Здравствуйте.

Отправляю вам презентацию по решению тригонометрических уравнений.
Изучаем и пишем конспект на листочках. Ваши тетради у меня. На очных уроках сдадите, вставим в тетради. Всем хорошего дня, не болейте!

5.02.24 Тригонометрические уравнения(продолжение).

Для тригонометрических уравнений применяются общие методы решения:

- равносильные преобразования,
- разложение на множители,
- замена переменной,
- применение свойств функций,

а так же сочетание нескольких приёмов.

Основная идея решения тригонометрического уравнения – сведение его к одному или нескольким простейшим уравнениям, т.е. уравнениям вида $\sin x = a$, $\cos x = a$, $\operatorname{tg} x = a$, $\operatorname{ctg} x = a$.

$$\cos x = a, \qquad |a| \le 1$$

$$x = \pm \arccos a + 2\pi k, \ \ k \in Z$$

$$\arccos(-a) = \pi - \arccos a$$

$$\cos x = 0$$

$$x = \frac{\pi}{2} + \pi k, \ \ k \in Z$$

$$\cos x = 1$$

$$x = 2\pi k, \ \ k \in Z$$

$$\cos x = -1$$

$$x = \pi + 2\pi k, \ \ k \in Z$$

$$\sin x = a, \qquad |a| \le 1$$

$$x = (-1)^k \arcsin a + \pi k, \ \ k \in Z$$

$$\arcsin(-a) = -\arcsin a$$

$$\sin x = 0$$

$$x = \pi k, \ \ k \in Z$$

$$\sin x = 1$$

$$x = \frac{\pi}{2} + \pi k, \ \ k \in Z$$

$$\sin x = -1$$

$$x = -\frac{\pi}{2} + \pi k, \ \ k \in Z$$

1

$$\sin\left(\frac{5}{3}\pi\cos\pi x\right) = \frac{1}{2}$$

$$\frac{5}{3}\pi\cos\pi x = (-1)^k \arcsin\frac{1}{2} + \pi k, \qquad k\epsilon Z$$

$$\frac{5}{3}\pi\cos\pi x = (-1)^k \frac{\pi}{6} + \pi k, \qquad k\epsilon Z$$

$$\frac{5}{3}\cos\pi x = (-1)^k \frac{1}{6} + k, \qquad k\epsilon Z$$

$$\cos\pi x = (-1)^k \frac{1}{10} + \frac{3}{5}k, \qquad k\epsilon Z$$

Т. к. $|\cos\pi x| \le 1,$ то $\left|(-1)^k \frac{1}{10} + \frac{3}{5}k\right| \le 1, \qquad k\epsilon Z$

$k = 0$: $\cos\pi x = \frac{1}{10}$

$$\pi x = \pm\arccos\frac{1}{10} + 2\pi n, \qquad n\epsilon Z$$

$$x = \pm\frac{1}{\pi}\arccos\frac{1}{10} + 2n, \qquad n\epsilon Z$$

$k = 1$: $\cos\pi x = \frac{1}{2}$

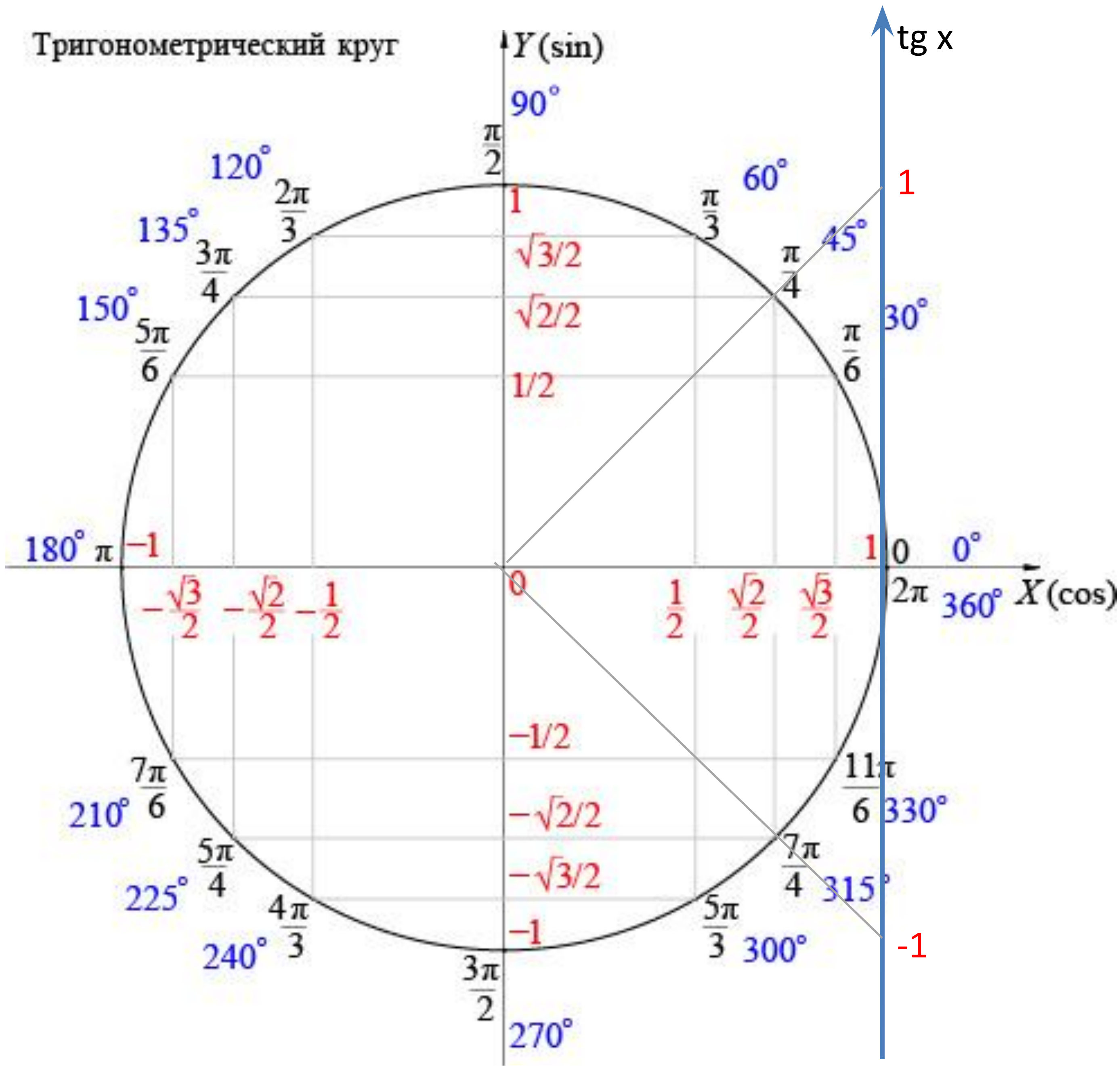
$$\pi x = \pm\arccos\frac{1}{2} + 2\pi n, \qquad n\epsilon Z$$

$$x = \pm\frac{1}{3} + 2n, \qquad n\epsilon Z$$

$k = -1$: $\cos\pi x = -\frac{7}{10}$

$$x = \pm\frac{1}{\pi}\arccos\left(-\frac{7}{10}\right) + 2n, \qquad n\epsilon Z$$

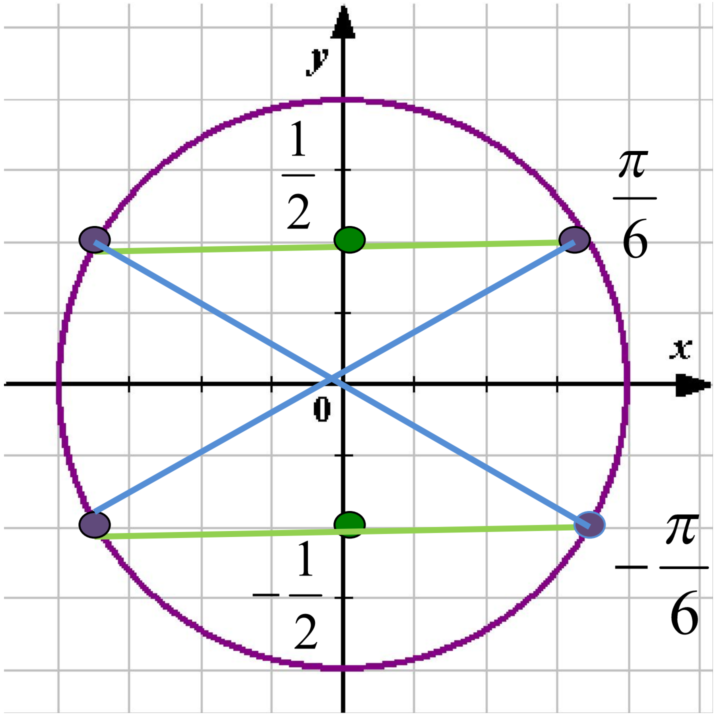
Ответ: $x = \pm\frac{1}{\pi}\arccos\frac{1}{10} + 2n,\quad x = \pm\frac{1}{3} + 2n,\quad x = \pm\frac{1}{\pi}\arccos\left(-\frac{7}{10}\right) + 2n, \qquad n\epsilon Z$


Тригонометрический круг
Y (sin)
X (cos)
tg x
90°
π/2
120°
2π/3
135°
3π/4
150°
5π/6
180°
π
60°
π/3
45°
π/4
30°
π/6
0°
0
2π
360°
1
√3/2
√2/2
1/2
−1/2
−√2/2
−√3/2
−1
0
−√3/2
−√2/2
−1/2
1/2
√2/2
√3/2
7π/6
210°
5π/4
225°
4π/3
240°
3π/2
270°
5π/3
300°
7π/4
315°
11π/6
330°
1
-1

2

$$\sin^2 x = \frac{1}{4}$$

$$\left[\begin{array}{l} \sin x = \frac{1}{2} \\ \sin x = -\frac{1}{2} \end{array}\right.$$



Ответ: $x = \pm\frac{\pi}{6} + \pi k, \quad k \in Z$

Алгебраические преобразования

- Применение основного тригонометрического тождества

$$\cos^2 x + \sin^2 x = 1$$

- Применение формул удвоенного аргумента

$\sin 2x = 2 \sin x \cos x$ $\qquad$ $\cos 2x = \cos^2 x - \sin^2 x$

- Преобразование суммы (разности) в произведение и обратное преобразование

- Понижение степени

$\sin^2 x = \frac{1-\cos 2x}{2}$ $\qquad$ $\cos^2 x = \frac{1+\cos 2x}{2}$

- Применение формул приведения и др.

а) при переходе от функций углов $\frac{\pi}{2} \pm \alpha$, $\frac{3\pi}{2} \pm \alpha$ к функциям угла α – название функции изменяется: синус на косинус, тангенс на котангенс и наоборот;

при переходе от углов $\pi \pm \alpha$, $2\pi \pm \alpha$ к функциям угла α – название функции сохраняется;

б) если α – острый угол (т.е. $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$), перед функцией угла α ставится тот знак, какой имеет приводимая функция.

$$\frac{2tg\frac{x}{2}}{1+tg^2\frac{x}{2}}=sinx$$

$$\frac{1-tg^2\frac{x}{2}}{1+tg^2\frac{x}{2}}=cosx$$

$$\frac{2tg\frac{x}{2}}{1-tg^2\frac{x}{2}}=tgx$$

1. Замена переменной и сведение к квадратному

3

- Понижение степени

$$\sin^2 x = \frac{1-\cos 2x}{2} \qquad \cos^2 x = \frac{1+\cos 2x}{2}$$

- Применение формул приведения

и др.

3. Однородные уравнения

Уравнение вида $\boldsymbol{a}\ \mathbf{sinx} + \boldsymbol{b}\ \mathbf{cosx} = \mathbf{0}$ называют однородным тригонометрическим уравнением **первой степени**; уравнение вида $\boldsymbol{a}\ \mathbf{sin^2x} + \boldsymbol{b}\ \mathbf{sinxcosx} + \boldsymbol{c}\ \mathbf{cos^2x} = \mathbf{0}$ называют однородным тригонометрическим уравнением **второй степени.**

Уравнения вида $\boldsymbol{a}\ \mathbf{sin}\boldsymbol{m}\mathbf{x} + \boldsymbol{b}\ \mathbf{cos}\boldsymbol{m}\mathbf{x} = \mathbf{0}$ также называются однородными тригонометрическими уравнениями первой степени.

Для однородных уравнений существует стандартный приём решения – деление обеих его частей на $\cos x \neq 0$ или $\cos^2 x \neq 0$.

<u>Обоснованность деления:</u>

Предположим, что $\cos x = 0$. *Тогда в силу уравнения и* $\sin x = 0$, *что противоречит основному тригонометрическому тождеству. Следовательно, любое решение этого уравнения удовлетворяет условию* $\cos x \neq 0$, *и мы можем поделить обе его*

- Понижение степени

$$\sin^2 x = \frac{1-\cos 2x}{2} \qquad \cos^2 x = \frac{1+\cos 2x}{2}$$

- Применение формул приведения

и др.

$10\sin^2 x + 5 \sin x \cos x + \cos^2 x = 3$

Решение:

Поскольку $3 = 3(\sin^2 x + \cos^2 x)$

$10\sin^2 x + 5 \sin x \cos x + \cos^2 x = 3(\sin^2 x + \cos^2 x)$

$7\sin^2 x + 5 \sin x \cos x - 2\cos^2 x = 0 / : \cos^2 x \neq 0$

т.к. значения x, при которых $\cos x = 0$, не являются решениями данного уравнения.

$7\mathrm{tg}^2 x + 5 \mathrm{tg}\, x - 2 = 0$

$\mathrm{tg}\, x = t$

$7t^2 + 5t - 2 = 0$

$t_1 = 2/7$, $\mathrm{tg}\, x = 2/7$, $x = \mathrm{arctg} 2/7 + \pi n$, $n \in Z$

$t_2 = -1$, $\mathrm{tg}\, x = -1$, $x = \mathrm{arctg}(-1) + \pi k$, $k \in Z$, $x = -\pi/4 + \pi k$, $k \in Z$

Ответ: $x = \mathrm{arctg} 2/7 + \pi n$, $n \in Z$; $x = -\pi/4 + \pi k$, $k \in Z$.