Прямая и плоскость

Лекция 5

2. Плоскость

1) Общее уравнение плоскости (рис.14)

$$Ax + By + Cz + D = 0,$$

если $A^2 + B^2 + C^2 \neq 0$,

где $\vec{n} = \{A, B, C\}$ - нормальный вектор плоскости p, $\vec{n} \perp p$;

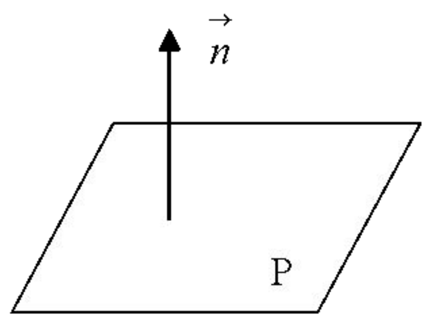

Рисунок 14

2) Уравнение плоскости, проходящей через точку $M_0(x_0, y_0, z_0)$ и перпендикулярной вектору $\vec{n} = \{A, B, C\}$

$$A(x - x_0) + B(y - y_0) + C(z - z_0) = 0;$$

3) Уравнение плоскости в «отрезках» (рис.15)

$$\frac{x}{a}+\frac{y}{b}+\frac{z}{c}=1;$$

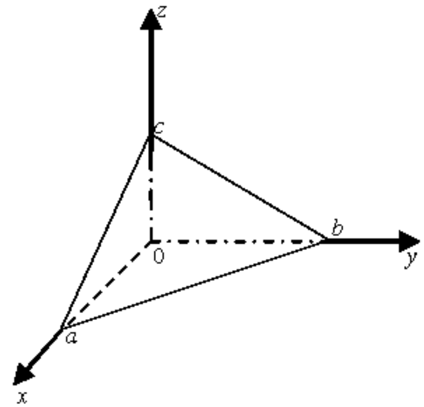

Рисунок 15

4) Уравнение плоскости, проходящей через три данные точки $M_1(x_1, y_1, z_1)$, $M_2(x_2, y_2, z_2)$ и $M_3(x_3, y_3, z_3)$, не лежащие на одной прямой

$$\begin{vmatrix} x-x_1 & y-y_1 & z-z_1 \\ x_2-x_1 & y_2-y_1 & z_2-z_1 \\ x_3-x_1 & y_3-y_1 & z_3-z_1 \end{vmatrix}=0;$$

5) Угол φ между плоскостями

$$A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0 \text{ и } A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0$$

определяется по формуле

$$\cos\varphi = \frac{A_1A_2 + B_1B_2 + C_1C_2}{\sqrt{A_1^2 + B_1^2 + C_1^2} \cdot \sqrt{A_2^2 + B_2^2 + C_2^2}}.$$

Условие параллельности плоскостей: $\dfrac{A_1}{A_2} = \dfrac{B_1}{B_2} = \dfrac{C_1}{C_2}$;

Условие перпендикулярности плоскостей: $A_1A_2 + B_1B_2 + C_1C_2 = 0$;

6) Расстояние d от точки $\mathrm{M}_0(\mathrm{x}_0, \mathrm{y}_0, \mathrm{z}_0)$ до плоскости $Ax + By + Cz + D = 0$ находится по формуле

$$d = \frac{|Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}.$$

3. Прямая в пространстве

1) Общее уравнение прямой в пространстве (прямая как линия пересечения двух плоскостей)

$$\begin{cases} A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0 \\ A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0 \end{cases}$$

2) Канонические уравнения прямой, проходящей через точку $M_0(x_0, y_0, z_0)$ параллельно вектору $\vec{a} = \{l, m, n\}$ ($\vec{a}$ - направляющий вектор прямой):

$$\frac{x - x_0}{l} = \frac{y - y_0}{m} = \frac{z - z_0}{n};$$

3) Параметрические уравнения можно получить из канонических уравнений, введя параметр t:

$$\begin{cases} x = x_0 + lt, \\ y = y_0 + mt, \qquad (-\infty < t < +\infty); \\ z = z_0 + nt \end{cases}$$

4) Уравнение прямой, проходящей через две точки $M_1(x_1, y_1, z_1)$ и $M_2(x_2, y_2, z_2)$:

$$\frac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \frac{y - y_1}{y_2 - y_1} = \frac{z - z_1}{z_2 - z_1};$$

5) Угол φ между прямыми $\frac{x-x_1}{l_1}=\frac{y-y_1}{m_1}=\frac{z-z_1}{n_1}$ и $\frac{x-x_2}{l_2}=\frac{y-y_2}{m_2}=\frac{z-z_2}{n_2}$ определяется по формуле

$$\cos\varphi=\frac{l_1 l_2+m_1 m_2+n_1 n_2}{\sqrt{l_1^2+m_1^2+n_1^2}\cdot\sqrt{l_2^2+m_2^2+n_2^2}}.$$

Условие параллельности прямых: $\frac{l_1}{l_2}=\frac{m_1}{m_2}=\frac{n_1}{n_2}$;

Условие перпендикулярности прямых: $l_1 l_2+m_1 m_2+n_1 n_2=0$.

6) Угол между прямой $\frac{x-x_0}{l}=\frac{y-y_0}{m}=\frac{z-z_0}{n}$ и плоскостью $Ax+By+Cz+D=0$ находится по формуле:

$$\sin\varphi=\frac{|Al+Bm+Cn|}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}\cdot\sqrt{l^2+m^2+n^2}}.$$

Условие параллельности прямой и плоскости: $Al+Bm+Cn=0$;

Условие перпендикулярности прямой и плоскости: $\frac{A}{l}=\frac{B}{m}=\frac{C}{n}$.

4 Полярные координаты

Положение некоторой точки M на плоскости определяется ее расстоянием $\rho = |OM|$ от полюса O и углом φ, образованным отрезком OM с полярной осью Ou (рис.16), при этом ρ называется полярным радиусом точки, φ - ее полярным углом ($0 \le \rho < \infty$, $0 \le \varphi < 2\pi$).

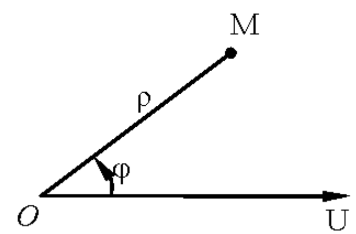

Рисунок 16

Если начало декартовой прямоугольной системы координат совместить с полюсом, а ось Ox направить по полярной оси, то прямоугольные координаты x и y точки M и ее полярные координаты ρ и φ связаны формулами:

$$\begin{cases} x = \rho\cos\varphi, \\ y = \rho\sin\varphi \end{cases} \qquad \text{и обратно,} \qquad \begin{cases} \rho = \sqrt{x^2 + y^2}, \\ tg\,\varphi = \dfrac{y}{x} \end{cases}$$

т.е. $\cos\varphi = \dfrac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}$, $\sin\varphi = \dfrac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}}$.

Пример. Даны точки $A_1(3,5,4)$, $A_2(8,7,4)$, $A_3(5,10,4)$, $A_4(4,7,8)$.

Составить уравнения:

а) плоскости $A_1A_2A_3$;

б) прямой A_1A_2;

в) прямой A_4M, перпендикулярной к плоскости $A_1A_2A_3$;

г) прямой A_3N, параллельной прямой A_1A_2;

д) плоскости, проходящей через точку A_4 перпендикулярно к прямой A_1A_2.

Найти:

е) синус угла между прямой A_1A_4 и плоскостью $A_1A_2A_3$;

ж) расстояние от точки A_4 до плоскости $A_1A_2A_3$.

Решение.

а) Используя формулу уравнения плоскости, проходящей через три точки, составим уравнение плоскости $A_1A_2A_3$. Подставим координаты точек $A_1(3,5,4)$, $A_2(8,7,4)$, $A_3(5,10,4)$:

$$\begin{vmatrix} x-3 & y-5 & z-4 \\ 8-3 & 7-5 & 4-4 \\ 5-3 & 10-5 & 4-4 \end{vmatrix} = 0 \quad \Rightarrow \quad \begin{vmatrix} x-3 & y-5 & z-4 \\ 5 & 2 & 0 \\ 2 & 5 & 0 \end{vmatrix} = 0$$

$$(x-3)\cdot 2\cdot 0+(y-5)\cdot 0\cdot 2+(z-4)\cdot 5\cdot 5-(z-4)\cdot 2\cdot 2-(x-3)\cdot 5\cdot 0-(y-5)\cdot 5\cdot 0=0;$$

$$0+0+25z-100-4z+16-0-0=0; \Rightarrow 21z-84=0.$$

Разделим обе части уравнения на 4, уравнение плоскости $A_1A_2A_3$ имеет вид: $z-4=0$.

б) Зная координаты $A_1(3,5,4)$ и $A_2(8,7,4)$, составим уравнение прямой A_1A_2:

$$\frac{x-3}{8-3}=\frac{y-5}{7-5}=\frac{z-4}{4-4}.$$

Получаем уравнение прямой A_1A_2: $\frac{x-3}{5}=\frac{y-5}{2}=\frac{z-4}{0}$.

в) Так как прямая A_4M перпендикулярна плоскости $A_1A_2A_3$, то в качестве направляющего вектора прямой $\vec{s}$ можно взять нормальный вектор $\vec{n}=\{0;0;1\}$ плоскости $A_1A_2A_3$. Тогда уравнение прямой A_4M запишется в виде:

$$\frac{x-4}{0}=\frac{y-8}{0}=\frac{z-9}{1}.$$

г) Прямые A_3N и A_1A_2 параллельны, поэтому в качестве направляющего вектора для прямой A_3N можно использовать направляющий вектор $\vec{s}=\{5;2;0\}$ прямой A_1A_2:

$$\frac{x-5}{5}=\frac{y-10}{2}=\frac{z-4}{0}.$$

д) Плоскость перпендикулярна прямой, следовательно, за нормальный вектор плоскости можно принять направляющий вектор прямой A_1A_2.

Подставим координаты точки $A_4(4,7,8)$ и нормального вектора $\vec{n}=\{5;2;0\}$ в общее уравнение плоскости:

$$5(x-4)+2(y-7)+0(z-8)=0,$$

$$5x-20+2y-14=0.$$

Таким образом, уравнение плоскости: $5x+2y-34=0$.

е) A_1A_4: $\dfrac{x-3}{1}=\dfrac{y-5}{2}=\dfrac{z-4}{4}$,

$A_1A_2A_3$: $z-4=0$.

Направляющий вектор прямой $\vec{s}=\{1;2;4\}$, а нормальный вектор плоскости $\vec{n}=\{0;0;1\}$.

$$\sin\varphi=\frac{0\cdot1+0\cdot2+21\cdot4}{\sqrt{0+0+441}\cdot\sqrt{1+4+16}}=\frac{84}{21\sqrt{21}}=\frac{4\sqrt{21}}{21}.$$

ж) Расстояние от точки $A_4(4,7,8)$ до плоскости $z-4=0$ найдем по формуле:

$$d=\frac{|Ax_0+By_0+Cz_0+D|}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}},$$

тогда $d=\dfrac{|8-1|}{\sqrt{0+0+1}}=7$.