Численные методы минимизации функций одной переменной

$$\boxed{f(x) \to \min, \quad x \in U \subseteq}$$
$\boldsymbol{R}$

$x^* \in U$ - ***точка абсолютного (глобального) минимума*** $\Leftrightarrow$ $f(x^*) \le f(x)$ для всех $x \in U$

$f^* = \min\limits_{U} f(x)$ - ***абсолютный (глобальный) минимум***

$\tilde{x} \in U$ - ***точка локального минимума***

$$\Updownarrow$$

$$\exists \delta > 0: \ \forall x \in U_\delta = \{x : x \in U, |x - \tilde{x}| < \delta\} \quad f(\tilde{x}) \le f(x)$$

Глобальный минимум $\Rightarrow$ Локальный минимум

МЕТОДЫ МИНИМИЗАЦИИ

- основанные на вычислении только значений минимизируемой функции (прямые)

- использующие значения производных минимизируемой функции

Метод перебора

$$f(x) \in C[a;b] \qquad \varepsilon > 0 \qquad n > (b-a)/\varepsilon$$

$$x_i = a + i(b-a)/n, \qquad i = 0,\ldots,n$$

$$f(x_m) = \min_{0 \le i \le n} f(x_i) \Longrightarrow x^* \approx x_m, \qquad f^* \approx f(x_m)$$

Пример.

$$f(x) = x^4 + 8x^3 - 6x^2 - 72x \quad \text{на отрезке } [1{,}5;\ 2]; \quad \varepsilon = 0{,}05$$

$$n = \frac{2-1{,}5}{0{,}05} = 10$$

x_i	1,50	1,55	1,60	1,65	1,70
$f(x_i)$	-89,44	-90,45	-91,24	-91,79	-92,08
x_i	1,75	1,80	1,85	1,90	1,95
$f(x_i)$	-92,12	-91,89	-91,37	-90,56	-89,44

$\Longrightarrow$ $\boxed{x^* \approx 1{,}75,\ f^* \approx -92{,}12}$

$f(x) \in C[a;b]$ - ***унимодальная***

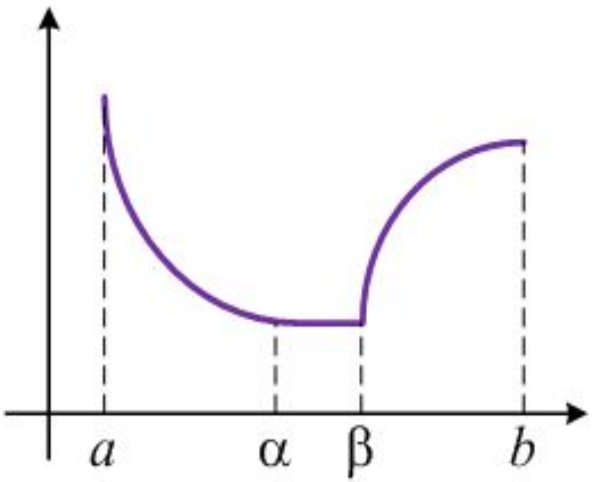
$\Updownarrow$

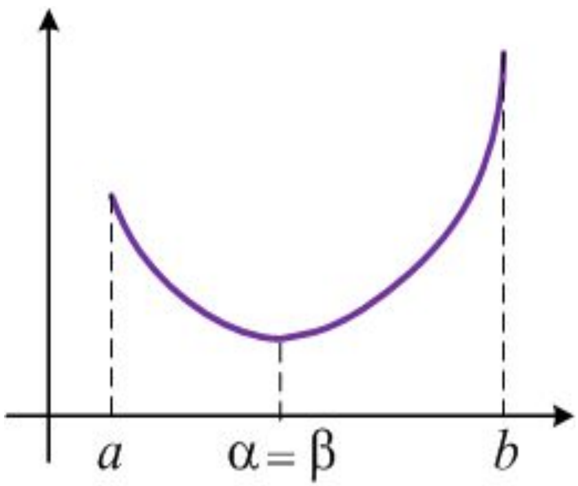
$\exists \alpha, \beta: \quad a \le \alpha \le \beta \le b$

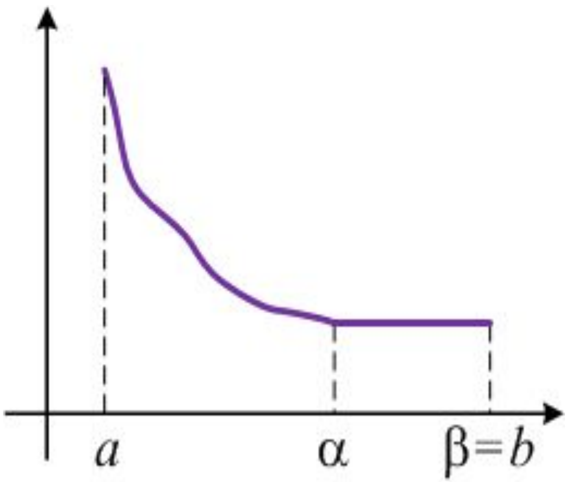
1) $a < \alpha$ $\Rightarrow$ на отрезке $[a;\ \alpha\ ]$ $f(x)$ монотонно убывает;

2) $\beta < b$ $\Rightarrow$ на отрезке $[\beta;\ b]$ $f(x)$ монотонно возрастает;

3) при $x \in [\alpha;\ \beta]$ $f(x) = \min\limits_{[a;b]} f(x)$





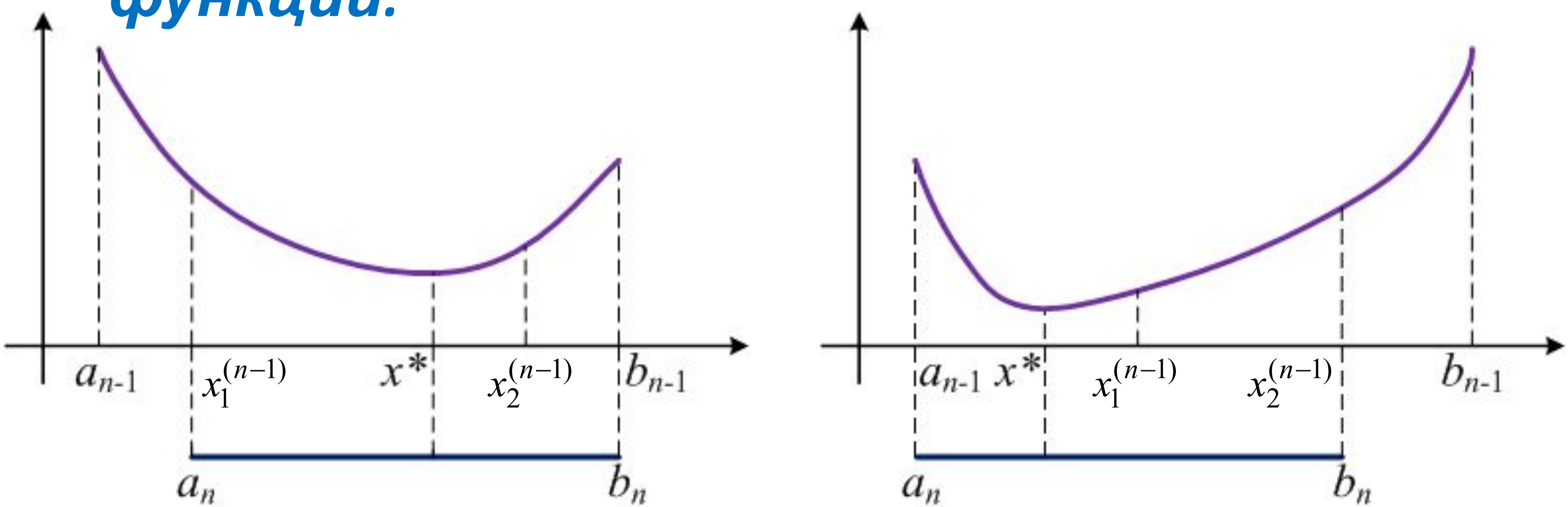


Достаточные критерии унимодальности:

1) $f(x) \in C^1[a; b]$
$f'(x)$ не убывает при $x \in [a; b]$ $\Rightarrow$ $f(x) \in Q[a; b]$

2) $f(x) \in C^2[a; b]$
$f''(x) \geq 0$ при $x \in [a; b]$ $\Rightarrow$ $f(x) \in Q[a; b]$

Принцип минимизации унимодальных функций:



Метод деления пополам

$$f(x) \in Q[a;b] \qquad \varepsilon > 0 \qquad \delta \in (0;2\varepsilon)$$

$$a_0 = a; \quad b_0 = b$$

$$x_1^{(n-1)} = \frac{a_{n-1} + b_{n-1} - \delta}{2}; \quad x_2^{(n-1)} = \frac{a_{n-1} + b_{n-1} + \delta}{2}$$

$$f(x_1^{(n-1)}) \le f(x_2^{(n-1)}) \Longrightarrow a_n = a_{n-1},\ b_n = x_2^{(n-1)}$$

$$f(x_1^{(n-1)}) > f(x_2^{(n-1)}) \Longrightarrow a_n = x_1^{(n-1)},\ b_n = b_{n-1}$$

$$x^* \approx (b_n + a_n)/2$$

$$\varepsilon_n = (b_n - a_n)/2 = (b - a - \delta)/2^{n+1} + \delta/2$$

Пример.

$$f(x) = x^4 + 8x^3 - 6x^2 - 72x \quad \text{на отрезке } [1{,}5;\ 2]; \quad \varepsilon = 0{,}05$$

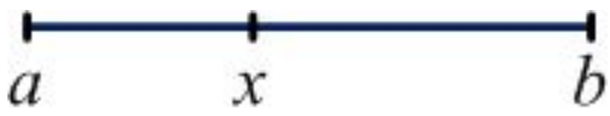
$$\delta = 0{,}02 < 2\varepsilon = 0{,}1$$

n	a_n	b_n	ε_n	$x_1^{(n)}$	$x_2^{(n)}$	$f(x_1^{(n)})$	$f(x_2^{(n)})$	Примечание
0	1,50	2,00	0,25	1,74	1,76	-92,135	-92,096	$f(x_1^{(0)}) < f(x_2^{(0)})$
1	1,50	1,76	0,13	1,62	1,64	-91,487	-91,696	$f(x_1^{(1)}) > f(x_2^{(1)})$
2	1,62	1,76	0,07	1,68	1,70	-91,995	-92,084	$f(x_1^{(2)}) > f(x_2^{(2)})$
3	1,68	1,76	0,04					$\varepsilon_3 < \varepsilon$, точность достигнута

$$\boxed{x^* \approx 1{,}72 \qquad f^* \approx f(1{,}72) = -92{,}13}$$

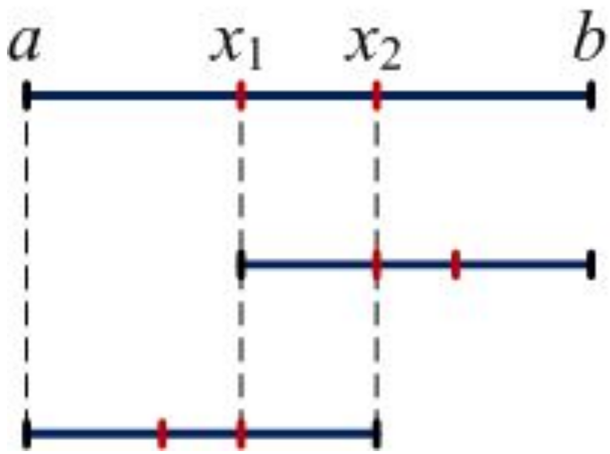
Метод золотого сечения

x - *точка золотого сечения* отрезка [*a*; *b*]:



$$\frac{b-a}{b-x}=\frac{b-x}{x-a}$$

$$\boxed{x_1=a+\frac{3-\sqrt{5}}{2}(b-a),\quad x_2=a+\frac{\sqrt{5}-1}{2}(b-a)}$$



$$x_1=a+b-x_2$$

$$x_2=a+b-x_1$$

$$f(x) \in Q[a;b] \qquad \varepsilon > 0$$

$$a_1 = a; \quad b_1 = b$$

$x_1^{(n-1)}, x_2^{(n-1)}$ - точки золотого сечения отрезка $[a_{n-1}; b_{n-1}]$

$$f(x_1^{(n-1)}) \le f(x_2^{(n-1)}) \Longrightarrow a_n = a_{n-1}, \; b_n = x_2^{(n-1)}, \; \bar{x}_n = x_1^{(n-1)}$$

$$f(x_1^{(n-1)}) > f(x_2^{(n-1)}) \Longrightarrow a_n = x_1^{(n-1)}, \; b_n = b_{n-1}, \; \bar{x}_n = x_2^{(n-1)}$$

$$\boxed{\left| x^* - \bar{x}_n \right| \le \varepsilon_n = \left(\frac{\sqrt{5}-1}{2} \right)^n (b-a)}$$

$$n \ge \ln\left(\frac{\varepsilon}{b-a} \right) \Big/ \ln\left(\frac{\sqrt{5}-1}{2} \right) \approx -2{,}1 \ln\left(\frac{\varepsilon}{b-a} \right)$$

Пример.

$$f(x) = x^4 + 8x^3 - 6x^2 - 72x$$ на отрезке [1,5; 2]; $\varepsilon = 0,05$

n	a_n	b_n	ε_n	$x_1^{(n)}$	$x_2^{(n)}$	$f(x_1^{(n)})$	$f(x_2^{(n)})$	Примечание
1	1,500	2,000	0,309	1,691	1,809	-92,049	-91,814	$f(x_1^{(1)}) < f(x_2^{(1)})$
2	1,500	1,809	0,191	1,618	1,691	-91,464	-92,049	$f(x_1^{(2)}) > f(x_2^{(2)})$
3	1,618	1,809	0,118	1,691	1,736	-92,049	-92,138	$f(x_1^{(3)}) > f(x_2^{(3)})$
4	1,691	1,809	0,073	1,736	1,764	-92,138	-92,083	$f(x_1^{(4)}) < f(x_2^{(4)})$
5	1,691	1,764	0,045		1,736		-92,138	$\varepsilon_5 < \varepsilon$, точность достигнута

$$\boxed{x^* \approx 1,736 \qquad f^* \approx f(1,736) = -92,138}$$

Метод ломаных

f(x) удовлетворяет на отрезке [*a*; *b*] ***условию Липшица***:

$$\exists L > 0 \;\; \forall x', x'' \in [a; b]: \quad \left| f(x') - f(x'') \right| \le L \left| x' - x'' \right|$$

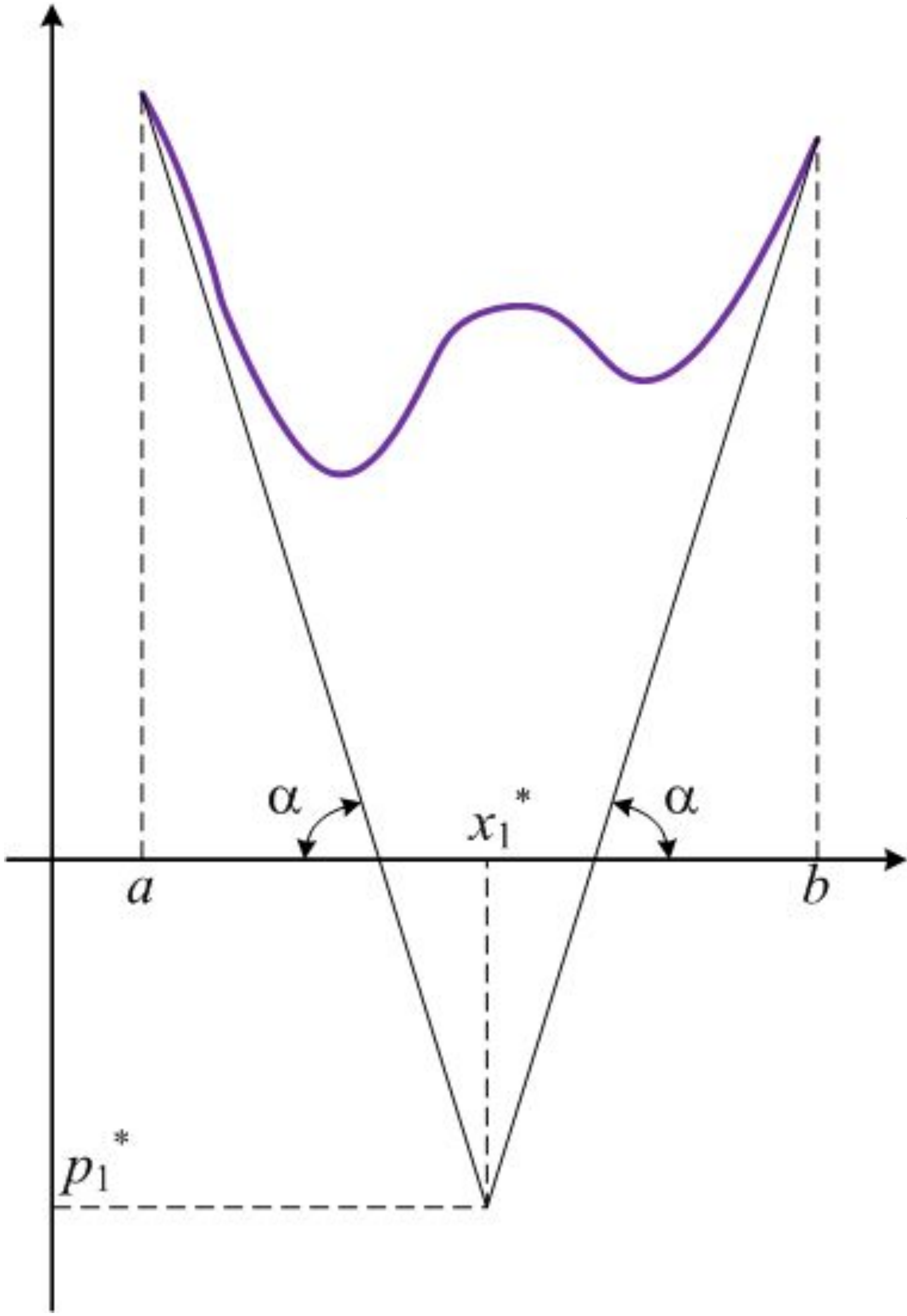
$$f(x) \in C^1[a; b] \quad \Rightarrow \quad L \ge \max_{[a;b]} \left| f'(x) \right|$$

Пример.

$$f(x) = \frac{\sin x}{x} \text{ на отрезке } [10; 15]$$

$$\left| f'(x) \right| = \left| \frac{x \cos x - \sin x}{x^2} \right| < \frac{x \left| \cos x \right| + \left| \sin x \right|}{x^2} < \frac{x + 1}{x^2} \le 0{,}11$$

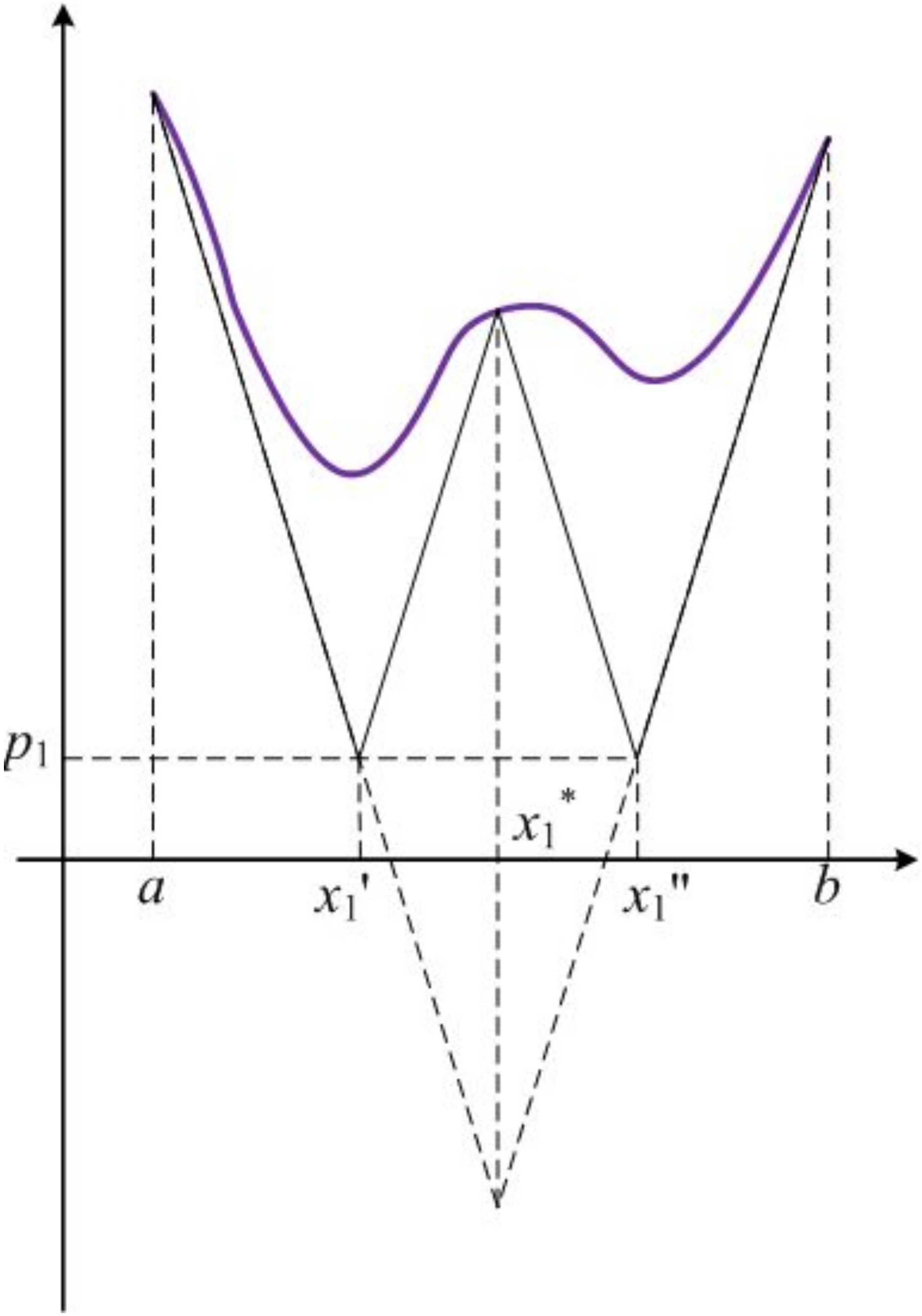
$$\boxed{L = 0{,}11}$$



$$tg\,\alpha = L$$

$$x_1^* = \frac{1}{2L}\left[f(a) - f(b) + L(a+b)\right]$$

$$p_1^* = \frac{1}{2}\left[f(a) + f(b) + L(a-b)\right]$$



Шаг 1

$$\Delta_1 = \frac{1}{2L}\left[f(x_1^*) - p_1^*\right]$$

$$x_1' = x_1^* - \Delta_1$$

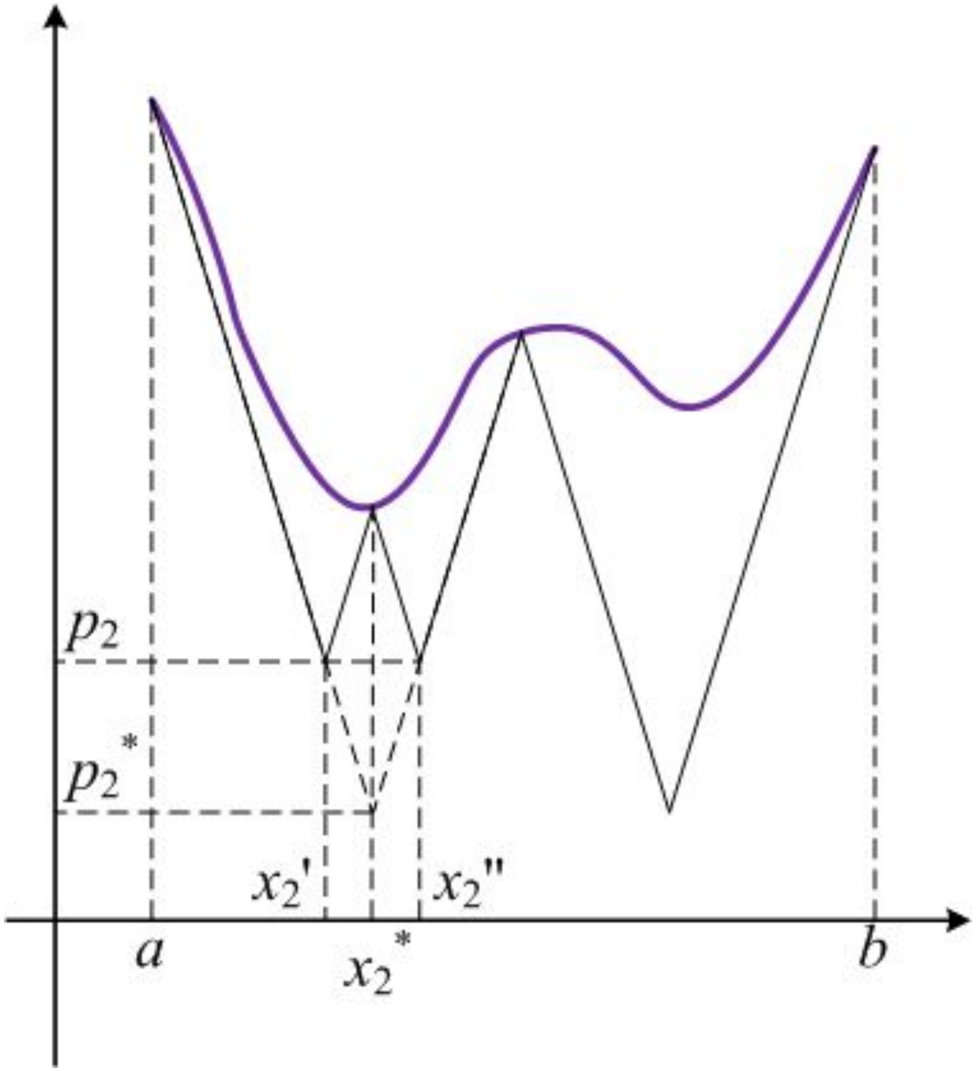
$$x_1'' = x_1^* + \Delta_1$$

$$p_1 = \frac{1}{2}\left[f(x_1^*) + p_1^*\right]$$

Образуем пары:

$$(x_1', p_1),\quad (x_1'', p_1)$$

Шаг 2



$$(x_1', p_1) \rightarrow (x_2^*, p_2^*)$$

$$\Delta_2 = \frac{1}{2L}\left[f(x_2^*) - p_2^*\right]$$

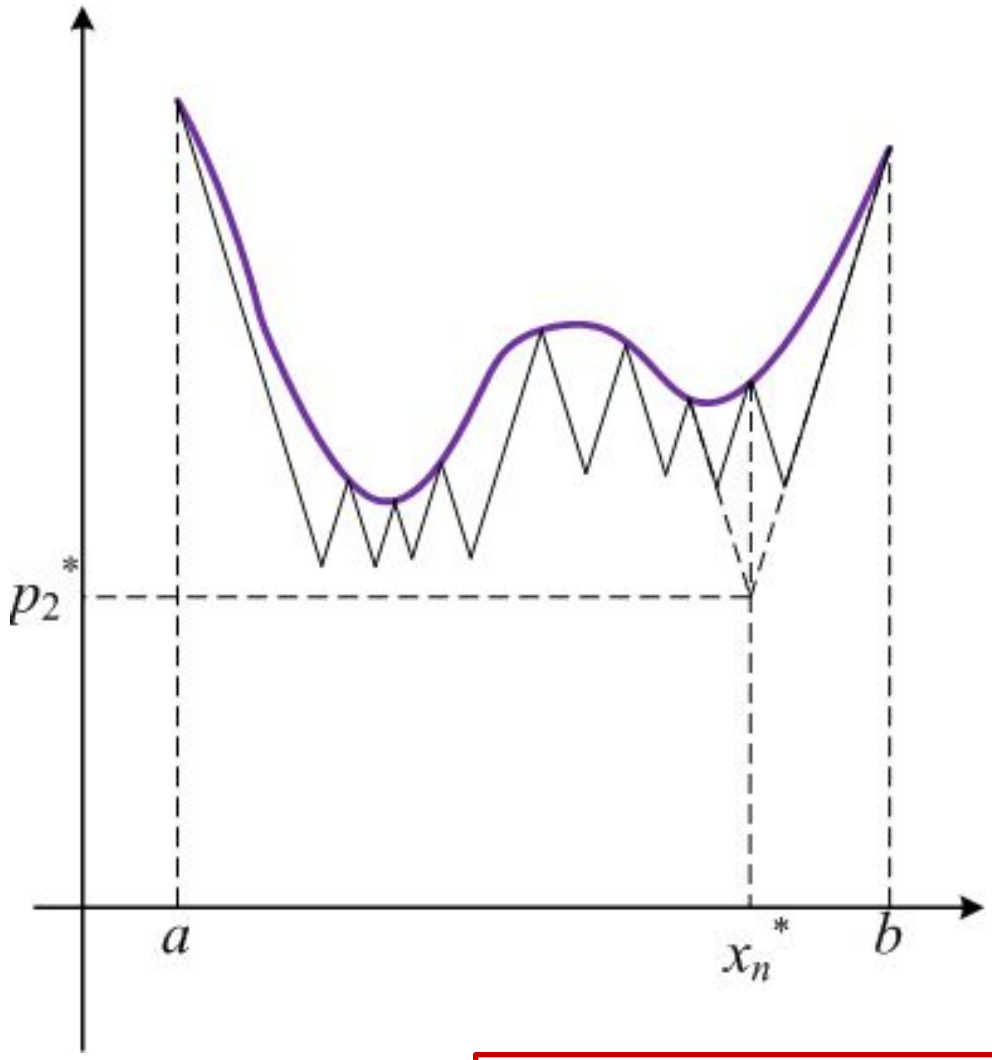
$$x_2' = x_2^* - \Delta_2$$

$$x_2'' = x_2^* + \Delta_2$$

$$p_2 = \frac{1}{2}\left[f(x_2^*) + p_2^*\right]$$

Добавляем пары:

$$(x_2', p_2),\ (x_2'', p_2)$$



Шаг n

$$(x_n^*, p_n^*): \quad p_n^* = \min p_i$$

$$\Delta_n = \frac{1}{2L}\left[f(x_n^*) - p_n^*\right]$$

$$x_n' = x_n^* - \Delta_n$$

$$x_n'' = x_n^* + \Delta_n$$

$$p_n = \frac{1}{2}\left[f(x_n^*) + p_n^*\right]$$

$$\boxed{\begin{gathered} x^* \approx x_n^*, \quad f(x^*) \approx f(x_n^*) \\ 0 \le f(x_n^*) - f^* \le 2L\Delta_n \end{gathered}}$$

Пример $f(x) = \sin x / x$ на отрезке [10; 15]

- $L = 0{,}11$ $x_1^* = 12{,}056$ $p_1^* = -0{,}281$

n	Исключаемая пара		$f(x_n^*)$	Δ_n	$2L\Delta_n$	Включенные пары		
	x_n^*	p_n^*				x_n'	x_n''	p_n
1	**12,056**	**-0,281**	**-0,041**	**1,093**	**0,240**	**10,963**	**13,149**	**-0,161**
2	**10,963**	**-0,161**	**-0,091**	**0,316**	**0,070**	**10,647**	**11,279**	**-0,126**
3	**13,149**	**-0,161**	**0,042**	**0,921**	**0,203**	**12,228**	**14,070**	**-0,059**
4	**10,647**	**-0,126**	**-0,088**	**0,171**	**0,038**	**10,475**	**10,818**	**-0,107**
5	**11,279**	**-0,126**	**-0,085**	**0,186**	**0,041**	**11,094**	**11,465**	**-0,106**
6	**10,475**	**-0,107**	**-0,083**	**0,110**	**0,024**	**10,365**	**10,586**	**-0,095**
7	**10,818**	**-0,107**	**-0,091**	**0,073**	**0,016**	**10,745**	**10,891**	**-0,099**
8	**11,094**	**-0,106**	**-0,090**	**0,072**	**0,016**	**11,022**	**11,166**	**-0,098**
9	**11,465**	**-0,106**	**-0,078**	**0,126**	**0,028**	**11,339**	**11,591**	**-0,092**
10	**10,891**	**-0,099**	**-0,091**	**0,035**	**0,008 < ε**			

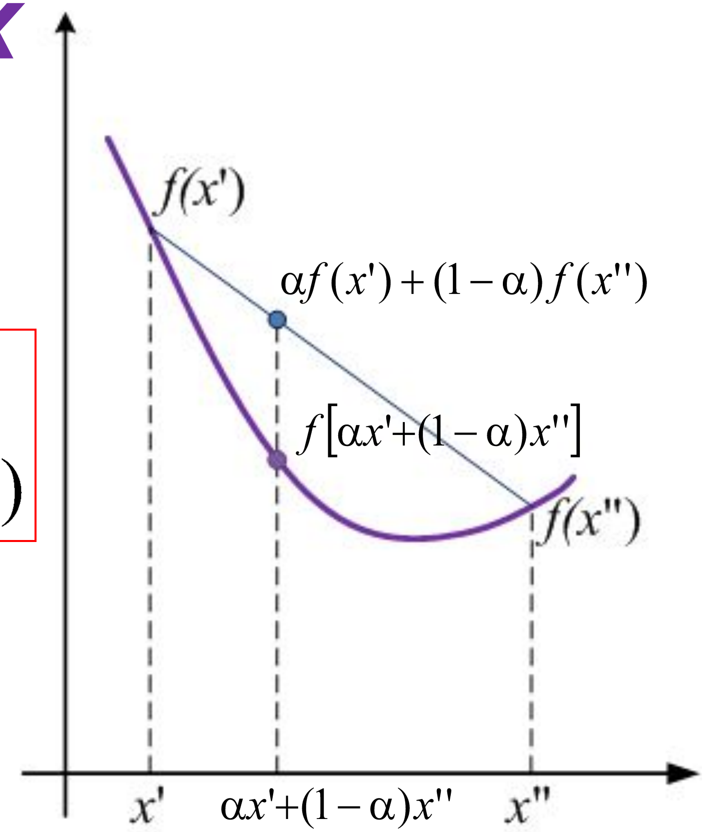
$x^* \approx 10{,}891, \quad f^* \approx f(10{,}891) = -0{,}091$

Метод касательных

$f(x)$ - ***выпуклая*** на отрезке $[a;\, b]$

$\Updownarrow$

$$\boxed{\begin{gathered}\forall\alpha: 0\le\alpha\le 1 \quad \forall x', x''\in[a;b]\\ f\left[\alpha x'+(1-\alpha)x''\right]\le \alpha f(x')+(1-\alpha)f(x'')\end{gathered}}$$



Критерий выпуклости:

$f(x)\in C^2[a;\, b]$

$f(x)$ – выпуклая $\Longleftrightarrow$ $\forall x\in[a;b] \quad f''(x)\ge 0$

$$f(x) \in C^2[a;b], f(x) \text{ – выпуклая}, \quad f'(a)\cdot f'(b) < 0$$

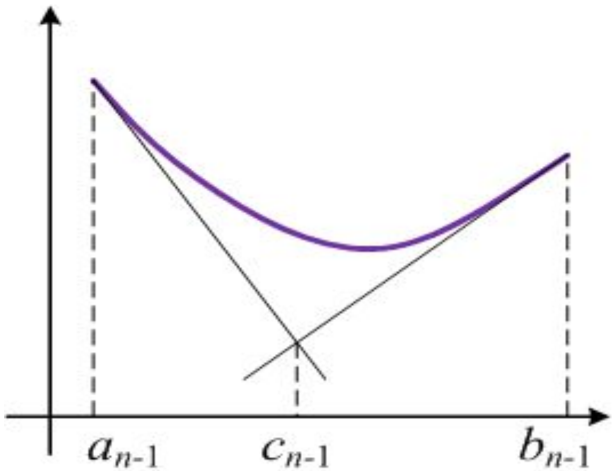
$$a_0 = a, \quad b_0 = b$$

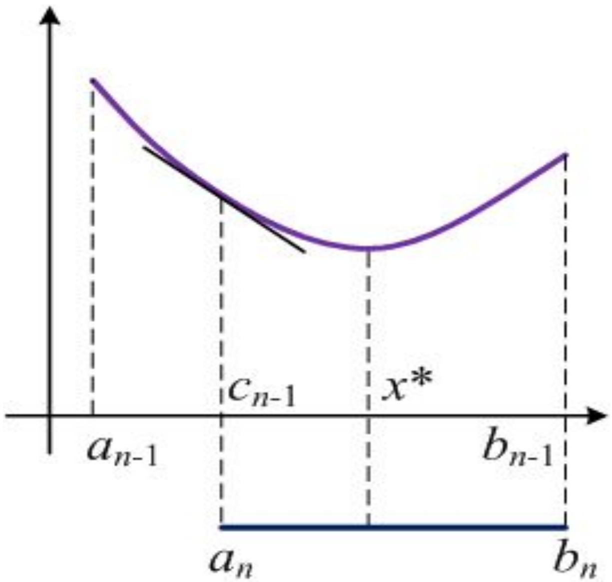
$$c_{n-1} = \frac{b_{n-1}f'(b_{n-1}) - a_{n-1}f'(a_{n-1}) + f(a_{n-1}) - f(b_{n-1})}{f'(b_{n-1}) - f'(a_{n-1})}$$

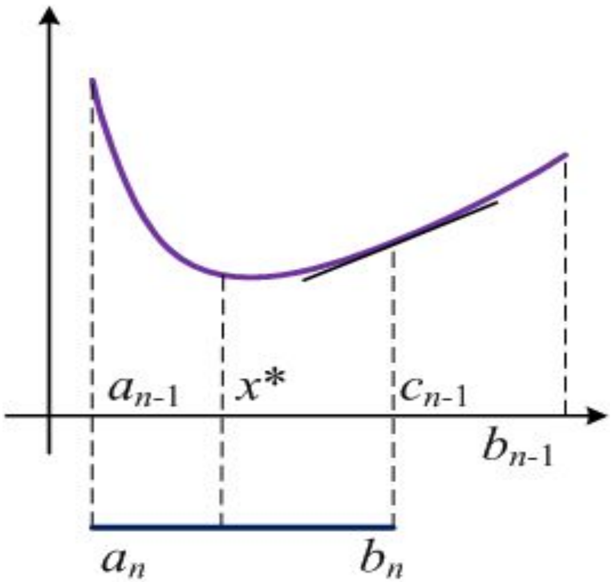
$$f'(c_{n-1}) \geq 0 \Rightarrow a_n = a_{n-1}, \quad b_n = c_{n-1}$$

$$f'(c_{n-1}) < 0 \Rightarrow a_n = c_{n-1}, \quad b_n = b_{n-1}$$

$$\boxed{|f'(c_n)| \leq \varepsilon \Rightarrow x^* \approx c_n, \quad f^* \approx f(c_n)}$$







Пример. $f(x) = x^2 + e^x$ на отрезке [-1; 1]; $\varepsilon = 0{,}05$

$$f'(x) = 2x + e^x \qquad f''(x) = 2 + e^x > 0$$

$$f'(-1) \cdot f'(1) = -1{,}632 \cdot 4{,}718 < 0$$

n	a_n	b_n	$f(a_n)$	$f(b_n)$	$f'(a_n)$	$f'(b_n)$	c_n	$f'(c_n)$	Примечание
0	-1,00000	1,00000	1,368	3,718	-1,632	4,718	0,11586	1,355	
1	-1,00000	0,11586	1,368	1,136	-1,632	1,355	-0,41637	-0,173	$f'(c_0) \geq 0$
2	-0,41637	0,11586	0,833	1,136	-0,173	1,355	-0,14313	0,580	
3	-0,41637	-0,14313	0,833	0,887	-0,173	0,580	-0,27804	0,201	$f'(c_1) < 0$
4	-0,41637	-0,27804	0,833	0,835	-0,173	0,201	-0,34679	0,013	$\lvert f'(c_n) \rvert \leq \varepsilon$

$f'(c_2) \geq 0$

$f'(c_3) \geq 0$

$$\boxed{x^* \approx -0{,}347; \quad f^* \approx f(-0{,}347) = 0{,}827}$$

Метод Ньютона

$$f(x) \in C^2[a;b],\ f(x) \text{ – выпуклая}$$

Отыскание корней:

$$f(x) = 0$$

$$x_n = x_{n-1} - \frac{f(x_{n-1})}{f'(x_{n-1})}$$

Минимизация:

$$f'(x) = 0$$

$$x_n = x_{n-1} - \frac{f'(x_{n-1})}{f''(x_{n-1})}$$

$$\boxed{|f'(x_n)| \le \varepsilon \Rightarrow \tilde{o}^* \approx x_n,\ f^* \approx f(x_n)}$$

$$\boxed{\begin{gathered} f''(x) \ge \mu > 0 \\ q = \frac{L}{2\mu^2}\left|f'(x_0)\right| < 1 \end{gathered}} \Rightarrow \left|x^* - x_n\right| \le \frac{2\mu}{L} q^{2^n}, \quad n = 1,2,\ldots$$

Пример

.

$$f(x) = (x-2)^4 - \ln x \qquad |f'(x_n)| \le 10^{-7}$$

$$f''(x) = 12(x-2)^2 + \frac{1}{\tilde{o}^2} > 0$$

$$x_0 = 3$$

n	x_n	$f(x_n)$	$f'(x_n)$	$f''(x_n)$
0	**3,0000000**	**-0,0986123**	**3,66666667**	**12,1111111**
1	**2,6972477**	**-0,7558858**	**0,98513176**	**5,9713067**
2	**2,5322701**	**-0,8488508**	**0,20829036**	**3,5556858**
3	**2,4736906**	**-0,8553636**	**0,02089779**	**2,8560149**
4	**2,4663735**	**-0,8554408**	**0,00029922**	**2,7744434**
5	**2,4662656**	**-0,8554408**	**0,00000006<10^{-7}**	

$$\boxed{x^* \approx 2{,}4662656, \quad f'^* \approx -0{,}8554408}$$