего времени.

Задача из арифметики Магницкого

Некто продал лошадь за 156 рублей. Но покупатель, обретя лошадь, раздумал и возвратил продавцу, говоря: «Нет мне расчета покупать за эту цену лошадь, которая таких денег не стоит». Тогда продавец предложил другие условия: "Если по-твоему цена лошади высока, то купи ее подковные гвозди, лошадь же получишь тогда в придачу бесплатно. Гвоздей в каждой подкове 6. За первый гвоздь дай мне 1/4 коп., за второй-1/2коп., за третий-1коп., и т.д.“
Покупатель, соблазненный низкой ценой, и желая даром получить лошадь, принял условия продавца, рассчитывая, что за гвозди придется уплатить не более 10 рублей.

Решение задачи из арифметики Магницкого

1. Составим последовательность чисел $\frac{1}{4};\ \frac{1}{2};\ 1;\ 2; 2^2;\ldots 2^{21}.$

2. Данная последовательность является геометрической

прогрессией со знаменателем $q=2$, $b_1=\frac{1}{4}$ n = 24.

3. Попытаемся подсчитать сумму $\frac{1}{4};\ \frac{1}{2};\ 1;\ 2; 2^2;\ldots 2^{21}.$

4. Зная формулу $$S_n=\frac{b_1q^n-b_1}{q-1}$$

5. Имеем $$S_{24}=\frac{\frac{1}{4}\cdot 2^{24}-\frac{1}{4}}{2-1}=\frac{1}{2^2}\cdot 2^{24}-\frac{1}{4}=2^{22}-\frac{1}{4}=4194303\frac{3}{4}\approx 42000(p)$$

Прогрессии в литературе

Даже в литературе мы встречаемся с математическими понятиями! Так, вспомним строки из"Евгения Онегина".

...***Не мог он ямба от хорея,***
Как мы не бились отличить...

Ямб - это стихотворный размер с ударением на четных слогах 2; 4; 6; 8... Номера ударных слогов образуют арифметическую прогрессию с первым членом 2 и разностью прогрессии 2.

Хорей - это стихотворный размер с ударением на нечетных слогах стиха. Номера ударных слогов образуют арифметическую прогрессию 1; 3; 5; 7...

Примеры

Ямб

«Мой дЯдя сАмых чЕстных прАвил...»

Прогрессия: 2; 4; 6; 8...

Хорей

А.С. Пушкин

«Я пропАл, как звЕрь в загОне»

Прогрессия: 1; 3 ;5; 7...

Б. Л. Пастернак

Интересные факты

1) Химия. При повышении температуры по арифметической прогрессии скорость химических реакций растет по геометрической прогрессии.

2) Геометрия. Вписанные друг в друга правильные треугольники образуют геометрическую прогрессию.

3) Физика. И в физических процессах встречается эта закономерность. Нейтрон, ударяя по ядру урана, раскалывает его на две части. Получаются два нейтрона. Затем два нейтрона, ударяя по двум ядрам, раскалывает их еще на 4 части и т.д. – это геометрическая прогрессия.

4) Биология. Микроорганизмы размножаются делением пополам, поэтому при благоприятных условиях, через одинаковый промежуток времени их число удваивается.

5)Экономика. Вклады в банках увеличиваются по схемам сложных и простых процентов. Простые проценты – увеличение первоначального вклада в арифметической прогрессии, сложные проценты – увеличение в геометрической прогрессии.

Прогрессии широко встречаются в окружающей нас жизни.

Прогрессии в природе.

Все организмы обладают интенсивностью размножения в геометрической прогрессии. Примеры этих организмов:

ИНФУЗОРИИ… Летом инфузории размножаются бесполым способом делением пополам. Вопрос: сколько будет инфузорий после 15-го размножения?

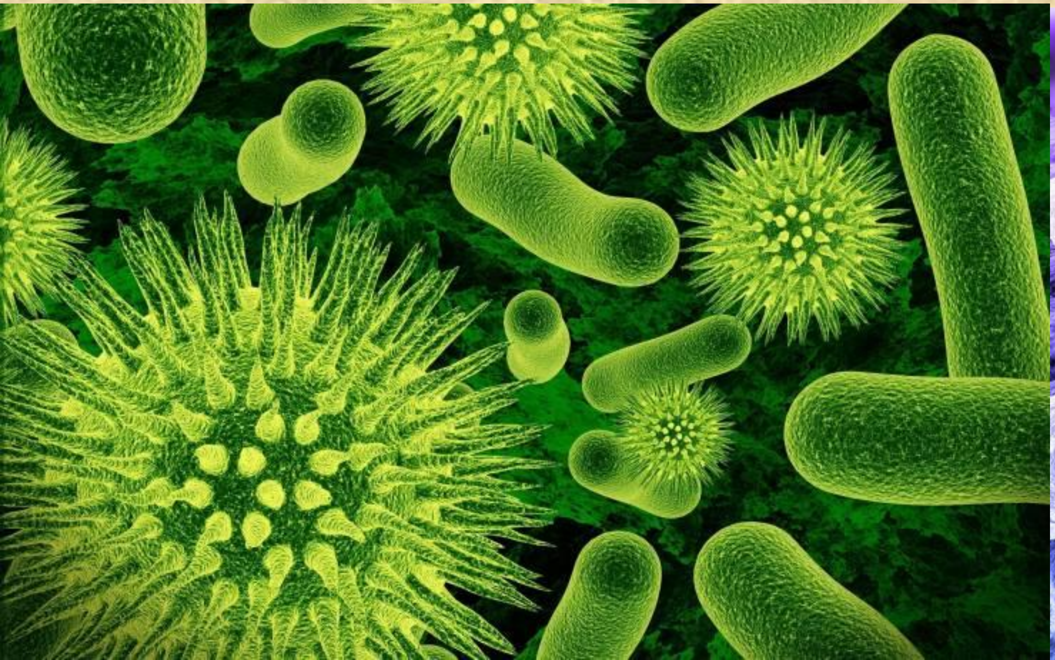
Ответ: $b_{15} = 2 \cdot 2^{14} = 32\ 768$ *(геометрическая прогрессия)*

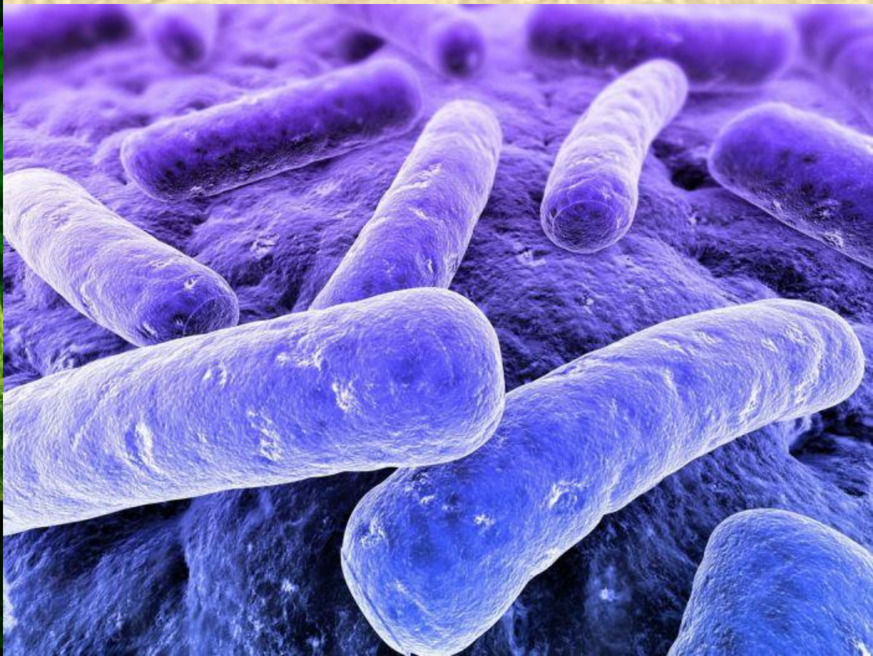




БАКТЕРИИ… Известно, что бактерии размножаются делением: одна бактерия делится на две; каждая из этих двух в свою очередь тоже делится на две, и получаются четыре бактерии; из этих четырех в результате деления получаются восемь бактерий и т. д. (геометрическая прогрессия). Результат каждого удвоения будем называть поколением.

Способность к размножению у бактерий настолько велика, что если бы они не гибли от разных причин, а беспрерывно размножались, то за трое суток общая масса потомства одной только бактерии могла бы составить 7500 тонн. Таким громадным количеством бактерий можно было бы заполнить около 375 железнодорожных вагонов.





ТЛИ……. Всего за пять поколений, то есть за 1 – 1,5 летних месяцев,
одна единственная тля может оставить более 300 млн. потомков, а за год её потомство способно будет покрыть поверхность земного шара слоем
толщиной почти в 1 метр. (слайд 47)
ВОРОБЬИ…… Потомство пары птиц величиной с воробья при продолжительности жизни в четыре года может покрыть весь земной шар за 35 лет.
Еще две биологические задачи с применением прогрессии: При каждом делении амёбы получается две новые особи. Сколько особей будет после 6 делений? После 10 делений?
Гидра размножается почкованием, причём при каждом делении получается 5 новых особей. Какое количество делений необходимо для получения 625 особей?

Прогрессии в медицине.

- Больной принимает лекарство по следующей схеме: в первый день он принимает 5 капель, а в каждый следующий день — на 5 капель больше, чем в предыдущий. Приняв 40 капель, он 3 дня пьет по 40 капель лекарства, а потом ежедневно уменьшает прием на 5 капель, доведя его до 5 капель. Сколько пузырьков лекарства нужно купить больному, если в каждом содержится 20 мл лекарства (что составляет 250 капель)?
- Найдя сумму n первых членов арифметической прогрессии, найдете, что вам надо купить 180 капель. Т.е. 2 пузырька лекарства.
- ***Решение.*** Составим математическую модель задачи:
- 5, 10, 15,…,40, 40, 40, 35, 30,…,5
- $a_n=a_1+d(n-1)$,
- $40=5+5(n-1)$,
- $n=8$,
- $S_n=((a_1+a_n)n)/2$, $S_8=(5+40)\cdot 8:2=180$,
- 180 капель больной принимал по схеме в первый период и столько же по второй период. Всего он принял 180+40+180=400(капель), всего больной выпьет 400:250=1,6 (пузырька). Значит, надо купить 2 пузырька лекарства.

Прогрессии в спорте

- В соревновании по стрельбе за каждый промах в серии из 25 выстрелов стрелок получал штрафные очки: за первый промах — одно штрафное очко, за каждый последующий — на 0,5 очка больше, чем за предыдущий. Сколько раз попал в цель стрелок, получивший 7 штрафных очков?
- ***Решение.*** Составим математическую модель задачи. Система штрафных очков составляет арифметическую прогрессию, первый член которой равен 1, а разность – 0,5. Сумма первых n членов (количество промахов) равно 7. Найдем число промахов - n.

Выводы:

- Установили, что сами по себе прогрессии известны так давно, что нельзя говорить о том, кто их открыл.
- Убедились в том, что задачи на прогрессии, дошедшие до нас из древности, также как и многие другие знания по математике, были связаны с запросами хозяйственной жизни: распределение продуктов, деление наследства и другими.
- Выяснили, что в развитие теории о прогрессиях внесли ученые Архимед, Пифагор и его ученики, французские математики Леонард Фибоначчи и Баше де Мезириака, немецкие математики М. Штифель, Н. Шюке, и К. Гаусс.
- Нашли много задач на арифметическую и геометрическую прогрессию в старых и в современных учебниках по математике. Заметили, что арифметическая прогрессия в практических задачах встречается чаще геометрической. Много задач с практическим содержанием в учебнике для 9 класса под редакцией Г.В. Дорофеева [4].
- Обнаружили, что интенсивное размножение бактерий в геометрической прогрессии широко применяется в пищевой промышленности, в фармакологии, в медицине, в сельском и коммунальном хозяйствах, в банковских расчетах (начисление сложных процентов).
- Сделав анализ задач на прогрессии с практическим содержанием мы увидели, что прогрессии встречаются при решении задач в медицине, в строительстве, в банковских расчетах, в живой природе, в спортивных соревнованиях и в других жизненных ситуациях. Следовательно, нам необходим навык применения знаний, связанных с прогрессиями.

Спасибо за внимание.