

# ОПТИЧЕСКИЕ ИНФОРМАЦИОННЫЕ ТЕХНОЛОГИИ

## ЛЕКЦИЯ №1

### Взаимодействие излучения с атомами

Астапенко В.А., д.ф.-м.н.

# Атом водорода. Формула Бальмера.

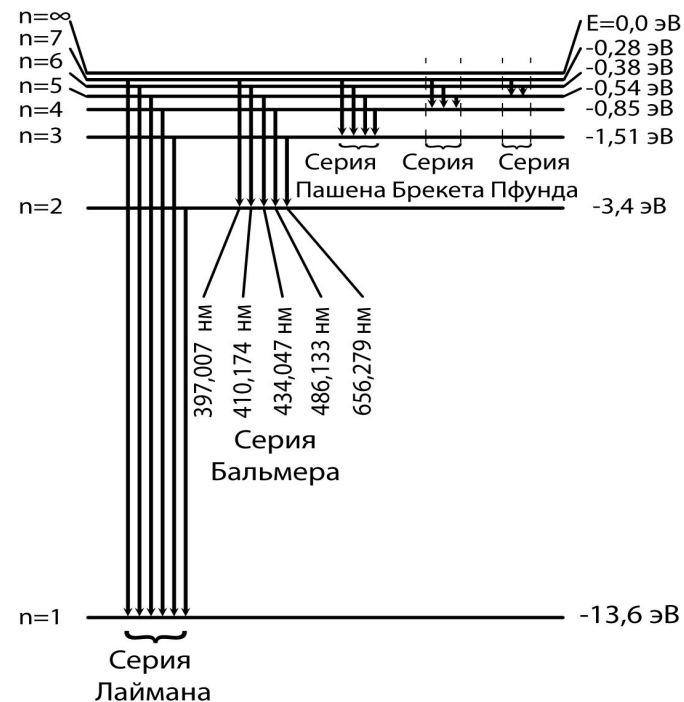
Исследование взаимодействия электромагнитного излучения с атомами началось с регистрации спектров *атома водорода*.

В результате обобщения *экспериментальных данных* в 1885 году было получено простое соотношение, с высокой степенью точности описывающее измеренные к тому времени значения длин волн атома водорода (формула Бальмера):

$$\frac{1}{\lambda_{mn}} = R \left( \frac{1}{n^2} - \frac{1}{m^2} \right) \quad \text{см } R \cong 109739 \quad -1$$

где  $m$  и  $n$  – целые числа ( $m > n$ )

Формула Бальмера стала важным экспериментальным основанием для построения теории атома водорода и установления основных закономерностей взаимодействия электромагнитного излучения с атомами.



Переходы между уровнями энергии в атоме водорода, формирующие различные серии линейчатого спектра

# Полуклассическая теория атома Н. Бора.

## Постулаты Бора.

1. Электроны в атомах находятся в особых, стационарных состояниях  $|n\rangle$ , соответствующих круговым орбитам, параметры которых определяются условием квантования момента количества движения:

$$M_n = n \hbar$$

2. В стационарных состояниях атомные электроны не излучают.

3. Излучение и поглощение электромагнитных волн происходит в результате перехода атомного электрона из одного стационарного состояния (с энергией  $E_n$ ) в другое стационарное состояние (с энергией  $E_m$ ). Круговая частота излучения (в случае  $E_n > E_m$ ) равна:

$$\omega_{mn} = \frac{E_n - E_m}{\hbar}$$

Следует отметить, что в условие квантования момента количества движения вошла постоянная Планка, использовавшаяся впервые для квантования энергии радиационного осциллятора.

# Уравнения Бора и атомные единицы.

$$(1) m_e r_n v_n = n \hbar; \quad (2) m_e \frac{v_n^2}{r_n} = \frac{Z e^2}{r_n^2}$$

$$v_n = \frac{Z e^2}{n \hbar} = \frac{Z}{n} v_a; \quad v_a = \alpha c \cong 2.188 \cdot 10^8 \text{ м/с} \quad / \quad \alpha = e^2 / \hbar c \cong 1/137$$

$$r_n = \frac{n^2 \hbar^2}{Z m_e e^2} = \frac{n^2}{Z} a_B; \quad a_B = \frac{\hbar^2}{m_e e^2} \cong 0.529 \cdot 10^{-10} \text{ м} \quad \tau_a = \frac{a_B}{v_a} = \frac{\hbar^3}{m_e e^4} \cong 1.52 \cdot 10^{-17} \text{ с}$$

$$Ry = \frac{m_e e^4}{2 \hbar^2} \cong 13.6 \text{ эВ} \quad Ry = \frac{\epsilon_a}{2}$$

$$T_n = \frac{m_e v_n^2}{2} = \frac{Z^2}{2 n^2} \frac{m_e e^4}{\hbar^2} = \frac{Z^2}{2 n^2} \alpha^2 m_e c^2; \quad U_n = -\frac{Z e^2}{r_n} = -\frac{Z^2}{n^2} \frac{m_e e^4}{\hbar^2} = -\frac{Z^2}{n^2} \alpha^2 m_e c^2$$

$$E_n = T_n + U_n = -\frac{Z^2}{2 n^2} \frac{m_e e^4}{\hbar^2} = -\frac{Z^2}{2 n^2} \alpha^2 m_e c^2$$

Определение:  $e = m_e = \hbar = 1$  – система единиц Хартри или атомная система единиц

Например, скорость света в вакууме:  $c \cong 137$  ат. ед. скорости

# Дискретный спектр энергии водородоподобного атома

$$E_n = -\frac{Z^2}{n^2} Ry$$

Целое неотрицательное число  $n$ , фигурирующее в этом равенстве, отвечает главному квантовому числу электронного состояния в последовательной квантовой теории атома водорода.

$$\omega_{mn} = \frac{Z^2 Ry}{\hbar} \left( \frac{1}{n^2} - \frac{1}{m^2} \right); \quad \frac{1}{\lambda_{mn}} = \frac{Z^2 Ry}{2\pi \hbar c} \left( \frac{1}{n^2} - \frac{1}{m^2} \right)$$

$$\text{для } Z = 1: \quad \frac{1}{\lambda_{mn}} = R \left( \frac{1}{n^2} - \frac{1}{m^2} \right), \quad \text{если положить: } R = \frac{Ry}{2\pi \hbar c}$$

Таким образом, *теория атома Бора воспроизводит экспериментальную формулу Бальмера для длин волн излучения атома водорода. Это явилось крупным успехом данной теории и, что особенно важно, подтвердило необходимость введения квантовых представлений (постоянной Планка) в микротерию вещества.*

# Принцип соответствия между классической и квантовой механикой

Вышеизложенная теория Бора является не только теорией атома водорода, но и теорией взаимодействия электромагнитного излучения с атомом, т.к. важные черты этого взаимодействия описываются 2 и 3 постулатами Бора.

Дальнейшее развитие теории взаимодействия излучения с атомами может быть осуществлено, не прибегая к последовательному квантово-электродинамическому формализму, а используя так называемый *принцип соответствия* в духе полуклассического подхода Бора. Отправной точкой такого рассмотрения является выражение для мощности дипольного излучения, известное из классической электродинамики. Оно имеет вид:

$$Q(t) = \frac{2}{3c^3} |\dot{\mathbf{d}}(t)|^2 \quad \& \quad \mathbf{d}(t) = e\mathbf{r}(t); \quad \gg a \quad \omega Q(\omega_0) = \frac{4}{3c^3} \omega_0^4 |\mathbf{d}(\omega_0)|^2$$

$$\mathbf{d}(\omega_0) \rightarrow \mathbf{d}_{mn} \equiv \langle m | \mathbf{d} | n \rangle = \int d\mathbf{r} \Psi_m^*(\mathbf{r}) \mathbf{d} \Psi_n(\mathbf{r})$$

$$\omega_0 \rightarrow \omega_{mn} = \frac{E_n - E_m}{\hbar}$$

Принцип соответствия между классической и квантовой механикой

# Мощность излучения атомного перехода

$$Q_{mn} = \frac{4\pi}{3} \frac{\omega_{mn}^4}{c^3} |\mathbf{d}_{mn}|^2 \rightarrow \frac{Q_{mn}}{\Delta E_{mn}} = \frac{4\pi}{3} \frac{\omega_{mn}^3}{c^3} |\mathbf{d}_{mn}|^2 = A_{mn} = \frac{1}{\tau_{mn}}$$

Итак, использование формулы классической электродинамики и замен дипольного момента и собственной частоты позволили получить квантовый результат для мощности излучения спектральных линий и вероятности спонтанного излучения. Это обстоятельство является отражением *принципа соответствия* между классической и квантовой физикой.

Данный принцип может быть сформулирован следующим образом. Квантово-механические выражения получаются из классических, если в последних Фурье-компоненты физических величин заменить на матричные элементы этих величин. Причем частота квантового перехода должна совпадать с частотой Фурье-компоненты.

# Спектроскопический принцип соответствия

Принцип соответствия между классической и квантовой физикой, конкретизированный для случая излучательных переходов в атоме, называется *спектроскопическим принципом соответствия*. Его можно сформулировать следующим образом.

Атом при взаимодействии с электромагнитным полем ведет себя как набор классических осцилляторов, обладающих собственными частотами, равными частотам переходов между атомными уровнями энергии.

Это значит, что каждому переходу между атомными состояниями и ставится в соответствие осциллятор с собственной частотой, определяемой по 3 постулату Бора. Назовем эти осцилляторы *осцилляторами переходов*.



# Сила осциллятора

Вклад осцилляторов переходов в отклик атома на электромагнитное воздействие пропорционален безразмерной величине, называемой *силой осциллятора*.

Сила осциллятора для перехода между состояниями дискретного спектра определяется формулой

$$f_{nj} = \frac{2m_e \omega_{nj} |\langle n | \mathbf{d} | j \rangle|^2}{3e^2 \hbar g_j}; \quad g_j f_{nj} = -g_n f_{jn}$$

$$\langle n | \mathbf{d} | j \rangle \neq 0 \text{ — дипольно-разрешенный переход; } f_{nj}^0 \neq 0$$

Сила осциллятора для переходов в атоме с увеличением энергии положительна, для переходов с уменьшением энергии - отрицательна

$$\sum_n f_{n0} + \int_{I_p}^{\infty} \frac{df_0}{d\varepsilon} d\varepsilon = 1$$

Это правило сумм для сил осциллято ра

# Силы осцилляторов для атома водорода

Начальное состояние	1s	2s	2p		3s	3p
Конечное состояние	np	np	ns	nd	np	ns
$n = 1$	0	–	-0.139	–	–	0.026
2	0.4162	0	0	–	0.141	0.145
3	0.0791	0.4349	0.014	0.696	0	0
4	0.0290	0.1028	0.0031	0.122	0.484	0.032
5	0.0139	0.0419	0.0012	0.044	0.121	0.007
6	0.0078	0.0216	0.0006	0.022	0.052	0.003
7	0.0048	0.0127	0.0003	0.012	0.027	0.002
8	0.0032	0.0081	0.0002	0.008	0.016	0.001
$\sum_{n=9}^{\infty} f_{n0}$	0.0109	0.0268	0.0007	0.023	0.048	0.002
Асимптотическая формула	$1.6 n^{-3}$	$3.7 n^{-3}$	$0.1 n^{-3}$	$3.3 n^{-3}$	$6.2 n^{-3}$	$0.3 n^{-3}$
Дискретный спектр	0.5650	0.6489	-0.119	0.928	0.707	0.121
Непрерывный спектр	0.4350	0.3511	0.008	0.183	0.293	0.010
Полная сумма	1.000	1.000	-0.111	1.111	1.000	0.111

# Взаимодействие электромагнитного поля с осциллятором перехода в атоме

$$\ddot{x}_{jn} + 2\delta_{jn}\dot{x}_{jn} + \omega_{jn}^2 x_{jn} = f_{jn} \frac{e}{m} E(t); \quad \omega_{jn} = (E_j - E_n)/\hbar$$

$$x_{jn}(t) = f_{jn} \frac{e}{m} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{E(\omega') \exp(-i\omega' t) d\omega'}{\omega_{jn}^2 - \omega'^2 - 2i\omega'\delta_{jn}} \frac{d\omega'}{2\pi} \Rightarrow \dot{x}_{jn}(t) = -i f_{jn} \frac{e}{m} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\omega' E(\omega') \exp(-i\omega' t) d\omega'}{\omega_{jn}^2 - \omega'^2 - 2i\omega'\delta_{jn}} \frac{d\omega'}{2\pi}$$

$$P(t) = \dot{x}(t) E_x(t) \rightarrow P_{jn} \equiv \langle P_{jn} \rangle = \frac{2\pi e^2}{3m} \int_0^{\infty} \frac{4\omega'^2 \delta_{jn} \rho(\omega') d\omega'}{(\omega_{jn}^2 - \omega'^2)^2 + (2\omega'\delta_{jn})^2} \approx \frac{2\pi^2 e^2}{3m} \int_0^{\infty} G_{jn}^{(h)}(\omega') \rho(\omega') d\omega'$$

$$G_{jn}^{(h)}(\omega') = \frac{(\delta_{jn}/\pi)}{(\omega_{jn} - \omega')^2 + (\delta_{jn})^2} \rightarrow (\delta_{jn} \rightarrow 0) \rightarrow \delta(\omega_{jn} - \omega'); \quad \langle \mathbf{E}(\omega) \mathbf{E}(-\omega') \rangle = (2\pi)^3 \rho(\omega) \delta(\omega - \omega')$$

$$P_{jn} = f_{jn} \frac{2\pi^2 e^2}{3m} \rho(\omega_{jn}); \quad P_{jn} = \frac{2\pi^2 e^2}{3m} f_{jn} \int_0^{\infty} G_{jn}^{(h)}(\omega') \rho(\omega') d\omega'$$

# Спектральная форма линии осциллятора перехода

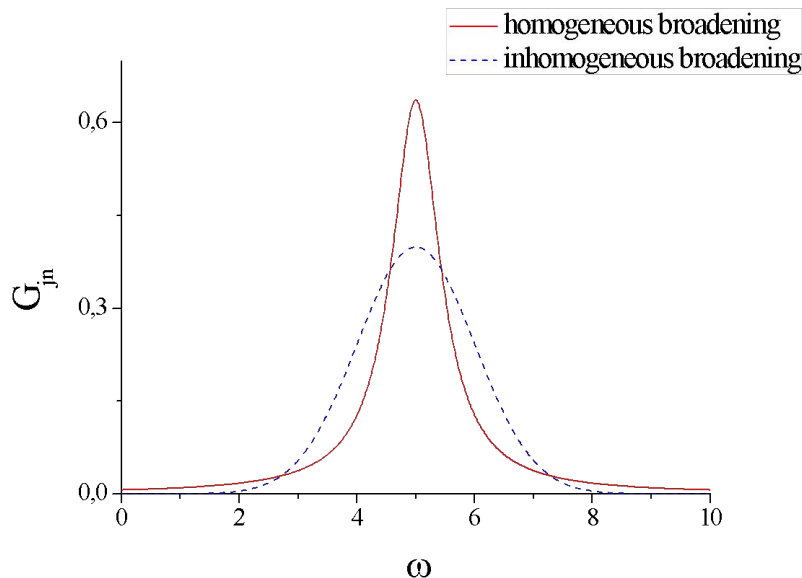
$$G_{jn}^{(h)}(\omega') = \frac{(\Delta\omega_{jn}^{(h)}/\pi)}{(\omega_{jn} - \omega')^2 + (\Delta\omega_{jn}^{(h)})^2} - \text{однородное уширение};$$

$$T_2 = \frac{2}{\Delta\omega_{jn}^{(h)}} - \text{время поперечной}$$

(необратимой) релаксации

$$G_{jn}^{(inh)}(\omega') = \frac{1}{\sqrt{2\pi} \Delta\omega_{jn}^{(inh)}} \exp\left[-\frac{(\omega' - \omega_{jn}^{(e)})^2}{2(\Delta\omega_{jn}^{(inh)})^2}\right] - \text{неоднородное уширение}$$

$$T_2^* = \frac{2}{\Delta\omega_{jn}^{(inh)}} - \text{время обратимой релаксации}$$



$$G_{jn}^{(h)}(\omega) \propto \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\omega\tau} \langle d(t)d(t+\tau) \rangle_t d\tau$$

Однородное уширение описывается лоренцевской формой линии (лоренциан).

Неоднородное уширение описывается гауссовской формой линии (гауссиан).

Однородное и неоднородное уширение спектральной линии

# Сечение радиационного перехода

$$\sigma_{jn}(\omega) = \frac{w_{jn}}{j(\omega)} - \text{сечение фотопроцесса}$$

$w_{jn}$  – вероятность в единицу времени радиационного перехода

$$j(\omega) = \frac{c E_0^2}{8\pi \hbar \omega} - \text{плотность потока фотонов в монохроматическом излучении}$$

$$w_{nj} = \frac{P_{nj}}{\hbar \omega_{nj}} \rightarrow \sigma_{jn}(\omega) = \frac{2\pi^2 e^2}{m c} f_{jn} G_{jn}^{(h)}(\omega);$$

$g_{n,j}$  – статистические веса атомных состояний

$$\sigma_{jn}(\omega) = \frac{4\pi^2 \omega_{jn}}{3 \hbar c g_n} |\langle n | \mathbf{d} | j \rangle|^2 G_{jn}^{(h)}(\omega)$$

$$A_{nj} = \frac{\Phi_{jn}^3}{3 \hbar g_j c^3} |\mathbf{d}_{jn}|^2$$

$$\sigma_{jn}^{(\max)} = \sigma_{jn}(\omega = \omega_{jn}) = \frac{8\pi}{3 \hbar c g_n} |\langle n | \mathbf{d} | j \rangle|^2 \frac{\omega_{jn}}{\Delta\omega_{jn}} \rightarrow \sigma_{jn}^{(\max)} = \frac{g_j}{2\pi g_n} \lambda_{jn}^2 \text{ если } \Delta\omega_{jn} = A_{nj}$$

# Динамическая поляризуемость атома

$$E \ll E_a = m_e^2 e^5 / \hbar^4 \cong 5.14 \cdot 10^9 \text{ В/м}$$

$$d_i(\omega) = \sum_j \beta_{ij}(\omega) E_j(\omega); \quad \beta_{ij}(\omega) = \beta(\omega) \delta_{ij} \rightarrow \mathbf{d}(\omega) = \beta(\omega) \mathbf{E}(\omega);$$

$$\mathbf{d}(t) = \int_{-\infty}^{\infty} \beta(\omega) \mathbf{E}(\omega) e^{-i\omega t} d\omega$$

(интегральное представление)

$$m \ddot{\mathbf{r}}_n + \delta_{0n} \dot{\mathbf{r}}_n + \omega_{0n}^2 \mathbf{r}_n = \frac{e}{m} f_{0n} \mathbf{E}(t)$$

$$\mathbf{d} = \sum_n \mathbf{d}_n = e \sum_n \mathbf{r}_n; \quad \mathbf{d}_\omega = e \sum_n \mathbf{r}_{n\omega}$$

$$\mathbf{r}_{n\omega} = \frac{e}{m} \frac{f_{0n}}{\omega_{0n}^2 - \omega^2 - i\omega\delta_{0n}} \mathbf{E}_\omega \rightarrow \beta(\omega) = \frac{e^2}{m} \sum_n \frac{f_{0n}}{\omega_{0n}^2 - \omega^2 - i\omega\delta_{0n}}$$

# Предельные случаи атомной поляризуемости

$$\beta_0 \equiv \beta(\omega = 0) = \frac{e^2}{m} \sum_n \frac{f_{0n}}{\omega_{0n}^2} \text{ — статическая поляризуемость атома}$$

$$\beta_\infty (\omega \gg I_p) = -\frac{e^2 N_e}{m \omega^2} \text{ — высокочастотная поляризуемость атома}$$

$$\beta_{res} (|\omega - \omega_{0n}| \leq \delta_{0n}) = \left( \frac{e^2}{2m\omega_{0n}} \right) \frac{f_{0n}}{\omega_{0n} - \omega - i\delta_{0n}/2} \text{ — резонансная поляризуемость}$$

$$\beta_{res}(\tau) = \frac{e^2 f_{0n}}{2m\omega_{0n}} (-i)\theta(\tau) \exp(-i\omega_{0n}\tau - \delta_{0n}\tau/2) \text{ —}$$

— резонансная поляризуемость во временном представлении

# Общие соотношения для динамической поляризуемости

$$\operatorname{Re}\{\beta(\omega)\} = \frac{1}{\pi} V.P. \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\operatorname{Im}\{\beta(\omega')\}}{\omega' - \omega} d\omega'; \quad \operatorname{Im}\{\beta(\omega)\} = \frac{1}{\pi} V.P. \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\operatorname{Re}\{\beta(\omega')\}}{\omega - \omega'} d\omega'$$

$$V.P. \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{f(x)}{x-a} dx = \lim_{\Delta \rightarrow 0} \left\{ \int_{-\infty}^{a-\Delta} \frac{f(x)}{x-a} dx + \int_{a+\Delta}^{+\infty} \frac{f(x)}{x-a} dx \right\}$$

$$\operatorname{Re}(\beta(\omega)) = \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{\omega' \operatorname{Im}(\beta(\omega')) - \omega \operatorname{Im}(\beta(\omega))}{\omega'^2 - \omega^2} d\omega'$$

$\operatorname{Im}(\beta(\omega)) = \frac{c}{4\pi\omega} \sigma_{ph}(\omega)$  — сечение фотопогл  $\sigma_{ph}(\omega)$  —

ощения

$$\operatorname{Re}(\beta(\omega)) = \frac{c}{2\pi^2} \int_0^{\infty} \frac{\sigma_{ph}(\omega') - \sigma_{ph}(\omega)}{\omega'^2 - \omega^2} d\omega' \rightarrow \beta(0) = \frac{c}{2\pi^2} \int_0^{\infty} \frac{\sigma_{ph}(\omega)}{\omega^2} d\omega$$

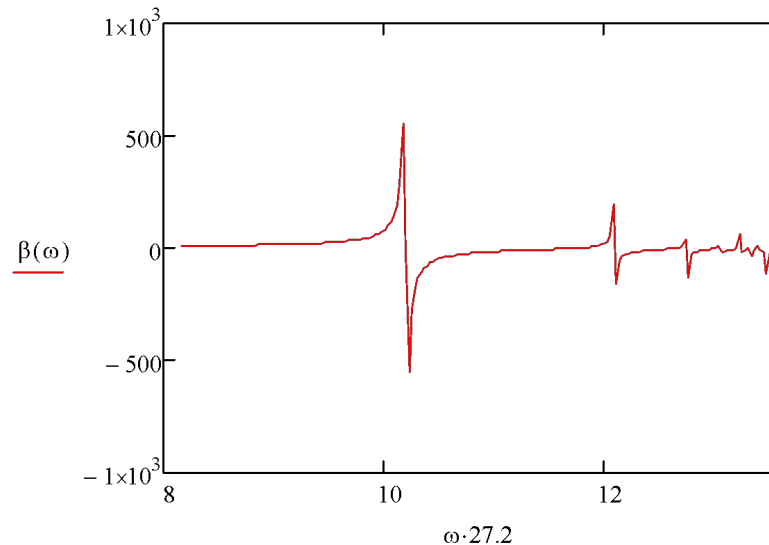
$$\frac{c}{2\pi^2} \int_0^{\infty} \sigma_{ph}(\omega) d\omega = N \text{ — правило сумм для сечения фотопоглощения}$$



# Динамическая поляризуемость водородоподобного атома

$$\beta_{1s}(\omega) \approx \frac{e^2}{m} \sum_n \frac{f_n}{\omega_n^2 - \omega^2 - i\omega \Delta\omega_n}; \quad \omega_n = Z^2 \frac{n^2 - 1}{n^2} \frac{Ry}{\hbar}; \quad f_n = n^5 \frac{2^8 (n-1)^{2n-4}}{3(n+1)^{2n+4}}$$

$$\Delta\omega_n = A_n = Z^4 \frac{2^8 n(n-1)^{2n-2}}{9(137)^3 (n+1)^{2n+2}} \frac{Ry}{\hbar}$$



*Реальная часть динамической поляризуемости основного состояния атома водорода как функция частоты. Ось абсцисс отложена в эВ, ось ординат – в атомных единицах.*

# Фотоионизация атомной оболочки

$$\sigma_{nl}(\omega) = \frac{4\pi^2 N_{nl} v_a}{3e^2 a_B \omega 137(2l+1)} \left[ \left| d_{nl,\varepsilon(l+1)} \right|^2 + \left| d_{nl,\varepsilon(l-1)} \right|^2 \right]$$

$$d_{nl,\varepsilon l'}^r = \frac{e\omega v_a}{a_B} \sqrt{(2l+1)(2l'+1)} \begin{pmatrix} l & 1 & l' \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \int_0^\infty R_{nl}(r) r R_{\varepsilon l'}(r) r^2 dr$$

$R_{nl}(r)$  радиальные волновые функции электрона

в связанном и свободном состояниях

$\begin{pmatrix} l & 1 & l' \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$  – символ, описывает правила отбора для дипольного излучения

$l' = l \pm 1$  – правило отбора по орбитальному квантовому числу

Как правило, в сечение фотоионизации дает основной вклад переход с увеличением квантового числа орбитального момента

# Водородоподобное приближение для фотоионизации (формула Зоммерфельда)

$$\sigma_{ph1s}^{H-like}(\omega) = \frac{2^9 \pi^2}{3 Z^2 137} \left( \frac{I_{1s}}{\hbar \omega} \right)^4 a_B^2 \frac{\exp(-4\zeta \operatorname{arctg} \zeta)}{1 - \exp(-2\pi \zeta)}; \quad \zeta = Z m e^2 / p \hbar; \quad p = \sqrt{2m(\hbar \omega - I_{1s})}$$

$\sigma_{1s}(\omega \text{ вблизи порога фотоионизации}) \approx \frac{2^9 \pi^2 a_B^2}{3 e^4 Z^2 137} \left( \frac{8(\hbar \omega - I_{1s})}{3 I_{1s}} \right) \approx \frac{0.23 a_B^2}{Z^2} \left( 1 - \frac{8(\hbar \omega - I_{1s})}{3 I_{1s}} \right)$

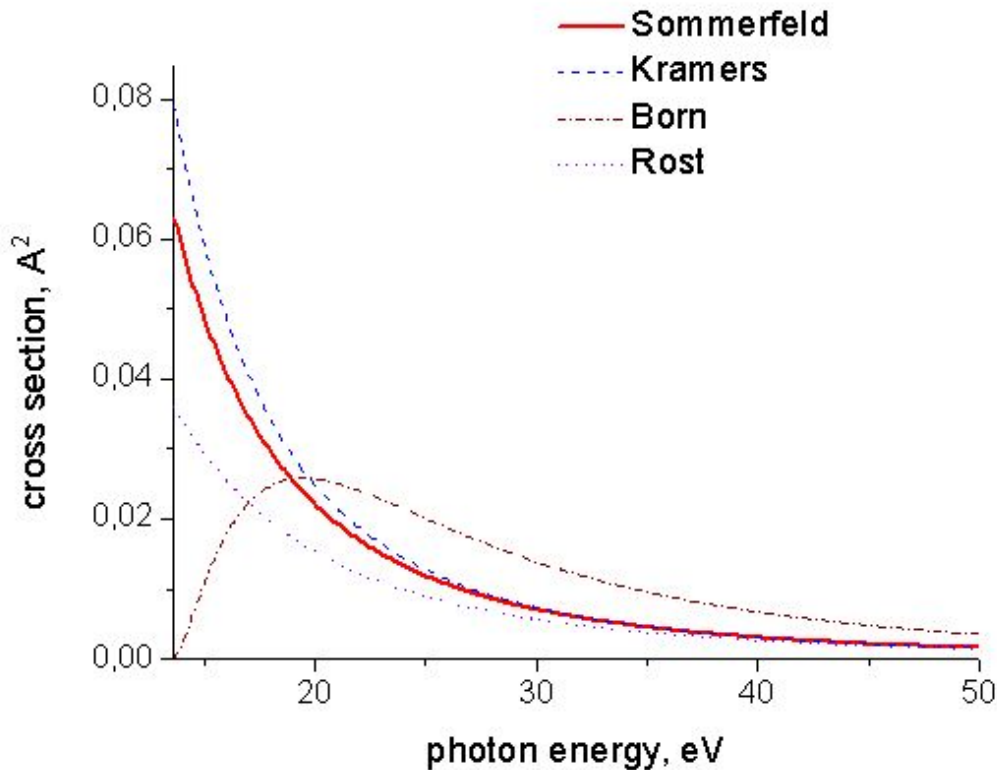
$\sigma_{ns}^{thres} = (I_{1s} / I_{ns}) \sigma_{1s}^{thres}$  – пороговое значение сечения фотоионизации и возрастает с ростом главного квантового числа.

$$\sigma_{1s}(\hbar \omega \gg I_{1s}) \approx \frac{2^8 \pi}{3} \frac{a_B^2}{Z^2 137} \left( \frac{I_{1s}}{\hbar \omega} \right)^{7/2} \left[ \frac{\sqrt{I_{1s}}}{\sqrt{\hbar \omega}} \right]$$

высокочастотное приближение

для сечения фотоионизации;  $\sigma_{nl}(\omega) \propto 1/\omega^{l+7/2}$  – для фотоионизации оболочек с  $l \neq 0$

# Сечение фотоионизации атома водорода, вычисленное в различных приближениях



$$\sigma_{nl}^{(Kr)}(\omega) = \frac{64\pi}{3\sqrt{3}} N_{nl} \frac{a_B^2}{137Z^2} \sqrt{\frac{Ry}{I_{nl}}} \left( \frac{I_{nl}}{\hbar\omega} \right)^3$$

$$\sigma_{1s}^{(B)}(\omega) = \frac{2^8 \pi}{3 \cdot 137} a_B^2 \frac{Ry}{\hbar\omega} \frac{(p(\omega)a_B/\hbar)^3}{\left[1 + (p(\omega)a_B/\hbar)^2\right]^2}$$

$$\sigma_{ph}^{(R)}(\omega) = \frac{8\pi^3 Z^2}{3 \cdot 137} a_B^5 \left( \frac{2Ry}{\hbar\omega} \right)^{7/2} n \left( r = \sqrt{\frac{a_B v_a}{\omega}} \right)$$

$n(r)$  – радиальная плотность электронов

Зоммерфельдовское, крамерсовское и борновское сечение фотоионизации основного состояния атома водорода, а также сечение в приближении Роста

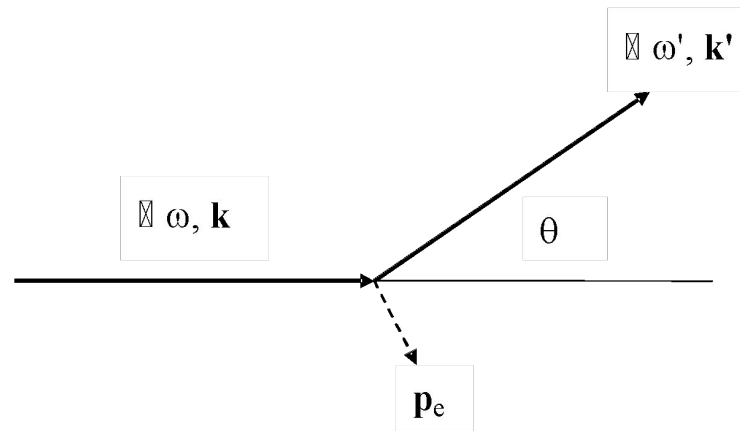
# Рассеяние фотона на свободном электроне

$$\frac{1}{\omega'} - \frac{1}{\omega} = \frac{h}{m c^2} (1 - \cos \theta)$$

$$\lambda_C = h/mc \cong 2.42 \cdot 10^{-10} \text{ м}$$

КОМПТОНОВСКАЯ ДЛИНА ВОЛНЫ

ЭЛЕКТРОНА



Рассеяние фотона на покоящемся электроне,  $\mathbf{p}_e$  – импульс отдачи электрона

$$d\sigma = \frac{r_e^2}{2} \left( \frac{\omega'}{\omega} \right)^2 \left( \frac{\omega}{\omega'} + \frac{\omega'}{\omega} - \sin^2 \theta \right)^2 \quad \text{Формула Кляйна-Нишины-Тамма}$$

$$r_e = e^2/mc^2 \cong 2.82 \cdot 10^{-13} \text{ м} \quad \text{Классический радиус электрона}$$

$$d\sigma^{Th} (\omega \ll mc^2) = \frac{1}{2} r_e^2 (\text{Формула Томсона}) \left( \frac{\omega'}{\omega} \right)^2 \Omega'$$

# Рэлеевское рассеяние излучения на атоме, интегральное по углу рассеяния

$$\sigma_i^{(Rsc)}(\omega) = \frac{8\pi}{3} \left| \frac{\omega^2}{c^2} \beta_i(\omega) \right|^2 - \text{рэлеевское рассеяние (без изменения частоты)}$$

$$\beta_{res}(|\omega - \omega_{0n}| \leq \delta_{0n}) = \left( \frac{e^2}{2m\omega_{0n}} \right) \frac{f_{0n}}{\omega_{0n} - \omega - i\delta_{0n}/2} - \text{резонансная поляризуемость}$$

$$\sigma_i^{(res.sc)}(\omega) = \frac{8\pi}{3} r_e^2 \frac{\omega_{ni}^2}{(\omega - \omega_{ni})^2 + (\delta_{ni}/2)^2} - \text{резонансное рассеяние}$$

для естественного уширения  $(\delta_{ni})_{ест} = A_{ni}$  имеем:  $\sigma_i^{(res.sc)}(\omega = \omega_{ni}) \approx \lambda_{ni}^2$

$$\sigma_i^{(Rsc)}(\omega \gg \omega_{ni}) = \frac{8\pi}{3} r_e^2 N_a^2 - \text{сечение рассеяния в высокочастотном пределе}$$

и в дипольном приближении  $\lambda \gg a_B$ ; проявляется когерентность вклада

в процесс всех электронов атома:  $\sigma_i^{(Rsc)}(\omega \gg \omega_{ni}) \propto N_a^2$

# Угловое распределение рассеянного излучения

$$\frac{d\sigma_i^{(Rsc)}(\omega \gg \omega_{ni})}{d\Omega'} = \frac{1 + \cos^2 \theta}{2} r_e^2 N_a^2 \quad \text{для } |\mathbf{r}_j| |\Delta \mathbf{k}| \ll 1$$

$$\frac{d\sigma_i^{(Rsc)}(\omega \gg \omega_{ni})}{d\Omega'} = \frac{1 + \cos^2 \theta}{2} r_e^2 |n_{ii}(\mathbf{k}' - \mathbf{k})|^2 \quad \text{— в общем случае}$$

$$n_{ii}(\Delta \mathbf{k}) \equiv F_i(\Delta \mathbf{k}) = \langle i | \sum_j \exp(i \Delta \mathbf{k} \cdot \mathbf{r}_j) | i \rangle \quad \text{— форм-фактор}$$

$$F_i(\Delta \mathbf{k}) = \frac{N_a}{1 + \Delta \mathbf{k}^2 R_a^2} \quad \text{— в приближении экспоненциальной экранировки}$$

$$F_i(|\Delta \mathbf{k}| \rightarrow 0) \rightarrow N_a \quad \text{и} \quad F_i(|\Delta \mathbf{k}| R_a \gg 1) \rightarrow 0; \quad R_a \text{ —}$$