

ТВОРЕТИЧЕСКИЕ ОСНОВЫ НАЧАЛЬНОГО КУРСА МАТЕМАТИКИ

Янкина Лариса Александровна, канд. пед. наук, доцент

Математика

– греч. *mathēmatikē* от *màthēta* –
знание, наука

– **наука о количественных
отношениях и
пространственных формах
действительного мира**

Математика на педагогическом факультете

- 1. Общие понятия**
- 2. Целые неотрицательные числа**
- 3. Расширение понятия числа**
- 4. Функции. Уравнения. Неравенства**
- 5. Элементы геометрии**
- 6. Величины**

Основная литература

1. **Стойлова, Л. П. Математика : учебное пособие для студентов сред. пед. заведений / Л. П. Стойлова. - М. : Академия, 2005. – 464 с**
2. **Стойлова, Л. П. Математика. Часть 1 / Л. П. Стойлова, Н. Я. Виленкин, Н. Н. Лаврова. – М. : Просвещение, 1990. – 175 с.**
3. **Лаврова, Н. Н. Задачник-практикум по математике / Н. Н. Лаврова, Л.П. Стойлова. - М. : Просвещение, 1985. – 183 с.**
4. **Задачи для контрольных работ по математике : для студентов фак. нач. классов пед. ин-тов / Л. П. Стойлова [и др.]. - М. : Просвещение, 1993. – 80 с.**

Множества и операции над ними

- 1. Понятие множества и элемента множества**
- 2. Способы задания множеств**
- 3. Отношения между множествами**
- 4. Операции над множествами**

Понятие множества и элемента множества

Часто приходится рассматривать различные *группы* объектов как единое целое:

- ... птиц
- ... рыб
- ... марок, картин
- ... сочинений
- ... карандашей

и т. д.

Все эти совокупности называют *множествами*

• **Множество – основное неопределяемое понятие математики**
Его поясняют на примерах.

Примерами множеств могут служить:

- *множество государств Европы*
- *множество птиц или животных*
множество студентов факультета педагогического и художественного образования
- *множество букв в алфавите*
- *множество цифр в записи числа и т.д.*

Множества обозначают прописными буквами латинского алфавита:

A, B, C, ...

Для некоторых множеств вводят специальные обозначения, символы:

N – множество натуральных чисел,

Z – множество целых чисел,

Q – множество рациональных чисел,

R – множество действительных чисел.

**Множество не содержащее ни
одного элемента называют
пустым и обозначают символом
 \emptyset**

**Пример: A - множество птиц с
двумя головами.**

Пишут $A = \emptyset$.

**Объекты, из которых образовано
множество, называют его
*элементами.***

**Элементы множества принято
обозначать строчными буквами
латинского алфавита:**

a, b, c, ...

**\in - знак принадлежности элемента
множеству**

$a \in A$ $a \notin A$

Множества бывают *конечными* и *бесконечными*.

- Примеры: 1) множество дней недели - ... ,
2) множество точек на прямой -...

Множество может содержать и один элемент.

Пример: множество гласных букв в слове
«шар»

Способы задания множеств

- **Существуют два способа задания множеств.**

1) перечислением всех его элементов

Примеры: 1) $A = \{a, b, c, d, e\}$ -

множество A состоит из элементов a, b, c, d, e .

2) $B = \{2, 4, 6, 8\} - \dots$

2) указанием характеристического свойства элементов множества

Характеристическое свойство – свойство, которым обладают все элементы этого множества, и не обладают элементы, не принадлежащие данному множеству.

Примеры: 1) A – множество

положительных двузначных чисел.

Характеристическое свойство –

**«быть положительным двузначным
числом».**

$21 \in A$, так как оно ... ,

$135 \notin A$, так как оно ...

- $35 \notin A$, так как оно ...

2) Это же множество A :

$A = \{x \mid x \in \mathbb{N} \text{ и } 9 < x < 100\}$ ИЛИ

$A = \{x \mid x \in \mathbb{N} \text{ и } 10 \leq x \leq 99\}$

Бесконечное множество можно задать лишь указанием характеристического свойства его элементов.

Конечное множество можно задать двумя указанными способами:

1. M – множество натуральных чисел, меньших 6
2. $M = \{x \mid x \in \mathbb{N} \text{ и } x < 6\}$
3. $M = \{1, 2, 3, 4, 5\}$

Числовые множества

Подмножество
множества \mathbb{R}

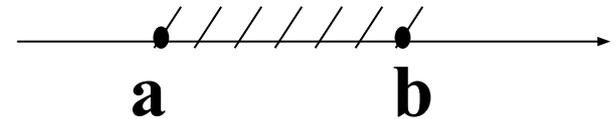
Обозначение и
название

Изображение на
координатной
прямой

$\{x \mid x \in \mathbb{R}, a < x < b\}$ $(a; b)$
интервал

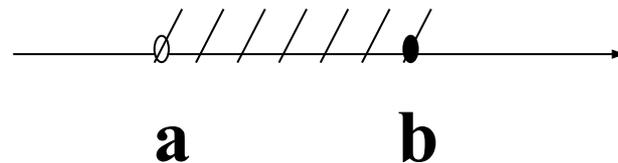


$\{x \mid x \in \mathbb{R}, a \leq x \leq b\}$ $[a; b]$
отрезок



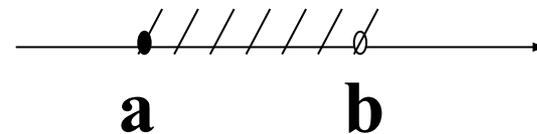
$$\{x \mid x \in \mathbf{R}, a < x \leq b\} \quad (a; b]$$

полуинтервал



$$\{x \mid x \in \mathbf{R}, a \leq x < b\} \quad [a; b)$$

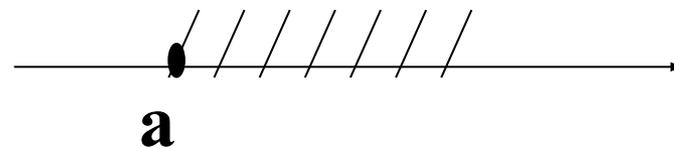
полуинтервал



$$\{x \mid x \in \mathbb{R}, x \geq a\}$$

луч

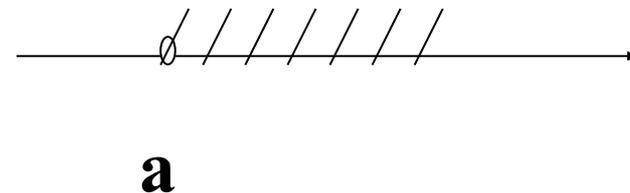
$$[a; +\infty)$$



$$\{x \mid x \in \mathbb{R}, x > a\}$$

луч

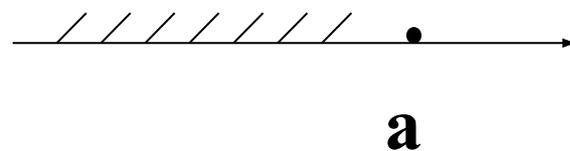
$$(a; +\infty)$$



$$\{x \mid x \in \mathbb{R}, x \leq a\}$$

луч

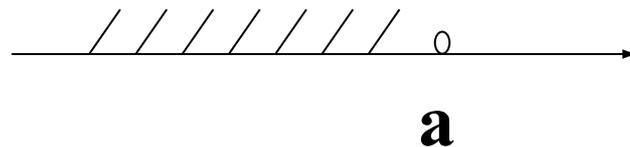
$$(-\infty; a]$$



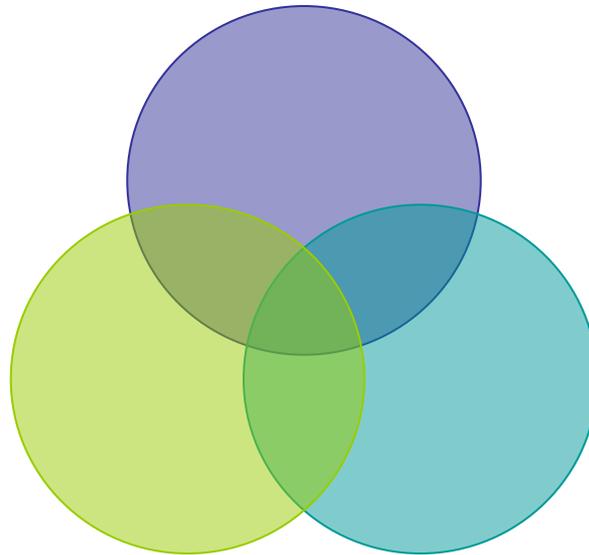
$$\{x \mid x \in \mathbb{R}, x < a\}$$

луч

$$(-\infty; a)$$



Отношения между множествами



Отношения между множествами можно наглядно представить с помощью **диаграмм Эйлера-Венна** (кругов Эйлера).

Множество изображается кругом на плоскости и мыслится как **множество точек круга**.

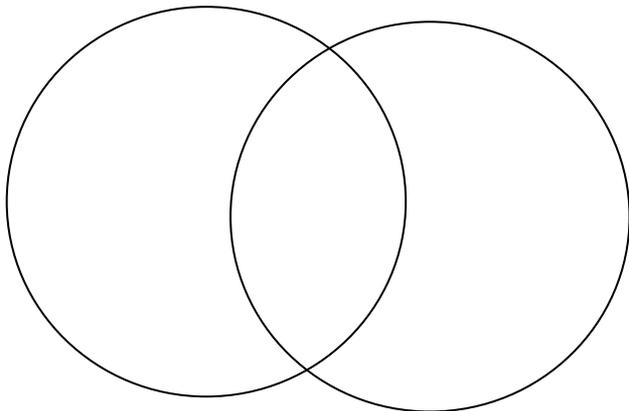
Эйлер Леонард (1707-1783) – швейцарский математик, механик, физик, астроном.

Венн Джон (1834 – 1923) – английский ученый.

Если множества A и B имеют общие элементы, т.е. элементы, принадлежащие одновременно A и B , то говорят, что эти множества **пересекаются**

A

B



Пишут: $A \cap B \neq \emptyset$.

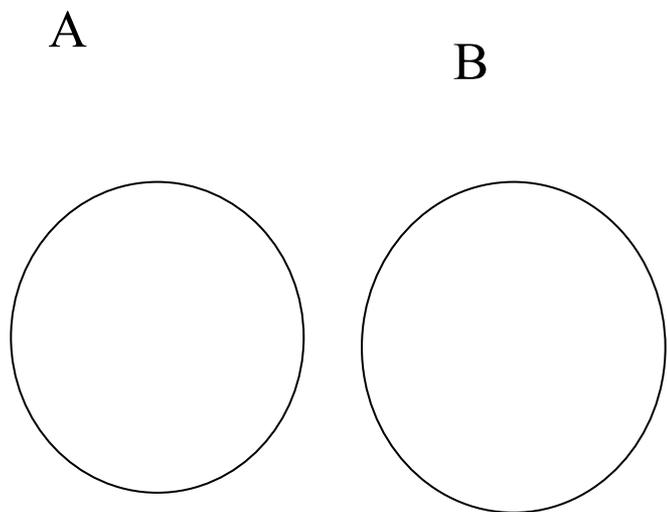
Примеры:

1) $A = \{a, b, c, d\}$,

$B = \{b, d, e\}$.

2) A – множество четных чисел, B – множество чисел, кратных 3.

Если множества не имеют общих элементов, то они
не пересекаются



Пишут: $A \cap B = \emptyset$.

Примеры:

- 1) $A = \{a, b, c, d\}$, $B = \{e, f, g\}$.
- 2) A – множество двузначных чисел, B – множество трехзначных чисел.
- 3) A – множество положительных чисел, B – множество отрицательных чисел.

Если каждый элемент множества A является элементом множества B , то говорят, что множество A **включено** во множество B (A является **подмножеством** множества B)

$$A \subset B$$

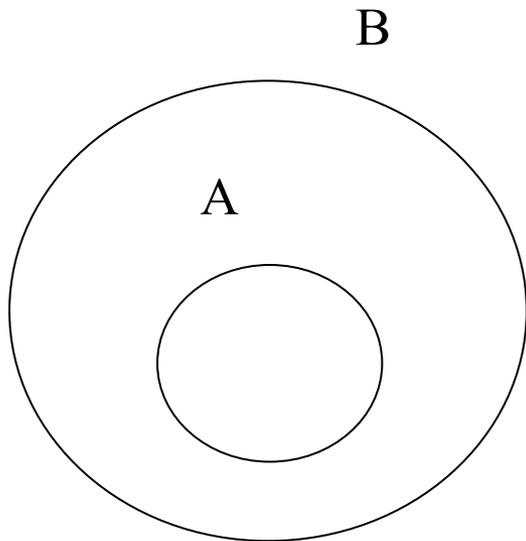
Примеры:

1) $A = \{a, b\}$, $B = \{a, b, c, d\}$ –

$A \subset B$ (строгое включение: $A \neq B$).

2) $A = \{1, 2, 3\}$, $B = \{3, 2, 1\}$ –

$A \subseteq B$ (нестрогое включение).



Для любого множества A справедливы утверждения:

$$1) \quad \emptyset \subset A$$

$$2) \quad A \subset A$$

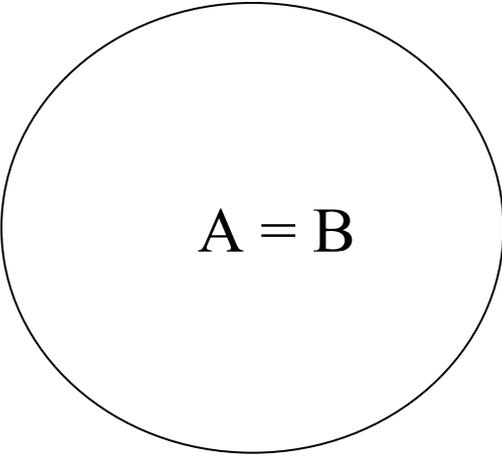
Множества называют **равными**, если они состоят из
одних и тех же элементов

Примеры:

1) $A = \{a, b, c\}$, $B = \{b, a, c, \}$.

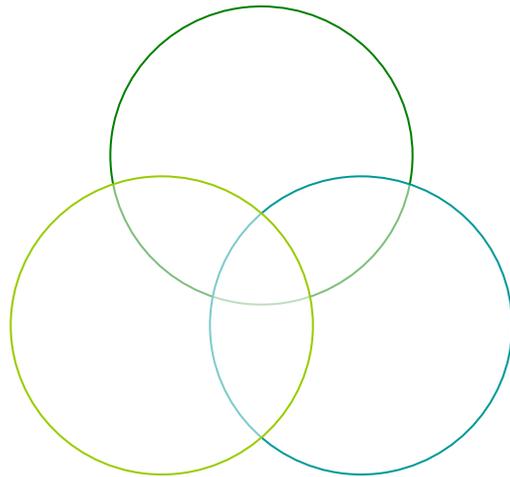
2) A – множество четных
чисел,

B – множество чисел,
кратных 2.



$A = B$

Операции над множествами



Пересечение множеств

Пересечением множеств A и B называется множество $A \cap B$, состоящее из тех и только тех элементов, которые принадлежат **и** множеству A , **и** множеству B .

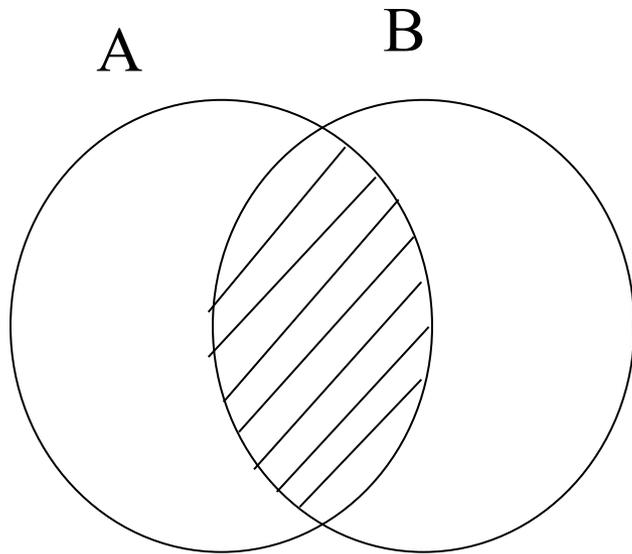
$$A \cap B = \{x \mid x \in A \text{ и } x \in B\}$$

Другими словами, *пересечением* множеств A и B называется множество $A \cap B$, состоящее из *общих* элементов множеств A и B .

Операция, в результате которой находят пересечение множеств, также называется *пересечением*

Примеры: 1) $A = \{a, b, c, d\}$, $B = \{b, d, e, f\}$

$$A \cap B = \{b, d\}.$$



2) A – множество четных натуральных чисел,

B – множество натуральных чисел, кратных 3.

$A \cap B$ – множество четных натуральных чисел, кратных 3.

$$24 \in A \cap B, 36 \in A \cap B,$$

$$8 \notin A \cap B, 15 \notin A \cap B.$$

3) A – множество четных натуральных чисел,

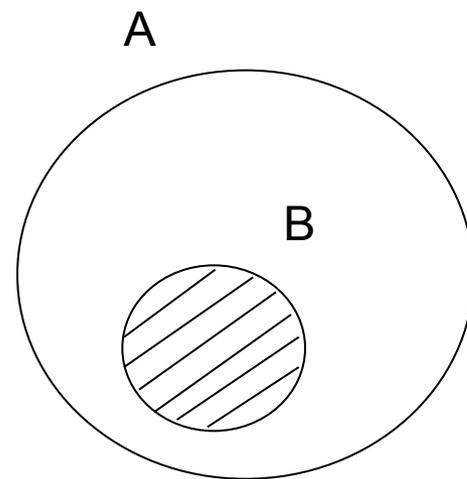
B – множество натуральных чисел, кратных 4,

$$A \cap B = B.$$

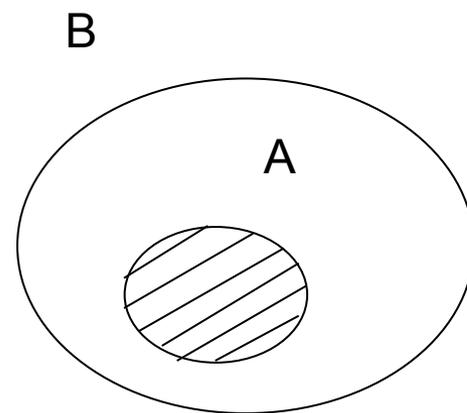
4) A – множество квадратов,

B – множество прямоугольников

$$A \cap B = A$$



$$B \subset A$$



$$A \subset B$$

Для любого множества A справедливы следующие утверждения:

$$1) A \cap \emptyset = \emptyset$$

$$2) A \cap A = A$$

$$x \in A \cap B \Leftrightarrow x \in A \text{ и } x \in B$$

$$x \notin A \cap B \Leftrightarrow x \notin A \text{ или } x \notin B$$

Объединение множеств

Объединением множеств A и B называется множество $A \cup B$, состоящее из тех и только тех элементов, которые принадлежат хотя бы одному из множеств A и B .

$$A \cup B = \{x \mid x \in A \text{ или } x \in B\}$$

Союз «или» - не разделительный, а употребляется в смысле: либо одному, либо другому, либо одному и другому вместе.

Объединением множеств A и B называется множество $A \cup B$, содержащие все элементы множества A , и все элементы множества B , причем общие элементы берутся один раз.

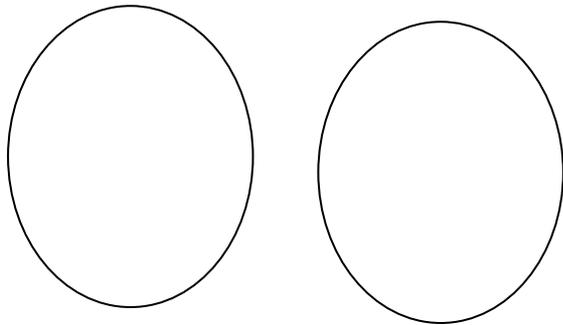
Операция, в результате которой находят объединение множеств, также называется **объединением**.

Примеры: 1) $A = \{1, 2, 3\}$, $B = \{4, 5, 6\}$

$$A \cup B = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}.$$

A

B



2) A – множество четных чисел,
B – множество двузначных чисел

$A \cup B$ – множество четных или
двузначных чисел

$$8 \in A \cup B, 13 \in A \cup B,$$

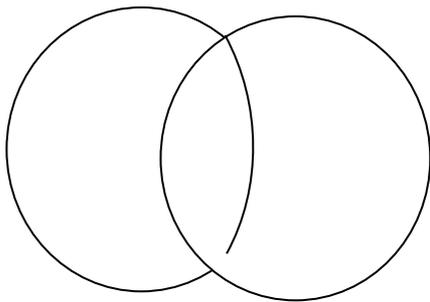
$$24 \in A \cup B,$$

$$7 \notin A \cup B, 100 \in A \cup B,$$

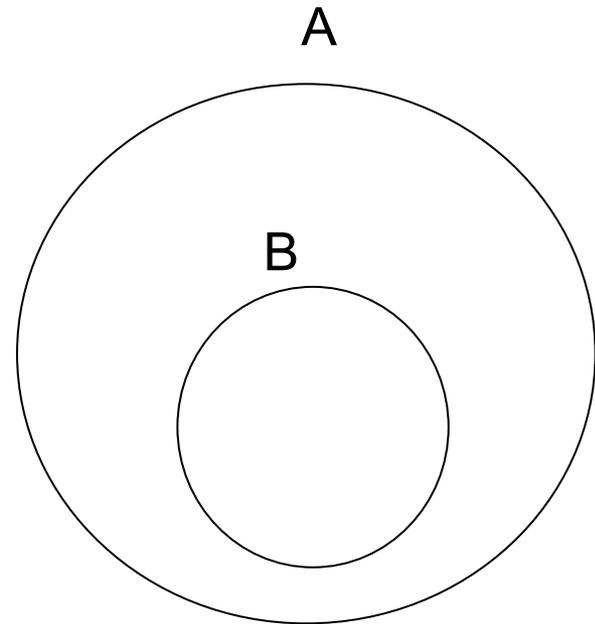
$$101 \notin A \cup B$$

A

B



3) A – множество четных натуральных чисел,
 B – множество натуральных чисел, кратных 4,
 $B \subset A$
 $A \cup B = A.$



Для любых множеств A и B
справедливы следующие утверждения:

$$1) A \cup \emptyset = A$$

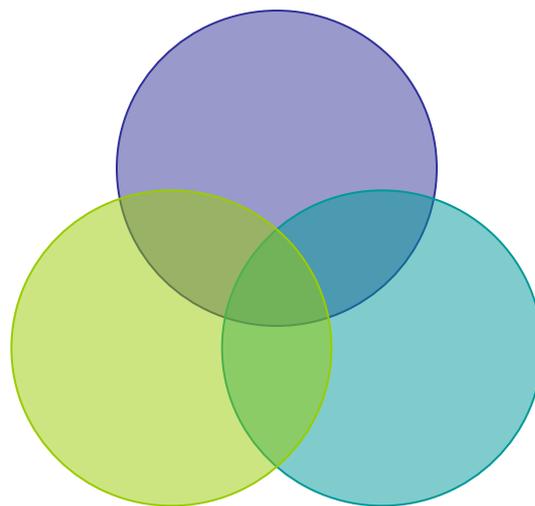
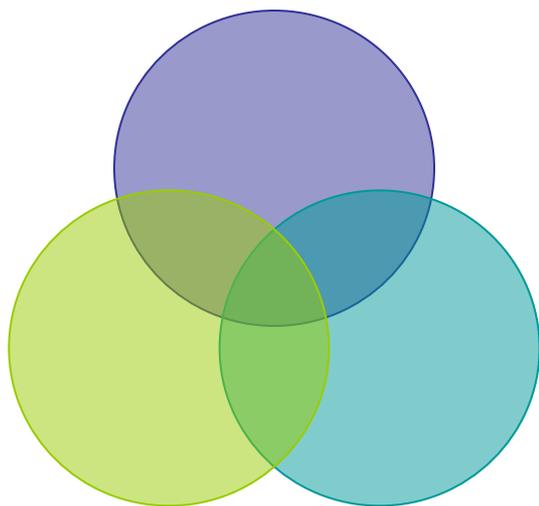
$$2) A \cup A = A$$

$$3) (A \cap B) \subset (A \cup B)$$

$$x \in A \cup B \Leftrightarrow x \in A \text{ или } x \in B$$

$$x \notin A \cup B \Leftrightarrow x \notin A \text{ и } x \notin B$$

Законы пересечения и объединения множеств



Операции над числами обладают рядом свойств:

Например:

$$a + b = b + a$$

$$(a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c)$$

$$(a + b) \cdot c = a \cdot c + b \cdot c$$

и др.

Законы пересечения множеств

1) *Коммутативный закон пересечения множеств:*

$$A \cap B = B \cap A$$

Лат. *commutare* – *перемещать*.

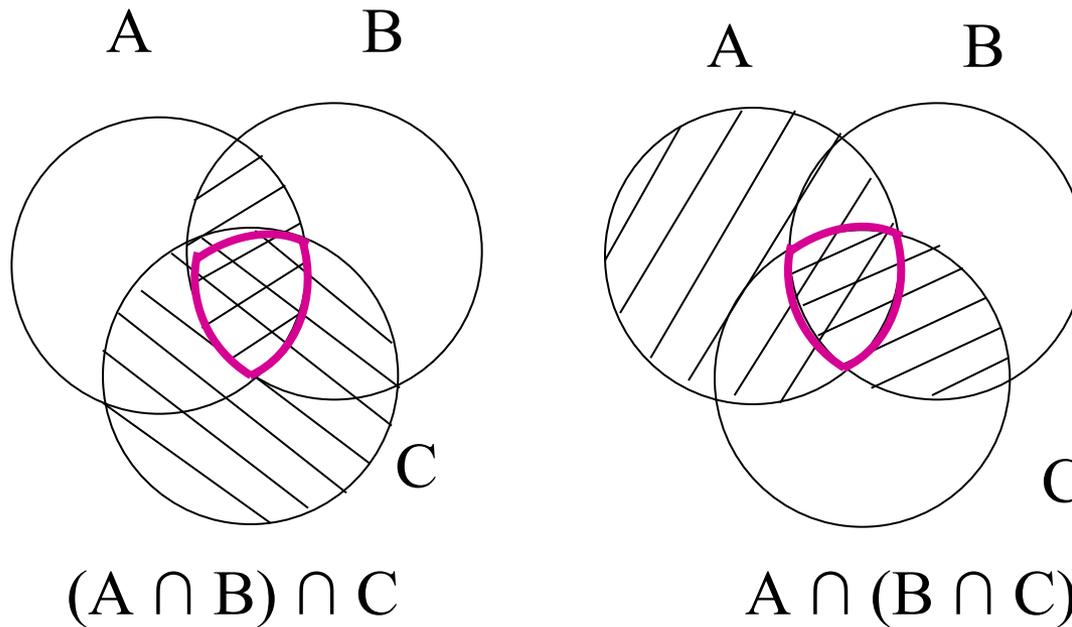
2) *Ассоциативный закон пересечения множеств:*

$$(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$$

Лат. *associatio* – *соединение*.

$$(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$$

Графическое доказательство



Области, изображающие на рисунках множества $(A \cap B) \cap C$ и $A \cap (B \cap C)$ одинаковы. Следовательно, данные множества равны.

Законы объединения множеств

1) *Коммутативный закон объединения множеств:*

$$A \cup B = B \cup A$$

2) *Ассоциативный закон объединения множеств:*

$$(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$$

3) *Дистрибутивный закон пересечения относительно объединения:*

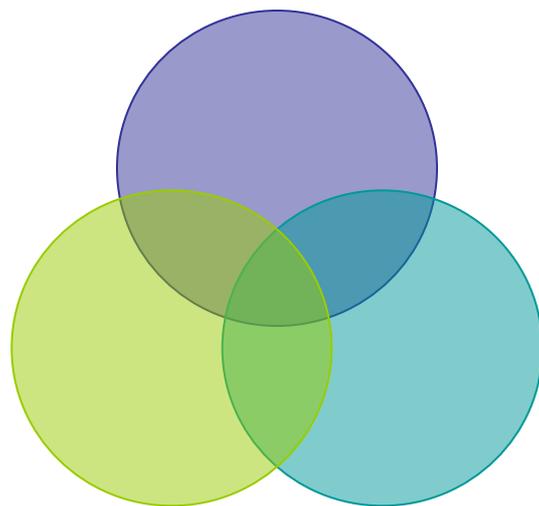
$$(A \cup B) \cap C = (A \cap C) \cup (B \cap C)$$

4) *Дистрибутивный закон объединения относительно пересечения:*

$$(A \cap B) \cup C = (A \cup C) \cap (B \cup C)$$

Лат. *distributus* – *распределенный*.

Вычитание множеств. Дополнение подмножества

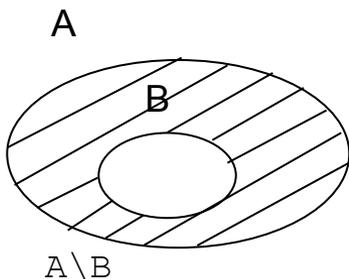
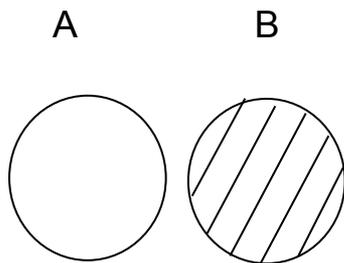
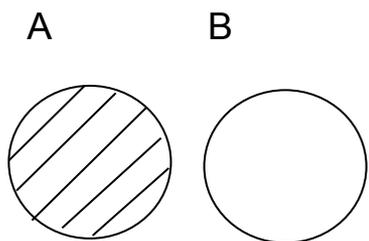
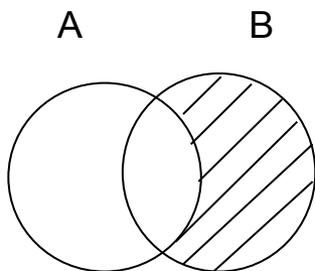
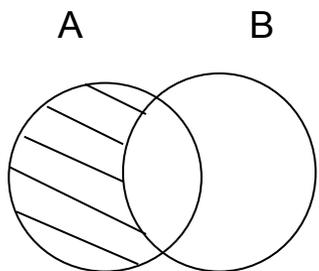


Разностью множеств A и B называется множество, содержащее те и только те элементы, которые принадлежат множеству A и не принадлежат множеству B

$$A \setminus B = \{x \mid x \in A \text{ и } x \notin B\}$$

Операцию, в результате которой находят разность множеств, называют **вычитанием**.

Примеры:



1) A – множество четных чисел,
 B – множество двузначных чисел.

$A \setminus B$ – множество четных чисел,
не являющихся двузначными,

$B \setminus A$ – множество нечетных
двузначных чисел.

2) A – множество треугольников,
 B – множество квадратов.

$$A \setminus B = A, \quad B \setminus A = B.$$

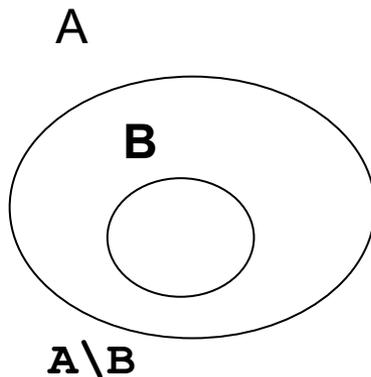
3) A – множество прямоугольников,
 B – множество квадратов.

$A \setminus B$ – множество прямоугольников,
не являющихся квадратами.

$$B \setminus A = \emptyset$$

Пусть $B \subset A$

Дополнением множества B до множества A
называется разность множеств A и B :



$$B'_A = A \setminus B = \{x \mid x \in A \text{ и } x \notin B\}$$

Примеры:

1) $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$, $B = \{1, 3, 5\}$.

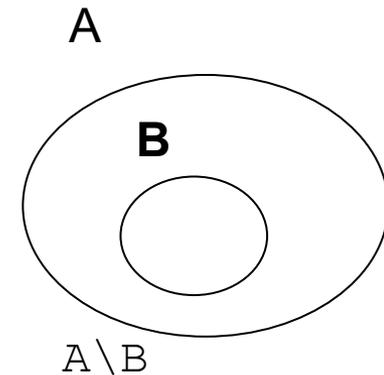
$B'_A = \{2, 4\}$.

2) A – множество четных чисел, B – множество чисел, кратных 4.

B'_A - множество четных чисел, не кратных 4.

3) A множество прямоугольников, B – множество квадратов.

B'_A - множество прямоугольников, не являющихся квадратами.

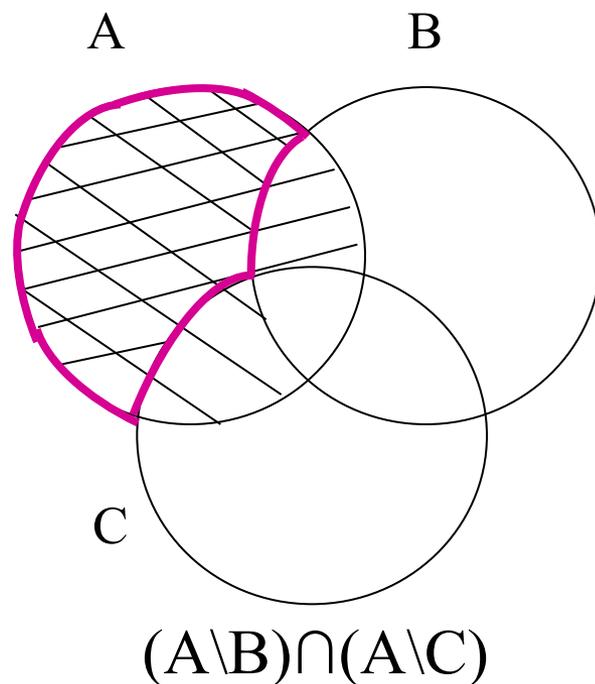
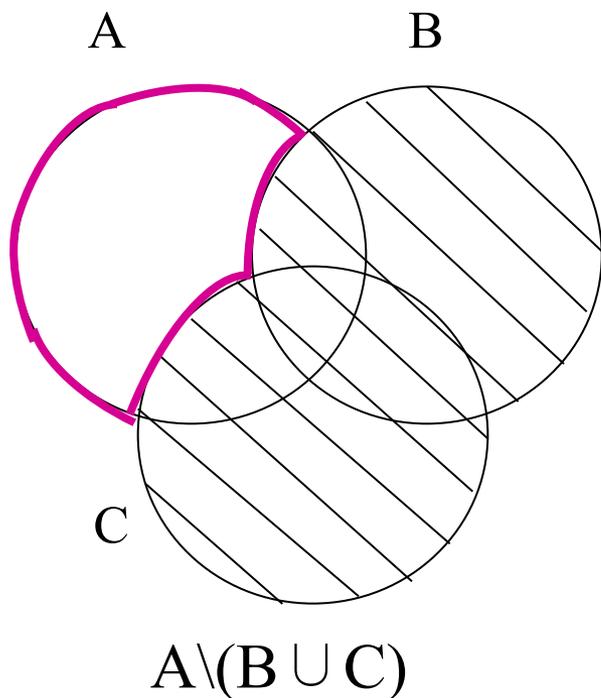


Свойства вычитания множеств

1. $(A \setminus B) \setminus C = (A \setminus C) \setminus B$
2. $(A \cup B) \setminus C = (A \setminus C) \cup (B \setminus C)$ – дистрибутивность вычитания относительно объединения
3. $(A \setminus B) \cap C = (A \cap C) \setminus (B \cap C)$ – дистрибутивность пересечения относительно вычитания
4. $A \setminus (B \cup C) = (A \setminus B) \cap (A \setminus C)$
5. $A \setminus (B \cap C) = (A \setminus B) \cup (A \setminus C)$

Доказать самостоятельно с помощью кругов Эйлера

$$A \setminus (B \cup C) = (A \setminus B) \cap (A \setminus C)$$



Области, изображающие на рисунке множества $A \setminus (B \cup C)$ и $(A \setminus B) \cap (A \setminus C)$ одинаковы. Следовательно, данные множества равны.

Разбиение множества на классы



Элементы некоторого множества можно распределить по классам на основании сходств элементов внутри класса и их отличия от элементов других классов. Такое распределение называется **классификацией**.

Наряду с понятием «класса» широко в человеческой жизни используются слова «тип», «вид», «семейство», «ряд», «сорт».

Считают, что множество X разбито на попарно непересекающиеся подмножества или классы X_1, X_2, \dots, X_n , если одновременно выполняются следующие условия:

1. Все подмножества, образующие разбиение, не пусты:

$$X_1 \neq \emptyset, X_2 \neq \emptyset, \dots, X_n \neq \emptyset$$

2. Любые два таких подмножества не пересекаются:

$$X_i \cap X_j = \emptyset, i, j = 1, \dots, n, i \neq j$$

3. Объединение всех подмножеств есть данное множество:

$$X = X_1 \cup X_2 \cup \dots \cup X_n$$

Если не выполнено хотя бы одно из этих условий, классификацию считают неправильной.

Примеры: Произошло ли разбиение множества X на классы? или Верна ли классификация?

1. X – множество треугольников, X_1 – множество остроугольных треугольников, X_2 – множество прямоугольных треугольников, X_3 – множество тупоугольных треугольников.

$$1) X_1 \neq \emptyset, X_2 \neq \emptyset, X_3 \neq \emptyset$$

$$2) X_1 \cap X_2 = \emptyset, X_2 \cap X_3 = \emptyset, X_1 \cap X_3 = \emptyset,$$

$$3) X_1 \cup X_2 \cup X_3 = X.$$

Множество X разбито на три класса: X_1, X_2, X_3 .

2. X – множество треугольников, X_1 – множество равнобедренных треугольников, X_2 – множество равносторонних треугольников, X_3 – множество разносторонних треугольников.

1) $X_1 \neq \emptyset, X_2 \neq \emptyset, X_3 \neq \emptyset,$

2) $X_2 \subset X_1, \text{ т.е. } X_1 \cap X_2 \neq \emptyset.$

Разбиения множества X на классы X_1, X_2, X_3 не получим.

ДЕКАРТОВО УМНОЖЕНИЕ ИНОЖЕЦТВ

2 и 7

22

27

72

77

В том случае, когда важен порядок следования элементов, в математике говорят об **упорядоченных наборах элементов.**

Упорядоченные наборы элементов называют **кортежами** и различают по длине. **Длина кортежа** – это число элементов, из которых он состоит.

Упорядоченную пару, образованную из элементов x и y , записывают так: $(x; y)$. Элемент x называют **первой координатой (компонентой) пары**, а элемент y – **второй координатой (компонентой) пары**.

Например, $(2; 2)$, $(3; 7)$.

Пары $(x; y)$ и $(m; n)$ равны тогда и только тогда, когда $x = m$ и $y = n$.

$$(2; 7) \neq (7; 2)$$

Декартовым произведением множеств A и B называется множество всех упорядоченных пар, первая компонента которых принадлежит множеству A , а вторая компонента принадлежит множеству B .

$$A \times B = \{(a; b) \mid a \in A \text{ и } b \in B\}$$

Операцию нахождения декартова произведения называют **декартовым умножением множеств**.

Примеры:

$$1) A = \{1, 2, 3\}, B = \{m, n\}.$$

$$A \times B = \{(1; m), (1; n), (2; m), (2; n), (3; m), (3; n)\}$$

$$2) A = \{a, b, c\}.$$

$$A \times A = \{(a; a), (a; b), (a; c), (b; a), (b; b), (b; c), \\ (c; a), (c; b), (c; c)\}$$

Декартовым произведением множеств X_1, X_2, \dots, X_n называется множество всех кортежей длины n , первая компонента которых принадлежит множеству X_1 , вторая множеству X_2, \dots, n -я – множеству X_n :

$$X_1 \times X_2 \times \dots \times X_n = \{(x_1; x_2; \dots; x_n) | x_1 \in X_1, x_2 \in X_2, \dots, x_n \in X_n\}$$

Примеры:

$$1) A = \{1, 2, 3\}, B = \{4, 5\}, C = \{6, 7\}.$$

$$A \times B \times C = \{(1;4;6), (1;4;7), (1;5;6), (1;5;7), \\ (2;4;6), (2;4;7), (2;5;6), (2;5;7), \\ (3;4;6), (3;4;7), (3;5;6), (3;5;7)\}.$$

$$2) A = \{1, 2, 3\}, B = \{4, 5\}, C = \emptyset$$

$$A \times B \times C = \emptyset$$

Свойства декартова умножения

1. Декартово умножение не обладает свойством коммутативности:

$$\text{если } A \neq B, \text{ то } A \times B \neq B \times A$$

2. Декартово умножение не обладает свойством ассоциативности:

$$(A \times B) \times C \neq A \times (B \times C)$$

3. Дистрибутивный закон декартова умножения относительно объединения:

$$(A \cup B) \times C = (A \times C) \cup (B \times C)$$

4. Дистрибутивный закон декартова умножения относительно пересечения:

$$(A \cap B) \times C = (A \times C) \cap (B \times C)$$

5. Дистрибутивный закон декартова умножения относительно вычитания:

$$(A \setminus B) \times C = (A \times C) \setminus (B \times C)$$

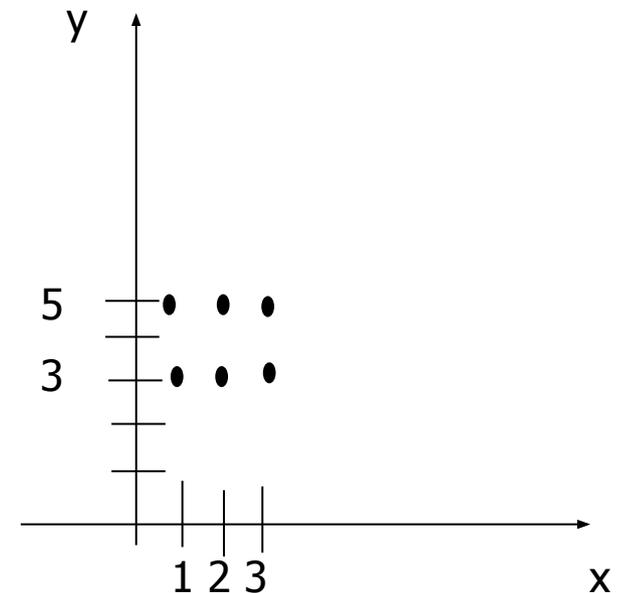
$$6. A \times \emptyset = \emptyset \times A = \emptyset.$$

График декартова произведения двух числовых множеств

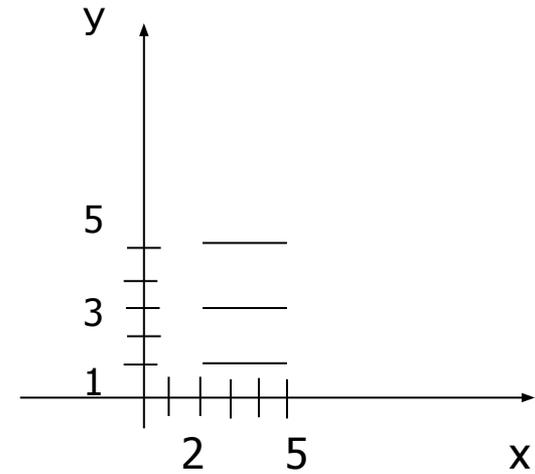
Примеры: Построить график декартова произведения множеств А и В.

$$1) A = \{1, 2, 3\}, B = \{3, 5\}.$$

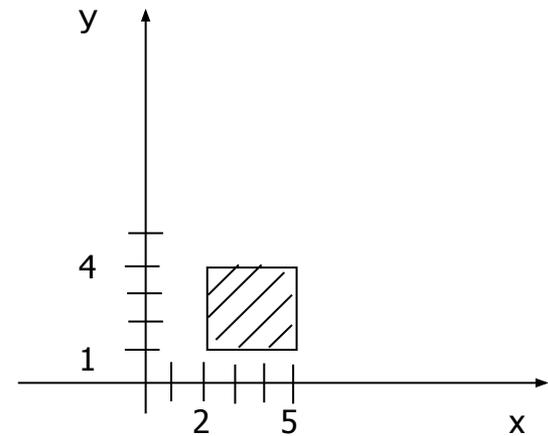
$$A \times B = \{(1;3), (1;5), (2;3), (2;5), (3;3), (3;5)\}$$



$$2) A = [2; 5], B = \{1, 3, 5\}$$

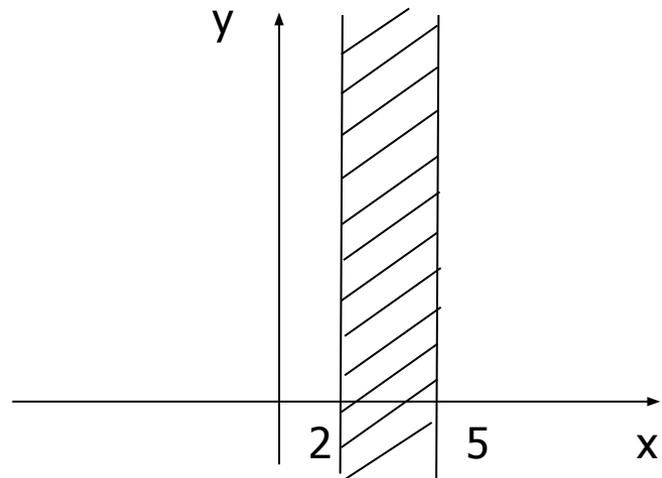


$$3) A = [2; 5], B = [1; 4]$$

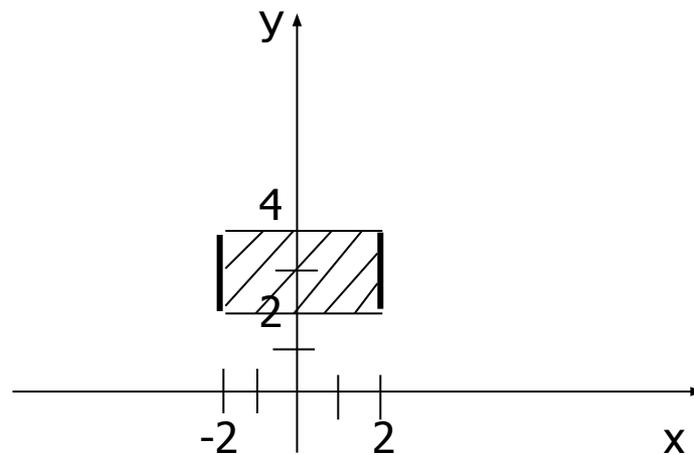


4) $A = [2; 5], B = \mathbf{R}$

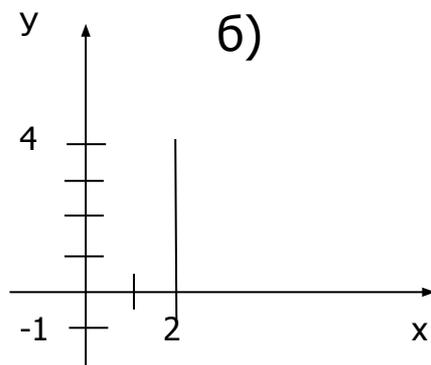
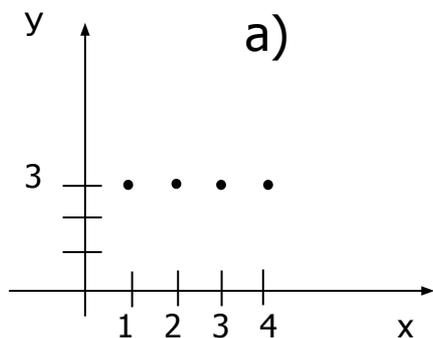
ПОЛОСА



5) $A = [-2; 2], B =]2; 4[$

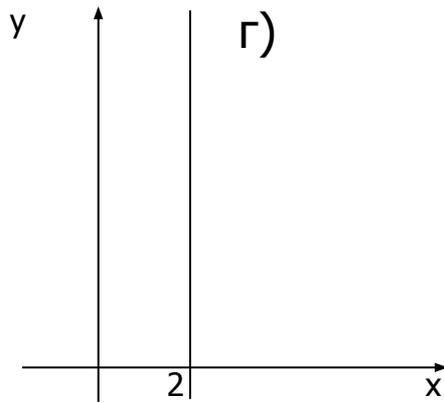
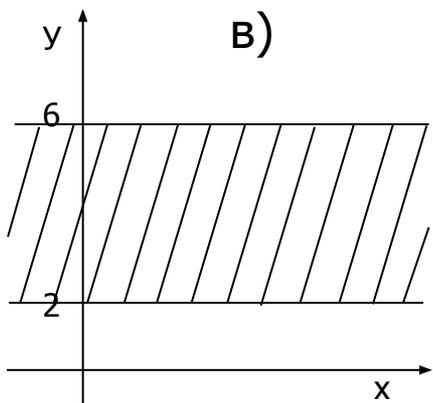


Определить, декартово произведение каких множеств A и B изображено на рисунке:



a) $A = \{1, 2, 3, 4\}, B = \{3\}$

б) $A = \{2\}, B = [-1; 4]$



в) $A = \mathbf{R}, B = [2; 6]$

г) $A = \{2\}, B = \mathbf{R}$

Спасибо за внимание!