Многочлены

L/O/G/O

www.themegallery.com

Многочлены от одной переменной

$$p(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \ldots + a_3 x^3 + a_2 x^2 + a_1 x + a_o$$

- стандартный вид многочлена $p(x)$

$a_n x^n$ – старший член многочлена $p(x)$

a_n – коэффициент при старшем члене

n – степень многочлена

a_o – свободный член многочлена $p(x)$

Если $a_n = 1$, то многочлен $p(x)$ называется **приведенным**

Если $a_n \neq 1$, то многочлен $p(x)$ называется **неприведенным**

Деление многочленов

Говорят, что многочлен $p(x)$ делится на многочлен $s(x)$, если существует такой многочлен $q(x)$, что выполняется тождество

$$p(x) = s(x) \cdot q(x)$$

$p(x)$ – делимое (или кратное)

$s(x)$ – делитель

$q(x)$ – частное

Деление многочленов

Пример 1

т. к. $x^3 - 3x^2 + 5x - 15 = (x^2 + 5)(x - 3)$, то многочлен $x^3 - 3x^2 + 5x - 15$ делится на многочлены $x^2 + 5$ и $x - 3$.

делимое

делитель

$$\begin{array}{rrrr|l} x^3 & -\,3x^2 & +\,5x & -\,15 & x^2 + 5 \\ \cline{5-5} -\;x^3 & & +\,5x & & x - 3 \\ \cline{1-4} & -\,3x^2 & & -\,15 & \\ & -\;-\,3x^2 & & -\,15 & \\ \cline{2-4} & & & 0 & \end{array}$$

частное

Деление многочленов с остатком

Для любых двух многочленов ненулевой степени $p(x)$ и $s(x)$ существует пара многочленов $q(x)$ и $r(x)$ такая, что степень многочлена $r(x)$ меньше степени многочлена $s(x)$ и выполняется тождество

$$p(x) = s(x)\,q(x) + r(x)$$

$p(x)$ – делимое (или кратное)

$s(x)$ – делитель

$q(x)$ – неполное частное

$r(x)$ – остаток

Деление многочленов с остатком

Пример 2

т. к. $2x^2 - x - 3 = 2x^2 - 4x + 3x - 6 + 3 =$

$= 2x(x - 2) + 3(x - 2) + 3 = (x - 2)(2x + 3) + 3,$

то $2x^2 - x - 3 = (x - 2)(2x + 3) + 3$

делимое *делитель*

$$
\begin{array}{r|l}
\underline{-\;2x^2 - x - 3} & x - 2 \\
2x^2 - 4x & \overline{2x + 3} \\
\hline
\underline{-\;3x - 3} & \\
3x - 6 & \\
\hline
3 &
\end{array}
$$

частное

остаток

Теорема Безу

Остаток от деления многочлена $p(x)$ ненулевой степени на двучлен $x - a$ равен $p(a)$ (т.е. значению многочлена $p(x)$ при $x = a$)

$$p(x) = (x - a)\, q(x) + r$$

$p(x)$ – делимое (или кратное)

$x - a$ – делитель

$q(x)$ – частное

r – остаток (число)

Деление многочленов с остатком

Пример 2

Найдем остаток от деления многочлена $p(x) = 2x^2 - x - 3$ на двучлен $x - 2$.

По теореме Безу: $p(2) = 2 \cdot 2^2 - 2 - 3 = 3$

$$
\begin{array}{r|l}
-\;2x^2 - x - 3 & x - 2 \\
2x^2 - 4x \quad & \overline{2x + 3} \\
\hline
-\;3x - 3 & \\
3x - 6 & \\
\hline
3 &
\end{array}
$$

остаток

Следствие теоремы Безу

Определение

Если при $x = a$ *многочлен* $p(x)$ *обращается в нуль, т.е. выполняется равенство* $p(a) = 0$*, то число* a *называют* ***корнем многочлена***.

Следствие

Если число a является корнем многочлена $p(x)$, то $p(x)$ делится на двучлен $x - a$.

Схема Горнера

Пусть $p(x) = bx^4 + cx^3 + dx^2 + ex + f$. Разделим $p(x)$ на $x - a$ получим $p(x) = (x - a)q(x) + r$, где $q(x)$ некоторый многочлен третьей степени $q(x) = kx^3 + mx^2 + nx + s$, коэффициенты которого вычисляются с помощью ***схемы Горнера***:

$$k = b$$
$$m = ka + c$$
$$n = ma + d$$
$$s = na + e$$
$$r = sa + f$$

	b	c	d	e	f
a	$k = b$	$m = ka + c$	$n = ma + d$	$s = na + e$	$r = sa + f$

Пример 3

Разделим $p(x) = 2x^5 + x^4 - 3x^3 + 2x^2 + 5$ на $x + 2$.
Здесь $a = -2$; Коэффициенты равны соответственно
$2, \quad 1, \quad -3, \quad 2, \quad 0, \quad 5.$
Строим таблицу для применения схемы Горнера:

	2	1	−3	2	0	5
−2	2	2 ·	−3 ·	3 ·	−4 ·	8 ·
	2	(−2)+1 −3	(−2)+(−3) 3	(−2)+2 −4	(−2)+0 8	(−2)+5 −11

Коэффициенты частного: $2, -3, \quad 3, -4, \quad 8,$

а остаток $r = -11$.

Значит, $2x^5 + x^4 - 3x^3 + 2x^2 + 5 =$

$= (x + 2)(2x^4 - 3x^3 + 3x^2 - 4x + 8) - 11$

остаток

Разложение многочлена на множители

1. Вынесение общего множителя за скобки
2. Способ группировки
3. Использование формул сокращенного умножения
4. Разложение квадратного трехчлена на множители

Вынесение общего множителя за скобки

Применяя распределительный закон умножения относительно сложения:

$$(a + b)c = ac + bc$$

В обратном порядке:

$$ac + bc = c(a + b)$$

Пример 4

$$8x^4 + 6x^3 - 4x^2 + 2x = 2x(4x^3 + 3x^2 - 2x + 1)$$

$$3x^3 + 6x^6 - 27x^4 = 3x^3(1 + 2x^3 - 9x)$$

Способ группировки

Применяя переместительный или сочетательный законы сложения, можно группировать члены многочлена любым способом:

$$a + b = b + a$$

$$(a + b) + c = a + (b + c) = a + b + c$$

Пример 5

$$3x^3 + 6x^2 - 27x - 54 = 3(x^3 + 2x^2 - 9x - 18) =$$

$$= 3(x^2(x + 2) - 9(x + 2)) = 3(x + 2)(x^2 - 9) =$$

$$= 3(x + 2)(x - 3)(x + 3)$$

Использование формул сокращенного умножения

$(a + b)(a - b) = a^2 - b^2$ – *разность квадратов*

$(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$ – *квадрат суммы*

$(a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$ – *квадрат разности*

$(a + b)(a^2 - ab + b^2) = a^3 + b^3$ – *сумма кубов*

$(a - b)(a^2 + ab + b^2) = a^3 - b^3$ – *разность кубов*

$(a - b)^3 = a^3 - 3ab^2 + 3a^2b - b^3$ – *куб разности*

$(a + b)^3 = a^3 + 3ab^2 + 3a^2b + b^3$ – *куб суммы*

Пример 6

$$x^6 - 1 = (x^3)^2 - 1^2 = (x^3 + 1)(x^3 - 1) =$$

$$= (x + 1)(x^2 - x + 1)(x - 1)(x^2 + x + 1)$$

Разложение квадратного трехчлена на линейные множители

Если x_1 *и* x_2 *– корни квадратного трехчлена* $ax^2 + bx + c$, *то*

$$ax^2 + bx + c = a(x - x_1)(x - x_2)$$

Пример 7

$$2x^2 - 3x - 5 = 2(x + 1)(x - 2{,}5) = (x + 1)(2x - 5)$$

Теорема

*Пусть все коэффициенты многочлена **p(x)** – целые числа. Если целое число **a** является корнем многочлена **p(x)**, то **a** – делитель свободного члена многочлена **p(x)**.*

Д о к а з а т е л ь с т в о *проведем для случая, когда* ***p(x)*** *– многочлен третьей степени:* $p(x) = bx^3 + cx^2 + dx + m$*, где все коэффициенты* ***b***, ***c***, ***d***, ***m*** *– целые числа. По условию, целое число* ***a*** *является корнем многочлена* ***p(x)***.
Это значит, что $p(a) = 0$*, т. е.* $ba^3 + ca^2 + da + m = 0$.
Преобразуем полученное равенство к виду $m = a(-ba^2 - ca - d)$ *и обозначим целое число* $(-ba^2 - ca - d)$ *буквой* ***k***.
Тогда последнее равенство можно переписать в виде $m = ak$*, а это и означает, что число* ***a*** *– делитель числа* ***m***, *т. е. делитель свободного члена многочлена* ***p(x)***.
Аналогично проводится доказательство теоремы для случая, когда ***p(x)*** *– многочлен четвертой, пятой и вообще* ***n****-й степени.*

Пример 8

Разложить многочлен: $x^3 - 3x^2 - 10x + 24$

Будем искать корни среди делителей свободного коэффициента 24: $\pm 1; \pm 2; \pm 3; \pm 4; \pm 6; \pm 8; \pm 12; \pm 24$.
$p(1) = 12 \neq 0$, $p(-1) = 30 \neq 0$, $p(2) = 0$.
Значит $x = 2$ *– корень многочлена* $p(x)$*. С помощью схемы Горнера найдем частное* $q(x)$*:*

	1	-3	-10	24
2	1	$2\cdot 1+(-3$	$2\cdot(-1)$	$2\cdot$
	1	$-)1$	-10 / -12	$(-12)+24$ / 0

$$x^3 - 3x^2 - 10x + 24 = (x - 2)(x^2 - x - 12) =$$

$$= (x - 2)(x - 4)(x + 3)$$

Многочлены от нескольких переменных

$$x^2 - y^2 = (x - y)(x + y)$$

$$x^3 - y^3 = (x - y)(x^2 + xy + y^2)$$

$$x^4 - y^4 = (x - y)(x^3 + x^2y + xy^2 + y^3)$$

$$x^5 - y^5 = (x - y)(x^4 + x^3y + x^2y^2 + xy^3 + y^4)$$

…

$$x^n - y^n = (x - y)(x^{n-1} + x^{n-2}y + x^{n-3}y^2 + \ldots +$$

$$+ x^2y^{n-3} + xy^{n-2} + y^{n-1})$$

Многочлены от нескольких переменных

$$x^3 + y^3 = (x + y)(x^2 - xy + y^2)$$

$$x^5 + y^5 = (x + y)(x^4 - x^3y + x^2y^2 - xy^3 + y^4)$$

$$\dots$$

$$x^{2n+1} + y^{2n+1} = (x + y)(x^{2n} - x^{2n-1}y + x^{2n-2}y^2 -$$

$$- x^{2n-3}y^3 + \dots + x^2y^{2n-2} - xy^{2n-1} + y^{2n})$$

Многочлен **$P(x; y)$** называют однородным многочленом **n**-ой степени, если сумма показателей степеней переменных в каждом члене многочлена равна **n**.

Если **$P(x; y)$** однородный многочлен, то уравнение **$P(x; y) = 0$** называют однородным уравнением.

Уравнения высших степеней

Теорема. *Если приведенное уравнение с целыми коэффициентами имеет рациональный корень, то этот корень обязательно является целым числом.*

Пример 9

$$x^3 + 2x^2 - 7x - 12 = 0$$

Делители числа 12: ± 1; ± 2; ± 3; ± 4; ± 6; ± 8; ± 12.

Пусть $P(x) = x^3 + 2x^2 - 7x - 12$, *тогда*

$P(1) = -16$, $P(-1) = -4$, $P(2) = -10$, $P(-2) = 2$, $P(3) = 12$, $P(-3) = 0$.

Значит $x = -3$ *– корень многочлена* $P(x)$.