Л№22 Иррациональные уравнения и неравенства

Иррациональное уравнение – это уравнение, в котором неизвестное находится под знаком корня.

При возведении обеих частей уравнения в натуральную степень, получается уравнение – следствие данного.

Виды иррациональных уравнений

1. $\sqrt{f(x)} = a$

Из него следует, что $a \geq 0$, $(\sqrt{a})^2 = a$

Для нашего случая получим

$(\sqrt{f(x)})^2 = a^2$ или $f(x) = a^2$

2. $\sqrt{f(x)} + \sqrt{g(x)} = 0$

T.e. $\begin{cases} f(x) = 0 \\ g(x) = 0 \end{cases}$

3. $\sqrt{f(x)} = \sqrt{g(x)}$

$$\begin{cases} f(x) \geq 0 \\ g(x) \geq 0 \\ f(x) = g(x) \end{cases}$$

Неравенство, содержащее переменную под знаком корня, называется иррациональным.

Основные типы иррациональных неравенств:

1. $\sqrt{f(x)} > \sqrt{g(x)} \Leftrightarrow \begin{cases} g(x) \geq 0 \\ f(x) > g(x) \end{cases}$

2. $\sqrt{f(x)} \geq \sqrt{g(x)} \Leftrightarrow \begin{cases} g(x) \geq 0 \\ f(x) \geq g(x) \end{cases}$

3. $\sqrt{f(x)} < g(x) \Leftrightarrow \begin{cases} f(x) \geq 0 \\ g(x) > 0 \\ f(x) < g^2(x) \end{cases}$

4. $\sqrt{f(x)} \leq g(x) \quad \Leftrightarrow \begin{cases} f(x) \geq 0 \\ g(x) \geq 0 \\ f(x) \leq g^2(x) \end{cases}$

5. $\sqrt{f(x)} > g(x) \quad \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} g(x) < 0 \\ f(x) \geq 0 \end{cases} \\ \begin{cases} g(x) \geq 0 \\ f(x) > g^2(x) \end{cases} \end{array} \right.$

6. $\sqrt{f(x)} \geq g(x) \quad \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} g(x) < 0 \\ f(x) \geq 0 \end{cases} \\ \begin{cases} g(x) \geq 0 \\ f(x) \geq g^2(x) \end{cases} \end{array} \right.$

1. $\sqrt{x + 12} > \sqrt{4 - x}$

2. $\sqrt{x+2} > x$

Решим неравенство:

$$\left(x+\frac{4}{x}\right)\left(\frac{\sqrt{x^2-8x+16}-1}{\sqrt{6-x}-1}\right)^2 \geq 5\left(\frac{\sqrt{x^2-8x+16}-1}{\sqrt{6-x}-1}\right)^2$$

Решение:

Решение неравенства ищем при условиях:

$$\begin{cases} x \neq 0 \\ 6 - x \geq 0 \\ 6 - x \neq 1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x \neq 0 \\ x \leq 6 \\ x \neq 5 \end{cases}$$

Рассмотрим два случая:

1) $\sqrt{x^2-8x+16}=1$, т.е. |x-4| = 1 и, значит, x = 3 или x = 5.

Из этих корней нам подходит корень x = 3.

2) $\sqrt{x^2-8x+16}\neq 1$ Разделим обе части неравенства на $(\frac{\sqrt{x^2-8x+16}-1}{\sqrt{6-x}-1})^2$,

получим $x+\frac{4}{x}\geq 5$, откуда $\frac{(\mathrm{x}-1)(\mathrm{x}-4)}{x}\geq 0$

$$\begin{cases} 0 < x \le 1 \\ x \ge 4 \end{cases}$$

С учетом ограничений получаем, что множество решений исходного неравенства: $(0;1] \cup 3 \cup [4;5) \cup (5;6]$.

Ответ: $(0;1] \cup 3 \cup [4;5) \cup (5;6]$.