



6.6. ТЕОРЕМЫ О ПРЕДЕЛАХ

Пусть $f(x)$ и $\varphi(x)$ – функции, для которых существуют пределы при

$$x \rightarrow x_0 \quad \text{или} \quad x \rightarrow \infty$$

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = A$$

$$x \rightarrow \infty$$

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \varphi(x) = B$$

$$x \rightarrow \infty$$

Тогда справедливы следующие теоремы:





ТЕОРЕМА 1.

*Функция не может иметь более
одного предела.*





Доказательство:

Предположим обратное: что функция $f(x)$ имеет два предела: A и D , $A \neq D$

$$\lim_{\substack{x \rightarrow x_0 \\ x \rightarrow \infty}} f(x) = A$$

$$\lim_{\substack{x \rightarrow x_0 \\ x \rightarrow \infty}} f(x) = D$$

Тогда функцию $f(x)$ можно представить как сумму:

$$f(x) = \alpha(x) + A \quad \text{или} \quad f(x) = \beta(x) + D$$

Где $\alpha(x), \beta(x)$ - бесконечно малые величины при

$$x \rightarrow x_0 \quad \text{или} \quad x \rightarrow \infty$$


Вычитаем почленно эти равенства:

$$0 = A - D + \alpha(x) - \beta(x)$$

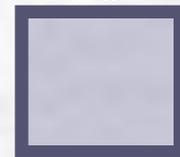
$$D - A = \alpha(x) - \beta(x)$$

Но по условию теоремы $A \neq D$, а разность

$$\alpha(x) - \beta(x)$$

является бесконечно малой величиной.

Следовательно, предположение о существовании второго предела неверно, и функция имеет единственный предел.





ТЕОРЕМА 2.

*Предел алгебраической суммы
(разности) конечного числа функций
равен сумме (разности) пределов этих
функций:*

$$\lim_{\substack{x \rightarrow x_0 \\ x \rightarrow \infty}} (f(x) \pm \varphi(x)) = \lim_{\substack{x \rightarrow x_0 \\ x \rightarrow \infty}} f(x) \pm \lim_{\substack{x \rightarrow x_0 \\ x \rightarrow \infty}} \varphi(x) = A \pm B$$




$$f(x) + \varphi(x) = A + B + \alpha(x) + \beta(x)$$

Сумма бесконечно малых величин является величиной бесконечно малой.

Таким образом, функция $f(x) + \varphi(x)$ представляет собой сумму числа $A+B$ и бесконечно малой величины, следовательно

$$\lim_{\substack{x \rightarrow x_0 \\ x \rightarrow \infty}} (f(x) + \varphi(x)) = A + B$$






ТЕОРЕМА 3.

*Предел произведения конечного
числа функций равен произведению
пределов этих функций:*

$$\lim_{\substack{x \rightarrow x_0 \\ x \rightarrow \infty}} (f(x) \cdot \varphi(x)) = \lim_{\substack{x \rightarrow x_0 \\ x \rightarrow \infty}} f(x) \cdot \lim_{\substack{x \rightarrow x_0 \\ x \rightarrow \infty}} \varphi(x) = A \cdot B$$




Следствие.

$$\lim_{\substack{x \rightarrow x_0 \\ x \rightarrow \infty}} (C \cdot f(x)) = C \cdot \lim_{\substack{x \rightarrow x_0 \\ x \rightarrow \infty}} f(x) = C \cdot A$$

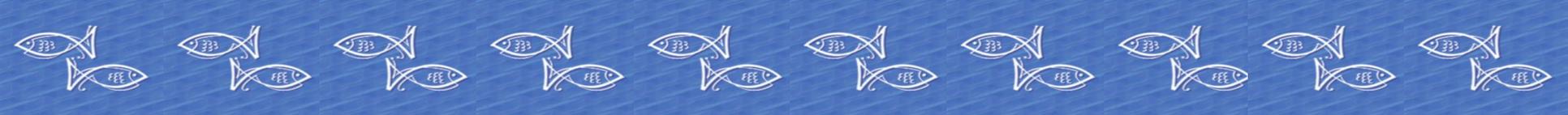




ТЕОРЕМА 4.

Предел частного двух функций равен частному пределов этих функций:

$$\lim_{\substack{x \rightarrow x_0 \\ x \rightarrow \infty}} \frac{f(x)}{\varphi(x)} = \frac{\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)}{\lim_{\substack{x \rightarrow x_0 \\ x \rightarrow \infty}} \varphi(x)} = \frac{A}{B}$$

ТЕОРЕМА 5.

Если $\lim_{u \rightarrow u_0} f(u) = A$ *и* $\lim_{x \rightarrow x_0} \varphi(x) = u_0$

*то предел сложной функции существует
и равен*

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f[\varphi(x)] = A$$





ТЕОРЕМА 6.

*Если в некоторой окрестности точки x_0
(или при достаточно больших x)*

$$f(x) < \varphi(x) \quad \text{то}$$

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) \leq \lim_{x \rightarrow x_0} \varphi(x)$$
$$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) \leq \lim_{x \rightarrow \infty} \varphi(x)$$

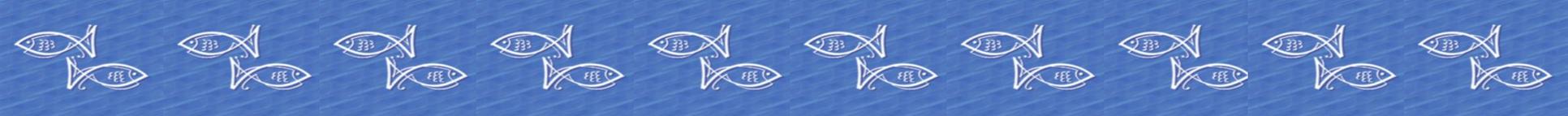




Замечание

В этих теоремах полагается, что существуют пределы функций $f(x)$ и $\varphi(x)$, из чего следует существование пределов суммы, произведения или частного этих функций.

Однако из существования пределов суммы, произведения или частного еще не следует, что существуют пределы самих функций $f(x)$ и $\varphi(x)$.





Пример.

$$\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} (\operatorname{tg} x \cdot \operatorname{ctg} x) = \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} 1 = 1$$

Но: $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \operatorname{tg} x$ - не существует

