

Л№22

Иррациональные

уравнения и

неравенства

Иррациональное уравнение – это уравнение, в котором неизвестное находится под знаком корня.

При возведении обеих частей уравнения в натуральную степень, получается уравнение – следствие данного.

Виды иррациональных уравнений

$$1. \sqrt{f(x)} = a$$

Из него следует, что $a \geq 0$, $(\sqrt{a})^2 = a$

Для нашего случая получим

$$(\sqrt{f(x)})^2 = a^2 \text{ или } f(x) = a^2$$

$$\sqrt{x} = 2$$

$$x = 2^2$$

$$x = 4$$

$$2. \sqrt{f(x)} + \sqrt{g(x)} = 0$$

$$\text{T.e. } \begin{cases} f(x) = 0 \\ g(x) = 0 \end{cases}$$

$$\sqrt{x+2} + \sqrt{x-4} = 0$$

$$\begin{cases} x+2 = 0 \\ x-4 = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = -2 \\ x = 4 \end{cases} \text{ следовательно, решений нет}$$

Ответ: решений нет

$$3. \sqrt{f(x)} = \sqrt{g(x)}$$

$$\begin{cases} f(x) \geq 0 \\ g(x) \geq 0 \\ f(x) = g(x) \end{cases}$$

$$\sqrt{x-5} = \sqrt{2x-3}$$

1 способ:

Рассмотрим область определения
подкоренных выражений:

$$\begin{cases} x-5 \geq 0 \\ 2x-3 \geq 0 \end{cases} \quad \begin{cases} x \geq 5 \\ x \geq 1,5 \end{cases}$$

$$x - 5 = 2x - 3$$

$x = -2$, но -2 не входит в область определения функций, следовательно, решений нет

2 способ:

$$x - 5 = 2x - 3$$

$$x = -2$$

Проверка:

$$\sqrt{-2 - 5} = \sqrt{-7}, -7 < 0;$$

$$\sqrt{2(-2) - 3} = \sqrt{-7}, -7 < 0.$$

Значит, $x = -2$ - посторонний

Ответ: решений нет

Неравенство, содержащее переменную под знаком корня, называется иррациональным.

Основные типы иррациональных неравенств:

$$1. \sqrt{f(x)} > \sqrt{g(x)} \Leftrightarrow \begin{cases} g(x) \geq 0 \\ f(x) > g(x) \end{cases}$$

$$2. \sqrt{f(x)} \geq \sqrt{g(x)} \Leftrightarrow \begin{cases} g(x) \geq 0 \\ f(x) \geq g(x) \end{cases}$$

$$3. \sqrt{f(x)} < g(x) \Leftrightarrow \begin{cases} f(x) \geq 0 \\ g(x) > 0 \\ f(x) < g^2(x) \end{cases}$$

$$4. \sqrt{f(x)} \leq g(x) \Leftrightarrow \begin{cases} f(x) \geq 0 \\ g(x) \geq 0 \\ f(x) \leq g^2(x) \end{cases}$$

$$5. \sqrt{f(x)} > g(x) \Leftrightarrow \begin{cases} \begin{cases} g(x) < 0 \\ f(x) \geq 0 \end{cases} \\ \begin{cases} g(x) \geq 0 \\ f(x) > g^2(x) \end{cases} \end{cases}$$

$$6. \sqrt{f(x)} \geq g(x) \Leftrightarrow \begin{cases} \begin{cases} g(x) < 0 \\ f(x) \geq 0 \end{cases} \\ \begin{cases} g(x) \geq 0 \\ f(x) \geq g^2(x) \end{cases} \end{cases}$$

ПРИМЕРЫ

1. $\sqrt{x+12} > \sqrt{4-x}$

$$1. \quad \sqrt{x + 12} > \sqrt{4 - x}$$

$$\begin{cases} 4 - x \geq 0 \\ x + 12 > 4 - x \end{cases}$$

$$\begin{cases} x \leq 4 \\ x > -4 \end{cases}$$

Ответ: $x \in (-4; 4]$

$$2. \quad \sqrt{x+2} > x$$

$$\begin{cases} \begin{cases} x < 0, \\ x + 2 \geq 0 \end{cases} \\ \begin{cases} x \geq 0, \\ x + 2 \geq x^2 \end{cases} \end{cases}$$

$$\begin{cases} -2 \leq x < 0 \\ 0 \leq x \leq 2 \end{cases}$$

Ответ: $x \in [-2; 2]$

понятие иррационального уравнения

понятие иррационального неравенства

виды и методы решения простейших
иррациональных уравнений

методы решения иррациональных неравенств

Решить пошагово неравенство:

$$\sqrt{x+2} > x$$

$$\begin{cases} \begin{cases} x < 0 \\ x + 2 \geq 0 \end{cases} \\ \begin{cases} x \geq 0 \\ x + 2 \geq x^2 \end{cases} \end{cases}$$

$$\begin{cases} -2 \leq x < 0 \\ 0 \leq x \leq 2 \end{cases}$$

Ответ : $x \in [-2; 2]$

Решим неравенство:

$$\left(x + \frac{4}{x}\right) \left(\frac{\sqrt{x^2 - 8x + 16} - 1}{\sqrt{6-x} - 1}\right)^2 \geq 5 \left(\frac{\sqrt{x^2 - 8x + 16} - 1}{\sqrt{6-x} - 1}\right)^2$$

Решение:

Решение неравенства ищем при условиях:

$$\begin{cases} x \neq 0 \\ 6 - x \geq 0 \\ 6 - x \neq 1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x \neq 0 \\ x \leq 6 \\ x \neq 5 \end{cases}$$

Рассмотрим два случая:

1) $\sqrt{x^2 - 8x + 16} = 1$, т.е. $|x-4| = 1$ и, значит, $x = 3$ или $x = 5$.

Из этих корней нам подходит корень $x = 3$.

2) $\sqrt{x^2 - 8x + 16} \neq 1$ Разделим обе части неравенства на $\left(\frac{\sqrt{x^2 - 8x + 16} - 1}{\sqrt{6-x} - 1}\right)^2$,

получим $x + \frac{4}{x} \geq 5$, откуда $\frac{(x-1)(x-4)}{x} \geq 0$

$$\begin{cases} 0 < x \leq 1 \\ x \geq 4 \end{cases}$$

С учетом ограничений получаем, что множество решений исходного неравенства:
 $(0; 1] \cup 3 \cup [4; 5) \cup (5; 6]$.

Ответ: $(0; 1] \cup 3 \cup [4; 5) \cup (5; 6]$.