6.6. ТЕОРЕМЫ О ПРЕДЕЛАХ

Пусть *f(x)* и *φ(x)* – функции, для которых существуют пределы при

$$x \to x_0 \quad \text{или} \quad x \to \infty$$

$$\lim_{\substack{x \to x_0 \\ x \to \infty}} f(x) = A \qquad \lim_{\substack{x \to x_0 \\ x \to \infty}} \varphi(x) = B$$

Тогда справедливы следующие теоремы:

ТЕОРЕМА 1.

Функция не может иметь более одного предела.

Доказательство:

Предположим обратное: что функция *f(x)* имеет два предела: *A* и *D*, $A \neq D$

$$\lim_{\substack{x\to x_0 \\ x\to\infty}} f(x) = A \qquad \lim_{\substack{x\to x_0 \\ x\to\infty}} f(x) = D$$

Тогда функцию *f(x)* можно представить как сумму:

$$f(x) = \alpha(x) + A \quad \text{или} \quad f(x) = \beta(x) + D$$

Где $\alpha(x), \beta(x)$ **- бесконечно малые величины при**

$$x \to x_0 \quad \text{или} \quad x \to \infty$$

Вычитаем почленно эти равенства:

$$0 = A - D + \alpha(x) - \beta(x)$$

$$D - A = \alpha(x) - \beta(x)$$

Но по условию теоремы $A \neq D$, **а разность**

$$\alpha(x) - \beta(x)$$

является бесконечно малой величиной. Следовательно, предположение о существовании второго предела неверно, и функция имеет единственный предел.

ТЕОРЕМА 2.

Предел алгебраической суммы (разности) конечного числа функций равен сумме (разности) пределов этих функций:

$$\lim_{\substack{x\to x_0\\ x\to\infty}}\bigl(f(x)\pm\varphi(x)\bigr)=\lim_{\substack{x\to x_0\\ x\to\infty}}f(x)\pm\lim_{\substack{x\to x_0\\ x\to\infty}}\varphi(x)=A\pm B$$

Доказательство:

По условию теоремы: $\lim\limits_{\substack{x\to x_0 \\ x\to\infty}} f(x) = A$ $\lim\limits_{\substack{x\to x_0 \\ x\to\infty}} \varphi(x) = B$

Тогда функции *f(x)* и *φ(x)* можно представить как суммы:

$$f(x) = \alpha(x) + A \quad \text{и} \quad \varphi(x) = \beta(x) + B$$

Где $\alpha(x), \beta(x)$ **- бесконечно малые величины при**

$$x \longrightarrow x_0 \quad \text{или} \quad x \longrightarrow \infty$$

Складываем почленно эти равенства:

$$f(x)+\varphi(x)=A+B+\boxed{\alpha(x)+\beta(x)}$$

Сумма бесконечно малых величин является величиной бесконечно малой.

Таким образом, функция $f(x)+\varphi(x)$ представляет собой сумму числа A+B и бесконечно малой величины, следовательно

$$\lim_{\substack{x\to x_0\\ x\to\infty}}\left(f(x)+\varphi(x)\right)=A+B$$

ТЕОРЕМА 3.

***Предел произведения конечного числа функций равен произведению пределов этих функций*:**

$$\lim_{\substack{x\to x_0\\ x\to\infty}}\big(f(x)\cdot\varphi(x)\big)=\lim_{\substack{x\to x_0\\ x\to\infty}} f(x)\cdot\lim_{\substack{x\to x_0\\ x\to\infty}}\varphi(x)=A\cdot B$$

Следствие.

$$\lim_{\substack{x \to x_0 \\ x \to \infty}} \left(C \cdot f(x) \right) = C \cdot \lim_{\substack{x \to x_0 \\ x \to \infty}} f(x) = C \cdot A$$

ТЕОРЕМА 4.

***Предел частного двух функций равен частному пределов этих функций*:**

$$\lim_{\substack{x\to x_0\\ x\to\infty}}\frac{f(x)}{\varphi(x)}=\frac{\lim\limits_{\substack{x\to x_0\\ x\to\infty}}f(x)}{\lim\limits_{\substack{x\to x_0\\ x\to\infty}}\varphi(x)}=\frac{A}{B}$$

ТЕОРЕМА 5.

Если $\lim\limits_{u\to u_0} f(u) = A$ ***и*** $\lim\limits_{x\to x_0} \varphi(x) = u_0$

то предел сложной функции существует и равен

$$\lim_{x\to x_0} f[\varphi(x)] = A$$

ТЕОРЕМА 6.

Если в некоторой окрестности точки x_0 (или при достаточно больших x)

$$f(x) < \varphi(x)$$ ***то***

$$\lim_{\substack{x \to x_0 \\ x \to \infty}} f(x) \leq \lim_{\substack{x \to x_0 \\ x \to \infty}} \varphi(x)$$

Замечание

В этих теоремах полагается, что существуют пределы функций $f(x)$ и $\varphi(x)$, из чего следует существование пределов суммы, произведения или частного этих функций.

Однако из существования пределов суммы, произведения или частного еще не следует, что существуют пределы самих функций $f(x)$ и $\varphi(x)$.

Пример.

$$\lim_{x \to \frac{\pi}{2}} (tgx \cdot ctgx) = \lim_{x \to \frac{\pi}{2}} 1 = 1$$

Но: $\lim\limits_{x \to \frac{\pi}{2}} tgx$ - **не существует**