Тема урока: Тригонометрические функции и их свойства

9.2.4.6 объяснять с помощью единичной окружности чётность (нечётность), периодичность и промежутки знакопостоянства тригонометрических функций.

№1.

1. Определите знаки тригонометрических функций угла:

1) 143^0, 2) -234^0, 3)0,5, 4)-7,3

Решение:

1)143^0 – угол в первой четверти, в ней все тригонометрические функции имеют положительный знак.

2) -234^0 – угол по часовой стрелке, он находится во второй четверти, в ней синус положителен, остальные функции – отрицательны.

3) 0,5 – угол в радианах, в 1 радиане примерно 57^0, значит в нём примерно $28{,}5^0$, первая четверть, все функции положительны.

4) -7,3 – угол в радианах и отсчитываем его по часовой стрелке, умножим -7,3 на 57, получим $-416{,}1^0$, это угол в четвёртой четверти, в ней синус – положителен, остальные функции – отрицательны.

Дескрипторы:

1б определяет расположение положительных углов в определённой четверти

1б записывает знаки тригонометрических функций

1б распознаёт радианную меру в записи величины угла

2. Используя чётность и периодичность тригонометрических функций, найдите значение выражений:

$1) Sin(-390^0), 2) Cos\frac{9\pi}{4},$

$3) tg(-420^0), 4) ctg\frac{10\pi}{3}$

Решение:

$$1) Sin(-390^0) = -Sin(360^0 + 30^0) = -Sin30^0 = -\frac{1}{2},$$

$$2) Cos\frac{9\pi}{4} = Cos\left(2\pi + \frac{\pi}{4}\right) = Cos\frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2},$$

$$3) tg(-420^0) = -tg(180^0 \cdot 2 + 60^0 = -tg60^0 = -\sqrt{3},$$

$$4) ctg\frac{10\pi}{3} = ctg\left(3\pi + \frac{\pi}{3}\right) = ctg\frac{\pi}{3} = \frac{1}{\sqrt{3}}$$

Дескрипторы:

1б применяет нечётность синуса и тангенса

1б использует периодичность синуса и косинуса

1б использует периодичность тангенса и котангенса

1б вычисляет значения $-Sin30^0$, $Cos\frac{\pi}{4}$ $-tg60^0$ $ctg\frac{\pi}{3}$

№2

1)Поставьте в соответствие тригонометрическим выражениям их знаки

1	Sin 20^0	A	>0
2	Cos 70^0	B	<0
3	tg 120^0		
4	ctg 240^0		
5	Sin(-45^0)		
6	tg(-130^0)		

1__, 2__, 3__, 4__, 5__, 6__.

Дескрипторы:

1б определяет 1) А

1б определяет 2) А

1б определяет 3) В

1б определяет 4) А

1б определяет 5) В

1б определяет 6) В

2. Найдите значение выражения:

1) Sin 405^0

2) Cos (- 750^0)

3) tg 1485^0

4) ctg (- 1110^0)

Решение:

$$1) Sin405^0 = Sin(360^0 + 45^0) = Sin45^0 = \frac{\sqrt{2}}{2},$$

$$2) Cos(-750^0) = Cos750^0 = Cos(360^0 \cdot 2 + 30^0) =$$

$$= Cos30^0 = \frac{\sqrt{3}}{2},$$

$$3) tg1485^0 = tg(180^0 \cdot 8 + 45^0) = tg45^0 = 1,$$

$$4) ctg(-1110^0) = -ctg1110^0 = -ctg(180^0 \cdot 6 + 30^0) =$$

$$= -ctg30^0 = \sqrt{3}$$

Дескрипторы:

1б использует наименьший положительный период синуса и косинуса

1б использует наименьший положительный период тангенса и котангенса

1б использует нечётность котангенса

1б использует чётность косинуса

1б вычисляет значение 1)

1б вычисляет значение 2)

1б вычисляет значение 3)

1б вычисляет значение 4)

№3

1. Определите знак произведения:

a) Cos 20^0 Sin 100^0

b) Sin (-50^0) ctg 200^0

c) tg 500^0 Cos 120^0

d) Sin (-70^0) tg (-50^0)

e) ctg (-60^0) tg 150^0

f) Cos (-95^0) tg (-170^0)

Дескрипторы:

1б определяет расположение углов в четвертях

1б определяет знаки функций в четвертях

1б использует чётность и нечётность функций

1б использует периодичность

1б a) >0

1б b) <0

1б c) >0

1б d) >0

1б e) >0

1б f) <0

Решение

. a) Cos 20^0 Sin $100^0>0$, косинус в первой четверти положителен, синус во второй – тоже.

b) Sin (-50^0) ctg $200^0<0$, синус в четвёртой четверти отрицателен, котангенс в третьей положителен,

c) tg 500^0 Cos 120^0=tg(360^0+140^0) Cos 120^0=

tg 140^0 Cos 120^0 >0, во второй четверти обе эти функции отрицательны,

d) Sin (-70^0) tg (-50^0)>0, в четвёртой четверти обе эти функции отрицательны,

e) ctg (-60^0) tg 150^0>0, котангенс в четвёртой четверти отрицателен, тангенс во второй – тоже,

f) Cos (-95^0) tg (-170^0)= - Cos 95^0 tg 170^0<0, косинус и тангенс во второй четверти отрицательны.

2. Сравните:

a) Sin 60^0 и tg(-45^0)

b) Sin 30^0 и $\mathrm{Sin}^2(-30^0)$

c) Cos (-45^0) и Sin (-45^0)

d) Cos 60^0 и Cos (-60^0)

e) $\mathrm{tg}^3(-60^0)$ и ctg (-30^0)

f) ctg^2(- 45^0) и Cos (-30^0)

Дескрипторы:

1б использует чётность и нечётность

1б возводит в чётную степень

1б возводит в нечётную степень

1б применяет табличные значения

1б a)>

1б b)>

1б c)>

1б d) =

1б e) <

1б f)>

Решение:

$a) Sin60^0 = \frac{\sqrt{3}}{2}, tg(-45^0) = -1$ Ответ: >

$b) Sin30^0 = \frac{1}{2}, Sin^2(-30^0) = Sin^2 30^0 = \left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1}{4}$ Ответ: >

$c) Cos(-45^0) = Cos45^0 = \frac{\sqrt{2}}{2}, Sin(-45^0) = -Sin45^0 = -\frac{\sqrt{2}}{2}$ Ответ: >

$d) Cos60^0 = \frac{1}{2}, Cos(-60^0) = Cos60^0 = \frac{1}{2}$ Ответ: =

$e) tg^3(-60^0) = -tg^3 60^0 = -(\sqrt{3})^3 = -3\sqrt{3},$ Ответ: <

$ctg(-30^0) = -ctg30^0 = -\sqrt{3}$

$f) ctg^2(-45^0) = ctg^2 45^0 = 1^2 = 1,$

$Cos(-30^0) = Cos30^0 = \frac{\sqrt{3}}{2} \approx \frac{1,7}{2} \approx 0,85$ Ответ: >

№4

1. Углом какой четверти является x, если

a) $\text{Sin } x < 0$, $\text{Cos } x > 0$,

b) $\text{Sin } x < 0$, $\text{Cos } x < 0$,

c) $\text{Sin } x > 0$, $\text{tg } x < 0$,

d) $\text{Cos } x < 0$, $\text{ctg } x > 0$.

Дескрипторы:

1б a) 4 четверть

1б b) 3 четверть

1б c) 2 четверть

1б d) 2 четверть

1б приводит объяснения

Решение:

a) 4 четверть (точка в 4 четверти имеет положительную

абсциссу и отрицательную ординату,

b) 3 четверть (точка в 3 четверти имеет обе отрицательные координаты)

c) 2 четверть (точка во 2 четверти имеет положительную

ординату- это синус, и отрицательную абсциссу – отношение ординаты к абсциссе есть тангенс),

d) 2 четверть (точка во второй четверти имеет отрицательную абсциссу – это косинус, и положительную ординату –

отношение абсциссы к ординате есть котангенс)

2. Определите знак разности:

a) Sin 60^0- Cos 180^0,

b) 2tg 45^0 – Sin 45^0,

c) 5Cos 90^0 – 3ctg 60^0,

d) 4ctg 30^0 – 6 Sin 90^0

$$e)3\,\mathrm{Sin}\frac{2\pi}{3}\mathrm{Cos}\frac{\pi}{6}-tg\frac{3\pi}{4},$$

$$f)2ctg\frac{\pi}{3}\mathrm{Sin}\frac{\pi}{3}-\mathrm{Cos}\,2\pi$$

Дескрипторы:

1б a) >0

1б b) <0

1б c) >0

1б d) <0

1б e) >0

1б f) <0

1б применяет табличные значения

1б выполняет вычисления

Решение

:

$$a)\mathrm{Sin}\,60^0-\mathrm{Cos}\,180^0=\frac{\sqrt{3}}{2}-(-1)=\frac{\sqrt{3}+2}{2}>0,$$

$$b)2tg45^0-\mathrm{Sin}\,45^0=2\cdot1-\frac{\sqrt{2}}{2}=\frac{2-\sqrt{2}}{2}<0,$$

$$c)5\,\mathrm{Cos}\,90^0-3ctg60^0=5\cdot0-3\cdot\frac{1}{\sqrt{3}}=\frac{5\sqrt{3}-3}{\sqrt{3}}>0,$$

$$d)4ctg30^0-6\,\mathrm{Sin}\,90^0=4\cdot\sqrt{3}-6\cdot1<0,$$

$$e)\mathrm{Sin}\frac{2\pi}{3}\mathrm{Cos}\frac{\pi}{6}-tg\frac{3\pi}{4}=\frac{\sqrt{3}}{2}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}-(-1)>0,$$

$$f)2ctg\frac{\pi}{3}\mathrm{Sin}\frac{\pi}{3}-\mathrm{Cos}\,2\pi=\frac{1}{\sqrt{3}}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}-1<0$$

Свойства тригонометрических функций:

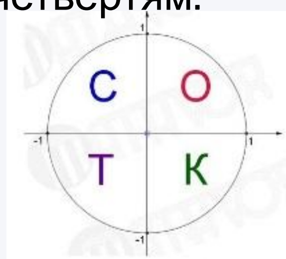
1. Периодичность:

$$\sin(2\pi n + x) = \sin x,$$
$$\cos(2\pi n + x) = \cos x,$$
$$tg(\pi n + x) = tgx,$$
$$ctg(\pi n + x) = ctgx.$$

Наименьший положительный период y=Sin x и y=Cos x равен 360^0,

наименьший положительный период y=tg x и y=ctg x равен 180^0.

2. Знакопостоянство или знаки по четвертям:



Правило КОСТ: О- общая, в первой четверти все функции положительны,

К- косинус, в четвёртой четверти положителен, С – синус, синус во второй четверти положителен, Т – тангенс, в третьей четверти положителен.

3. Чётность и нечётность:

$$\sin(-\alpha) = -\sin\alpha - \textit{нечётная},$$
$$\cos(-\alpha) = \cos\alpha - \textit{чётная},$$
$$tg(-\alpha) = -tg\alpha - \textit{нечётная},$$
$$ctg(-\alpha) = -ctg\alpha - \textit{нечётная}.$$

Домашнее задание.

1. Определите чётная или нечётная функция:

a) $y=\sin^2 x \cos x$

b) $y=\cos^3 x \, tg^3 x$

c) $y=ctg^4 x \sin x$

2. Найдите углы равнобокой трапеции, если косинус одного из углов равен: $a)\frac{\sqrt{2}}{2}, b)\frac{\sqrt{3}}{2}, c)\frac{1}{2}.$

3. Докажите, что синус любого угла треугольника положителен. Верно ли это для косинуса, тангенса, котангенса?