Презентація

На тему:

«ЛІНІЙНА АЛГЕБРА»

Підготували
Студенти групи Ф-24:
Дідів Мар’яна;
Дідів Наталя.

План

1. Визначники другого і третього порядку. Властивості визначників.
2. Матриці та дії з ними. Ранг матриці. Обернена матриця.
3. Системи лінійних рівнянь. Метод Гаусса, Метод Крамера. Матричний метод.

Студент повинен вміти:

- Обчислювати визначники;
- Виконувати дії з матрицями;
- Знаходити обернену матрицю;
- Розв’язувати систему рівнянь методом Гаусса і Крамера, а також матричним методом.

Визначники

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11} \cdot a_{22} - a_{21} \cdot a_{12}$$ - визначник другого порядку

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \Delta$$ - визначник третього порядку

Розклад визначника за рядком або стовпцем:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11} \begin{vmatrix} a_{23} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} - a_{12} \begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} +$$

$$+ a_{13} \begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}$$

ВЛАСТИВОСТІ ВИЗНАЧНИКІВ:

1. Визначник не зміниться, якщо його рядки замінити відповідними стовпцями.
2. Якщо переставити місцями два рядки (стовпці), то визначник змінить знак.
3. Якщо один з рядків (стовпців) визначника складається тільки з нулів, то визначник дорівнює нулю.
4. Якщо визначник має два однакових рядки (стовпці), то він дорівнює нулю.
5. Спільний множник, що міститься в усіх елементах одного рядка (стовпця), можна винести за знак визначника.
6. Якщо у визначнику елементи двох рядків (стовпців) пропорційні, то визначник дорівнює нулю.
7. Якщо кожен елемент n-го рядка (n-го стовпця) є сумою двох доданків, то такий визначник дорівнює сумі двох визначників, у одного з яких n-й рядок (n-й стовпець) складається з перших доданків, а у другого – з других; інші елементи всіх трьох визначників однакові.
8. Визначник не зміниться, якщо до елементів одного рядка (стовпця) додати відповідні елементи іншого рядка (стовпця), помножені на одне й те саме число.

Правило трикутника або правило Сарруса.

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13}\\ a_{21} & a_{22} & a_{23}\\ a_{31} & a_{32} & a_{33}\end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & \cdot & \cdot \\ \cdot & a_{22} & \cdot \\ \cdot & \cdot & a_{33}\end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \cdot & a_{12} & \cdot \\ \cdot & \cdot & a_{23} \\ a_{31} & \cdot & \cdot \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \cdot & \cdot & a_{13} \\ a_{21} & \cdot & \cdot \\ \cdot & a_{32} & \cdot\end{vmatrix} - \begin{vmatrix} \cdot & \cdot & a_{13}\\ \cdot & a_{22} & \cdot \\ a_{31} & \cdot & \cdot\end{vmatrix} - \begin{vmatrix} \cdot & a_{12} & \cdot \\ a_{21} & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & a_{33}\end{vmatrix} - \begin{vmatrix} a_{11} & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & a_{23} \\ \cdot & a_{32} & \cdot \end{vmatrix}$$

$$\begin{array}{ccccc} & & - & - & - \\ a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{31} & a_{32} \\ & & + & + & + \end{array}$$

Мінором M_{ij} елемента a_{ij} визначника 3-го порядку називається визначник другого порядку, одержаний після викреслювання і-го рядка і j-го стовпчика, на перетині яких знаходиться даний елемент.

Алгебраїчним доповненням A_{ij} елемента a_{ij} називається мінор цього елемента, взятий із знаком "+", якщо сума номера рядка і стовпчика (i + j), де знаходиться даний елемент, є число парне, та із знаком “ - “, якщо це число непарне.

$$A_{ij} = (-1)^{i+j} M_{ij}$$

Матриці

Матрицею розміру m × n називається прямокутна таблиця з m × n чисел

$$a_{ij}, i = \overline{1,m}, j = \overline{1,n}.$$

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ . & . & . & . \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

a_{ij} - елементи матриці A, де i – номер рядка, а j – номер стовпця.

Якщо m = n , то A називається квадратною матрицею.

$a_{11}, a_{22}, \cdots, a_{mn}$- головна діагональ (Рис. 2).

Квадратна матриця, у якої на головній діагоналі стоять одиниці, а всі інші елементи дорівнюють 0 – називається **одиничною** (Рис. 1).

$$E = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ . & . & . & . \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Рис. 1

$$\begin{pmatrix} a_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & a_{22} & \cdots & 0 \\ . & . & . & . \\ 0 & 0 & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

Рис. 2

Матриця називається **нульовою**, якщо всі її елементи дорівнюють 0.

$$0 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ . & . & . & . \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Дії над матрицями

Сумою (різницею) двох матриця A і B називається матриця C, елементи якої рівні сумі (різниці) відповідних елементів матриць A та B. $A = (a_{ij})$ і $B = (b_{ij})$

$$C_{ij} = a_{ij} \pm b_{ij}, \qquad i = \overline{1,m},\ j = \overline{1,n}.$$

C=A±B

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ . & . & . & . \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & \cdots & b_{2n} \\ . & . & . & . \\ b_{m1} & b_{m2} & \cdots & b_{mn} \end{pmatrix}$$

$$C = A + B = \begin{pmatrix} a_{11} \pm b_{11} & a_{12} + b_{12} & \cdots & a_{1n} + b_{1n} \\ a_{21} + b_{21} & a_{22} + b_{22} & \cdots & a_{2n} + b_{2n} \\ . & . & . & . \\ a_{m1} + b_{m1} & a_{m2} + b_{m2} & \cdots & a_{mn} + b_{mn} \end{pmatrix}$$

A+B=B+A; A+O=A; O+A=A.

Матриці A і B називаються протилежними, якщо їх сума A+B=O є нуль-матриця.

Добутком матриці на число називається матриця елементами якої є добутки елементів даної матриці на це число:

$$\lambda A = A\lambda = \lambda \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ . & . & . & . \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda a_{11} & \lambda a_{12} & \cdots & \lambda a_{1n} \\ \lambda a_{21} & \lambda a_{22} & \cdots & \lambda a_{2n} \\ . & . & . & . \\ \lambda a_{m1} & \lambda a_{m2} & \cdots & \lambda a_{mn} \end{pmatrix}$$

Операція множення матриці на число має розподільну властивість.

$$\lambda (A + B) = \lambda A + \lambda B$$

Якщо $\lambda = O$, то $A \cdot O$ дорівнює нуль-матриці $A \cdot O = O \cdot A = O$.

Добутком двох матриць A і B, число стовпців першої з яких дорівнює числу рядків другої, називається третя матриця C, елемент якої   дорівнює сумі добутків елементів i-го рядка матриці A на відповідні елементи j-го стовпця матриці B.

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ . & . & . & . \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1p} \\ b_{21} & b_{22} & \cdots & b_{2p} \\ . & . & . & . \\ b_{n1} & b_{n2} & \cdots & b_{np} \end{pmatrix}$$

$$C = A \cdot B = \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} & \cdots & c_{1p} \\ c_{21} & c_{22} & \cdots & c_{2p} \\ . & . & . & . \\ c_{m1} & c_{m2} & \cdots & c_{mp} \end{pmatrix}$$

де $$c_{ij} = a_{i1}b_{1j} + a_{i2}b_{2j} + \cdots + a_{in}b_{nj} = \sum_{i=1}^{n} a_{ij}b_{ij}$$

$$i = 1,2,3,\ldots,m \qquad j = 1,2,3,\ldots,p$$

1. $A \cdot 0 = 0$
2. $A \cdot E = A$
3. $A \cdot B = B \cdot A$

Обернена матриця

Оберненою для заданої квадратної матриці А називається така матриця A^{-1}, добуток на яку матриці А рівний одиничній матриці, тобто

$$A \cdot A^{-1} = E, \quad \text{або} \quad A^{-1} \cdot A = E.$$

Схема знаходження оберненої матриці для заданої квадратної матриці.

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ . & . & . & . \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

I. Обчислимо визначник матриці А (|А|).
II. Транспонуємо матрицю А, тобто одержуємо матрицю:

$$A' = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} & \cdots & a_{n1} \\ a_{12} & a_{22} & \cdots & a_{n2} \\ . & . & . & . \\ a_{1n} & a_{2n} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

III. Знаходимо алгебраїчні доповнення кожного елемента транспонованої матриці A΄ і записуємо їх у вигляді матриці $\overline{A}$ (приєднана)

$$\overline{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} & \cdots & a_{n1} \\ a_{12} & a_{22} & \cdots & a_{n2} \\ . & . & . & . \\ a_{1n} & a_{2n} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

IV. Поділимо кожен елемент матриці $\overline{A}$ на визначник матриці |A|. Одержана матриця буде оберненою.

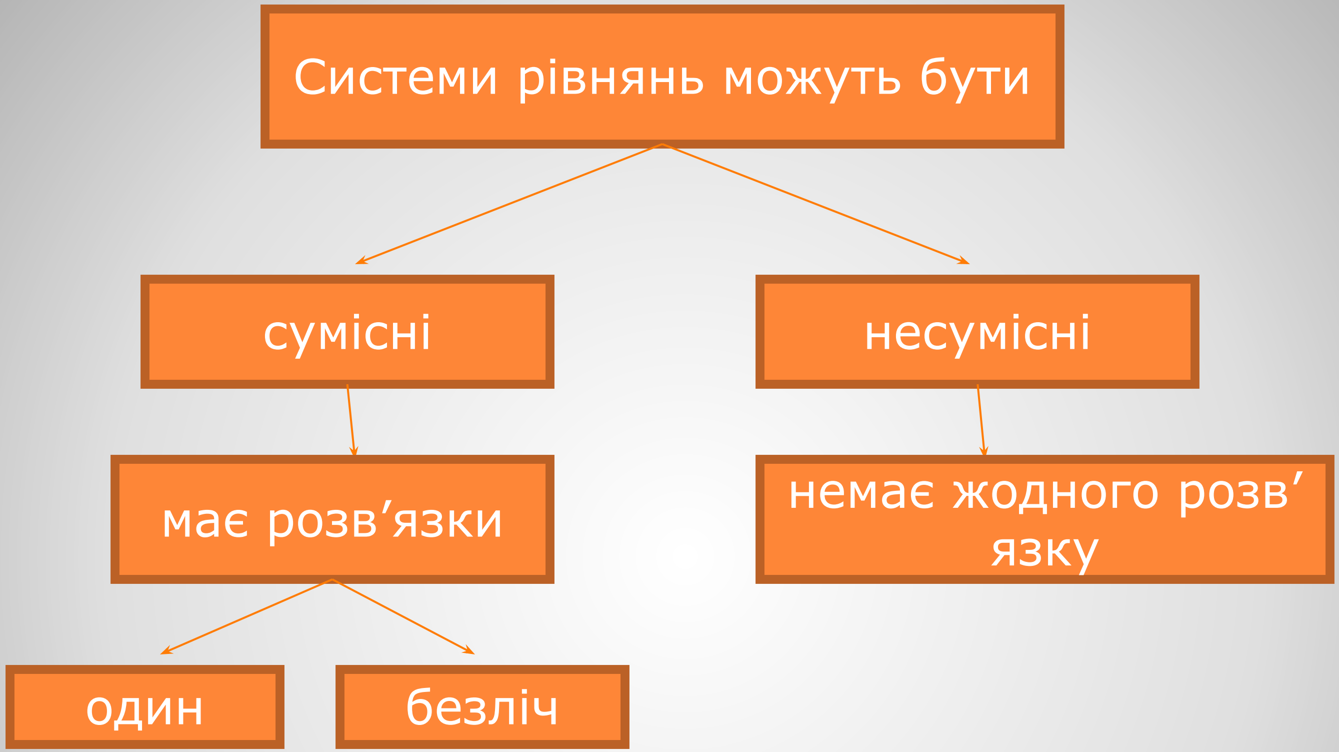
$$A^{-1} = \frac{1}{|A|} \cdot \overline{A} = \frac{1}{|A|} \cdot \begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} & \cdots & a_{n1} \\ a_{12} & a_{22} & \cdots & a_{n2} \\ . & . & . & . \\ a_{1n} & a_{2n} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

Розв'язування систем лінійних рівнянь різними способами

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots a_{2n}x_n = b_2 \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots a_{nn}x_n = b_n \end{cases}$$

(1) – система m лінійних рівнянь з n - невідомим

Розв'язком системи лінійних алгебраїчних рівнянь (1) називають таку сукупність чисел $\lambda_1, \lambda_2, \dots \lambda_n,$ яка перетворює всі рівняння системи (1) у числові тотожності.



Якщо $b_1, b_2, \ldots, b_n$ рівне 0, то система (1) – однорідна;

Якщо $b_1, b_2, \ldots, b_n$ не рівне 0, то система (1) – неоднорідна.

Основна матриця системи рівнянь

$$A = \begin{pmatrix} a_{11}a_{12}\cdots & a_{1n} \\ a_{21}a_{22}\cdots & a_{2n} \\ \multicolumn{2}{c}{\dots\dots\dots\dots\dots\dots} \\ a_{m1}a_{m2}\cdots & a_{nn} \end{pmatrix} \quad (2)$$

Розширена матриця системи рівнянь

$$B = \begin{pmatrix} a_{11}a_{12}\cdots & a_{1n} & = b_1 \\ a_{21}a_{22}\cdots & a_{2n} & = b_2 \\ \multicolumn{3}{c}{\dots\dots\dots\dots\dots\dots} \\ a_{m1}a_{m2}\cdots & a_{nn} & = b_m \end{pmatrix} \quad (3)$$

Способи розв’язування систем рівнянь

<u>Системи рівнянь з змінними</u>

1)Спосіб підстановки;

2)Спосіб додавання;

•Спосіб графічний.

<u>Системи рівнянь двома з трьома і більше змінними</u>

1) Метод Крамера;

2) Метод Гаусса;

3) Спосіб матричний.

Габріель Крамер

Крамер народився в сім'ї лікаря. З раннього віку показав великі здібності до математики. У 18 років захистив дисертацію. У 20-річному віці Крамер виставив свою кандидатуру на вакантну посаду викладача на кафедрі філософії Женевського університету.

У 1727 р. Крамер скористався цим правом і 2 роки мандрував по Європі, переймаючи досвід у провідних математиків — Йоганна Бернуллі, Галлея і де Муавра та інших. Повернувшись, він вступає з ними в листування, яка тривала все його недовге життя.

У вільний від викладання час Крамер пише статті на різні теми: геометрія, історія математики, філософія, застосування теорії ймовірностей. У 1751 р. Крамер отримує серйозну травму після дорожнього інциденту з каретою і 4 січня 1752 р. Крамер вмирає.

Спосіб Крамера (для випадку m=n)

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} a_{12} \cdots & a_{1n} \\ a_{21} a_{22} \cdots & a_{2n} \\ \dots\dots\dots & \dots\dots \\ a_{n1} a_{n2} \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} \qquad \Delta_1 = \begin{vmatrix} b_1 a_{12} \cdots & a_{1n} \\ b_2 a_{22} \cdots & a_{2n} \\ \dots\dots\dots & \dots\dots \\ b_n a_{n2} \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} a_{11} b_1 \cdots & a_{1n} \\ a_{21} b_2 \cdots & a_{2n} \\ \dots\dots\dots & \dots\dots \\ a_{n1} b_n \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} \qquad \Delta_3 = \begin{vmatrix} a_{11} a_{12} \cdots & b_{1n} \\ a_{21} a_{22} \cdots & b_{2n} \\ \dots\dots\dots & \dots\dots \\ a_{n1} a_{n2} \cdots & b_{nn} \end{vmatrix}$$

$$X_1 = \frac{\Delta_1}{\Delta}; \quad X_2 = \frac{\Delta_2}{\Delta}; \quad \cdots \; ; \quad X_n = \frac{\Delta_n}{\Delta};$$

Карл Фрідріх Гаусс

Характерними рисами досліджень Гаусса є надзвичайна їх різнобічність і органічний зв'язок у них між теоретичною і прикладною математикою.

Карл Фрідріх народився 30 квітня 1777 р. у Брауншвейгу. У 1784 р. Карла віддали до народної школи. Після чотирирічного навчання в школі Гаусс перейшов до гімназії відразу в другий клас. З 1795 р. хлопець став студентом Геттінгенського університету. У 1806 р. Карла призначають професором в Геттінгені.

У 1810 р. Гаусс отримує премію Паризької академії наук і золоту медаль Лондонського королівського товариства. У 1815 р. публікує перше строге доведення основної теореми алгебри. У 1824 р. обирається іноземним членом Петербурзької Академії наук.

23 лютого 1855 р. великого математика не стало.

Метод Гаусса (метод послідовного включення змінних перетворенням розширеної матриці до трикутного вигляду).

(1) $$\begin{pmatrix} a_{11}a_{12}\cdots & a_{1n} = b_1 \\ a_{21}a_{22}\cdots & a_{2n} = b_2 \\ \multicolumn{2}{c}{\dotfill} \\ a_m a_{n2}\cdots & a_{mn} = b_m \end{pmatrix}$$

зводимо її до вигляду

$$\begin{pmatrix} a_{11}a_{12}a_{13}\cdots & a_{1n} = b_1 \\ 0a_{22}a_{12}\cdots & a_{2n} = b_2 \\ 0 \quad 0a_{12}\cdots & a_{3n} = b_3 \\ \multicolumn{2}{c}{\dotfill} \\ 0 \quad 0 \quad 0 \quad \cdots & a_{mn} = b_m \end{pmatrix}$$

1 розв'язок

$$\begin{pmatrix} a_{11}a_{12}\cdots & a_{1n} = b_1 \\ 0 \quad a_{22}\cdots & a_{2n} = b_2 \\ 0 \quad 0 \quad \cdots & a_{3n} = b_3 \\ \multicolumn{2}{c}{\dotfill} \\ 0 \quad 0 \quad \cdots & 0 = b_m \end{pmatrix}$$

O

$$\begin{pmatrix} a_{11}a_{12}\cdots & a_{1n} = b_1 \\ 0 \quad a_{22}\cdots & a_{2n} = b_2 \\ 0 \quad 0 \quad \cdots & a_{3n} = b_3 \\ \multicolumn{2}{c}{\dotfill} \\ 0 \quad 0 \quad \cdots & 0 = 0 \end{pmatrix}$$

безліч розв'язків

Матричний метод

Нехай дано систему (1) (для випадку m=n)
A – основна матриця, X – матриця стовпець із невідомих, B – матриця стовпець із вільних членів.

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} a_{12} a_{13} \cdots & a_{1n} \\ a_{21} a_{22} a_{12} \cdots & a_{2n} \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots & \\ a_{n1} a_{n2} a_{12} \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} \qquad X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}$$

Перепишемо систему (1) у вигляді матричного рівняння A · X = B.

Його розв’язок $X = A^{-1} \cdot B$ - називається матричним розв’язком системи лінійних рівнянь.

(1) знаходимо визначник |A|

якщо |A| ≠ 0 – це неособлива матриця, до неї існує обернена.

(2) шукаємо обернену матрицю

- ✔ знаходимо визначник матриці A
- ✔ транспонуємо матрицю A; і позначаємо її A^{T}
- ✔ складаємо матрицю з алгебраїчних доповнень до елементів матриці A^{T} і позначаємо $\overline{A}$
- ✔ поділимо матрицю на визначник даної матриці і отримаємо A^{-1}

$$A^{-1} = \frac{1}{\Delta} \cdot \overline{A}$$

Запитання для самоперевірки:

1. Які основні властивості визначників?
2. Що таке мінор та алгебраїчне доповнення до елемента визначника? Як їх знайти?
3. Які дії виконують із матрицями?
4. Як знайти матрицю, обернену до даної?
5. Що називається рангом матриці?
6. У чому полягає суть методу Гаусса?
7. Коли можна застосовувати правило Крамера?