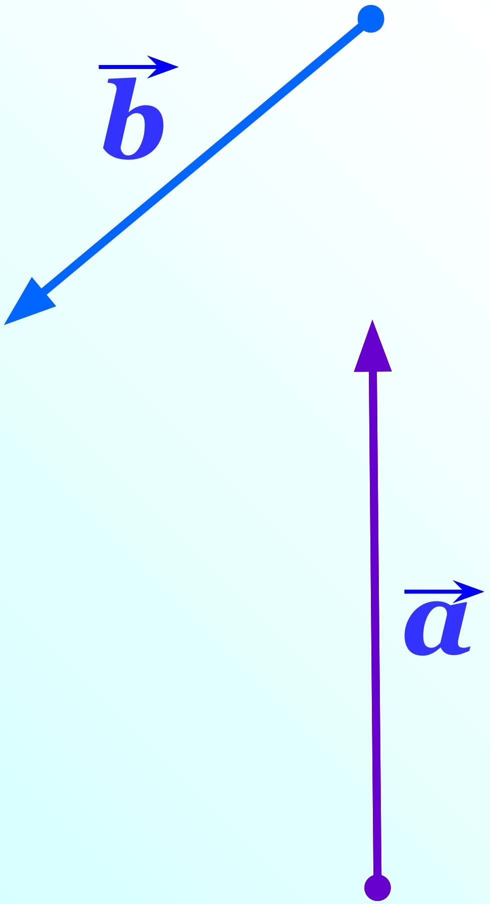
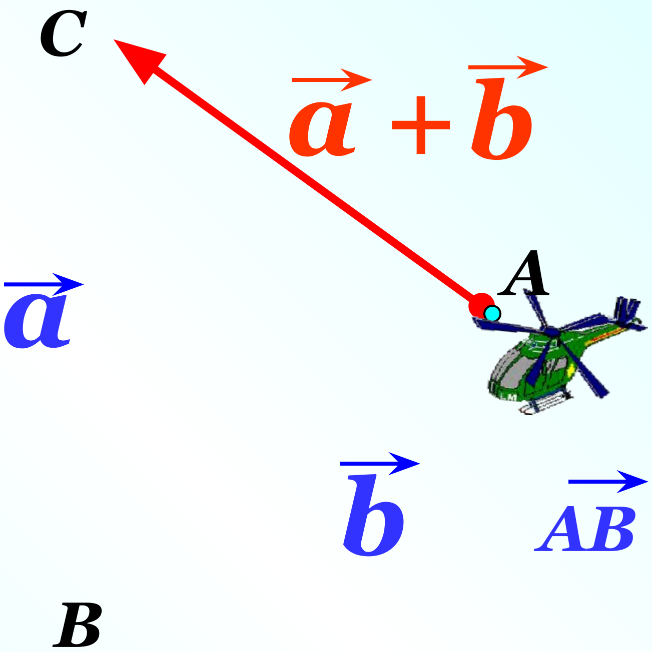
*

К л а с с н а я   р а б о т а.

Подготовка к контрольной работе.

Сложение векторов. Правило треугольника.





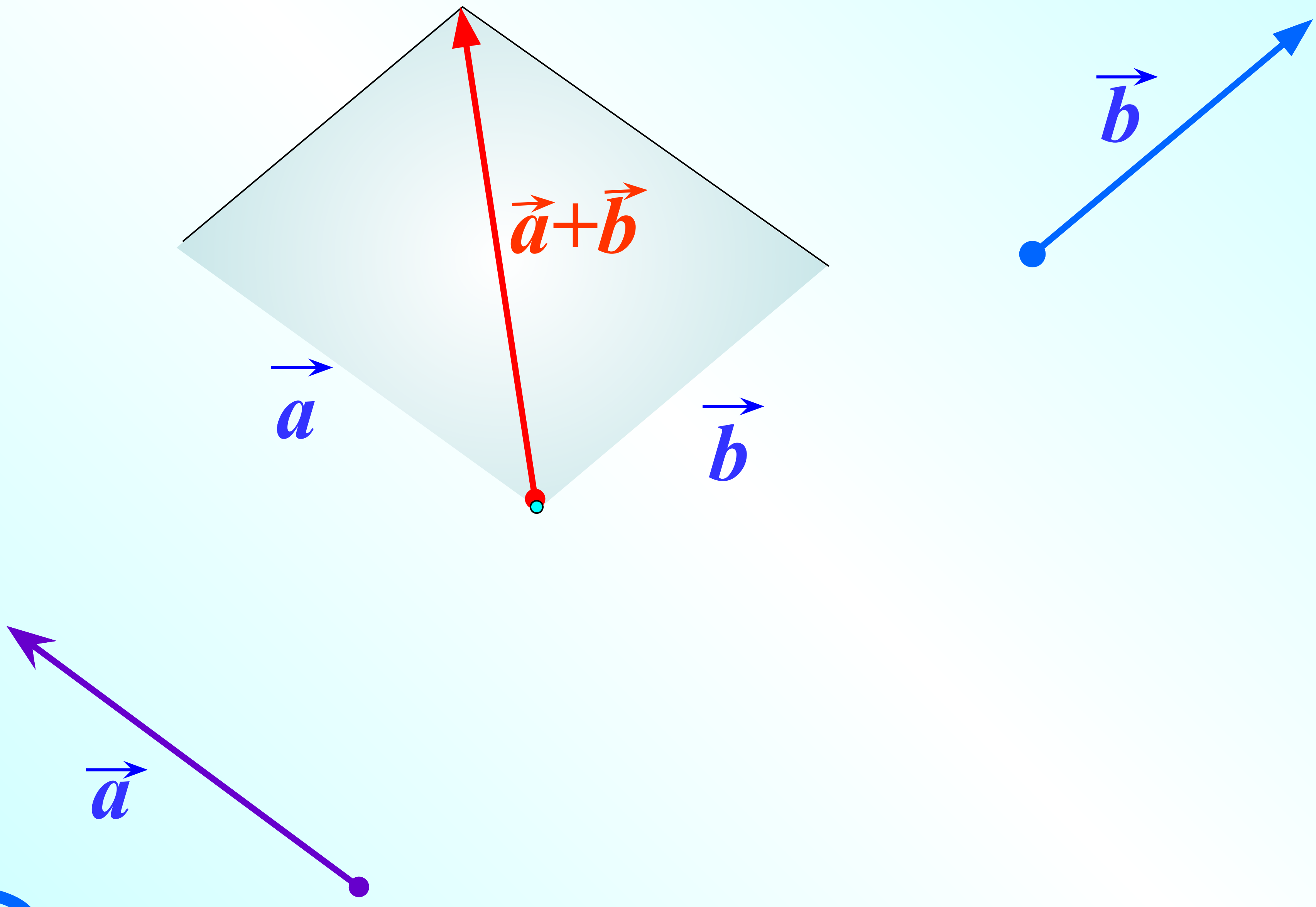
$\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC} \Leftrightarrow \overrightarrow{AC}$

Сумма векторов - ВЕКТОР!

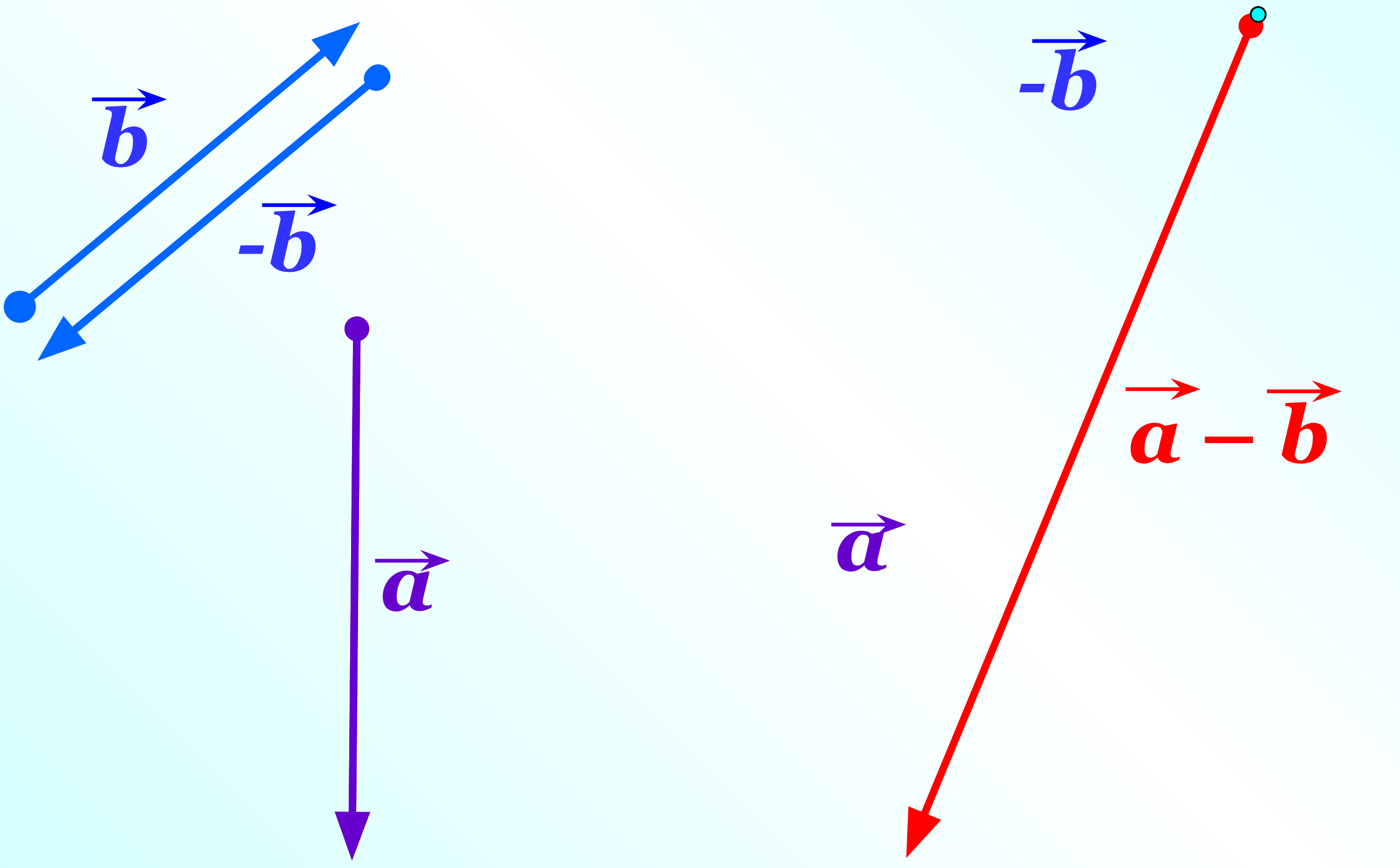
Для любого нулевого вектора справедливо равенство:

$$\vec{a}+\vec{o}=\vec{a}$$!

Сложение векторов. Правило параллелограмма.

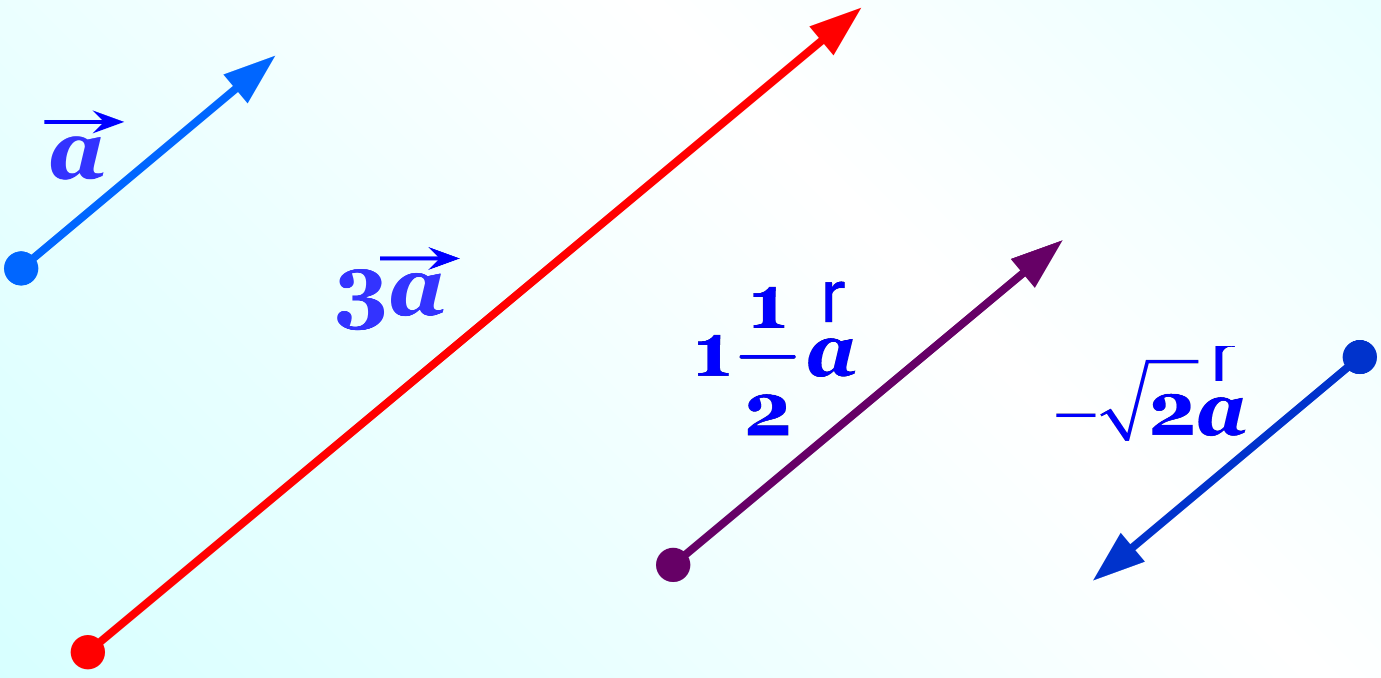


Вычитание векторов $\vec{a} - \vec{b} = \vec{a} + (-\vec{b})$

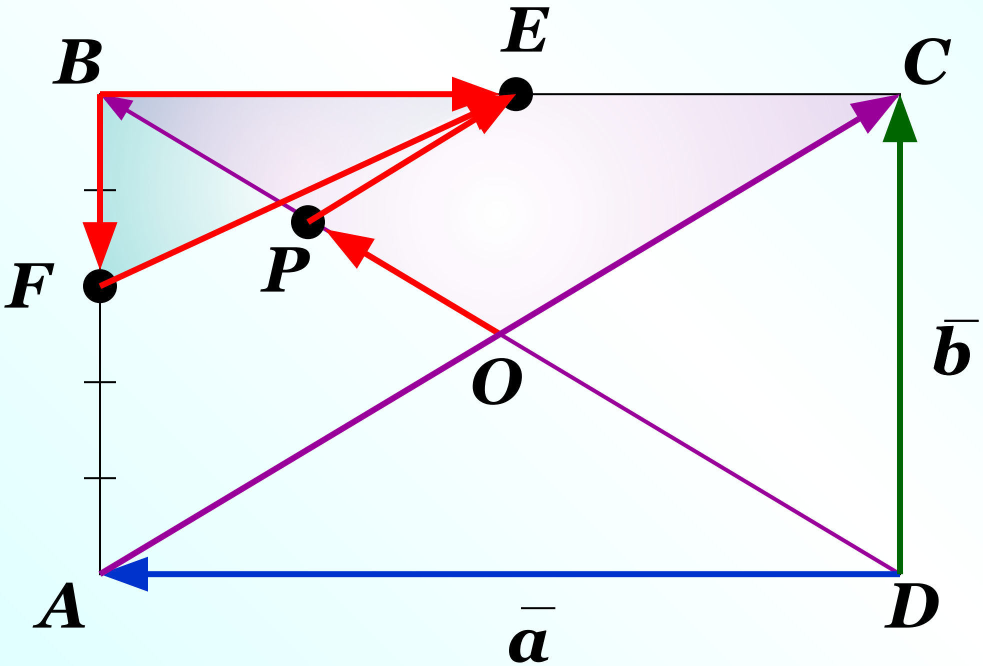


Умножение вектора на число

Произведением ненулевого вектора $\vec{a}$ на число k называется такой вектор $\vec{b}$, длина которого равна $|k|\cdot|\vec{a}|$, причём векторы a и b сонаправлены при $k \geq 0$ и противоположно направлены при $k < 0$.



Задача. *Дано:* $ABCD$ – прямоугольник, $\overrightarrow{DA} = \vec{a}$, $\overrightarrow{DC} = \vec{b}$, E – середина BC, $F \in AB$, $AF : FB = 3 : 2$, P – середина OB



$$\overrightarrow{BE} = -\frac{1}{2}\vec{a}$$

$$\overrightarrow{BF} = -\frac{2}{5}\vec{b}$$

$$\overrightarrow{OP} = \frac{1}{4}\left(\vec{a} + \vec{b}\right)$$

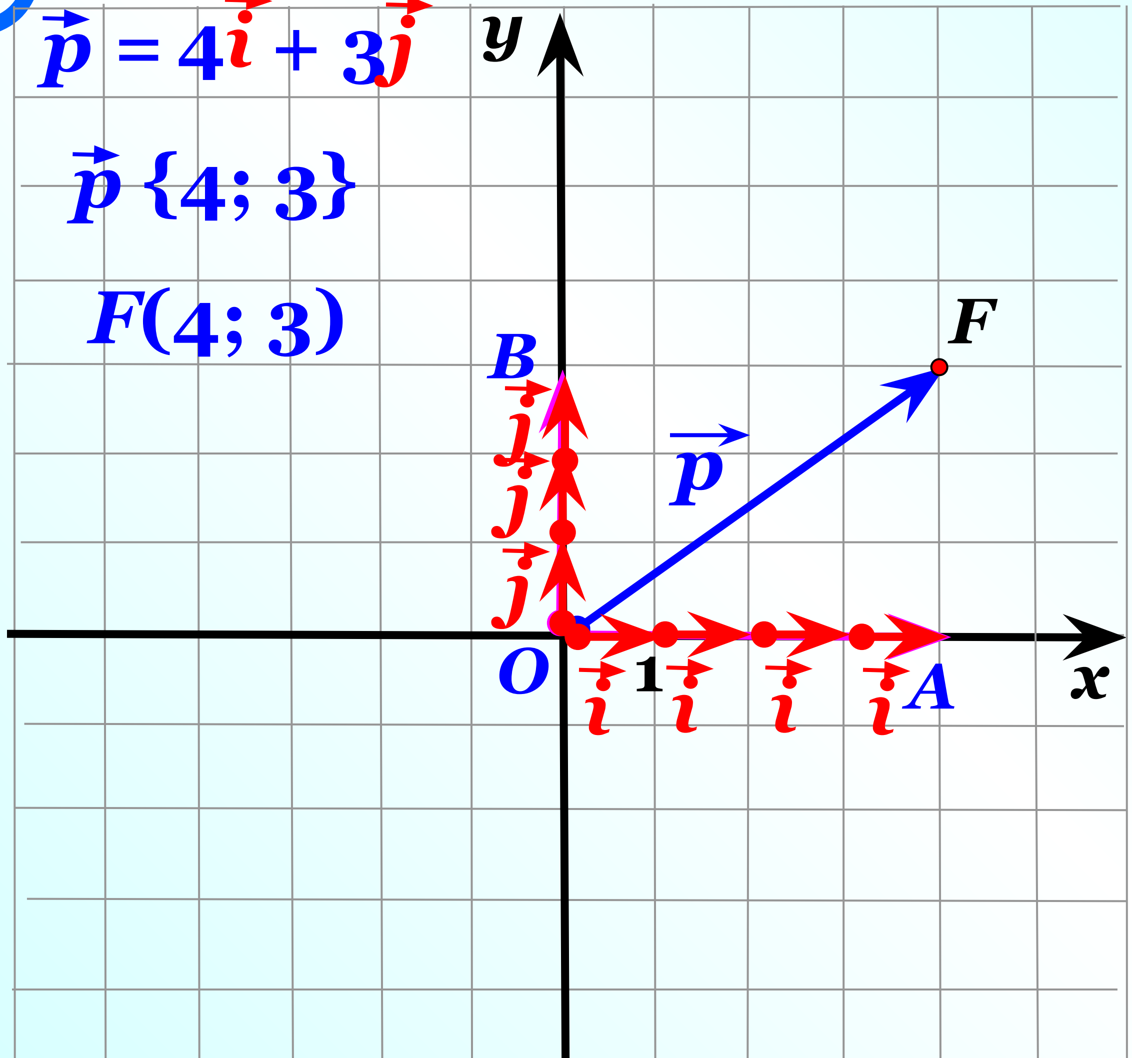
$$\overrightarrow{PE} = \frac{1}{2}\overrightarrow{OC} = \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\overrightarrow{AC} = \frac{1}{4}\left(-\vec{a} + \vec{b}\right) = \frac{1}{4}\vec{b} - \frac{1}{4}\vec{a}$$

$$\overrightarrow{FE} = \overrightarrow{FB} + \overrightarrow{BE} = \frac{2}{5}\vec{b} - \frac{1}{2}\vec{a}$$

$\vec{p} = 4\vec{i} + 3\vec{j}$

$\vec{p}\,\{4;\,3\}$

$F(4;\,3)$



$\vec{i}$ и $\vec{j}$ – координатные векторы

$|\vec{i}| = 1 \qquad |\vec{j}| = 1$

$\vec{p} = x\vec{i} + y\vec{j}$

разложение вектора по координатным векторам

$\vec{p}\,\{x;\,y\}$

координаты вектора

Координаты радиус-вектора совпадают с координатами конца вектора.

№ 926(в) Найдите координаты вектора $\vec{v}$, если:

$\vec{v} = 3\vec{a} - 2\vec{b} - \frac{1}{2}\vec{c}$, $\quad \vec{a}\{-7;\ -1\}$, $\quad \vec{b}\{-1;\ 7\}$, $\vec{c}\{4;\ -6\}$;

$$
\begin{array}{rl}
 & 3\vec{a}\{-21;\ -3\} \\
+ & -2\vec{b}\{2;\ -14\} \\
+ & -\frac{1}{2}\vec{c}\{-2;\ 3\} \\
\hline
 & \vec{v}\ \{-21;\ -14\}
\end{array}
$$

Признак коллинеарности двух векторов

Если координаты одного вектора пропорциональны координатам другого, то эти векторы коллинеарны.

$$\frac{x_1}{x_2} = \frac{y_1}{y_2} = k \longrightarrow \vec{a}\{x_1;\, y_1\} \text{ и } \vec{b}\{x_2;\, y_2\}$$ **– коллинеарны.**

Если $k > 0$, то векторы сонаправленные.

Если $k < 0$, то векторы противоположно направленные.

Пример. Коллинарны ли векторы $\vec{a}\{9;\ -15\}$ и $\vec{b}\{-3;\ 5\}$?

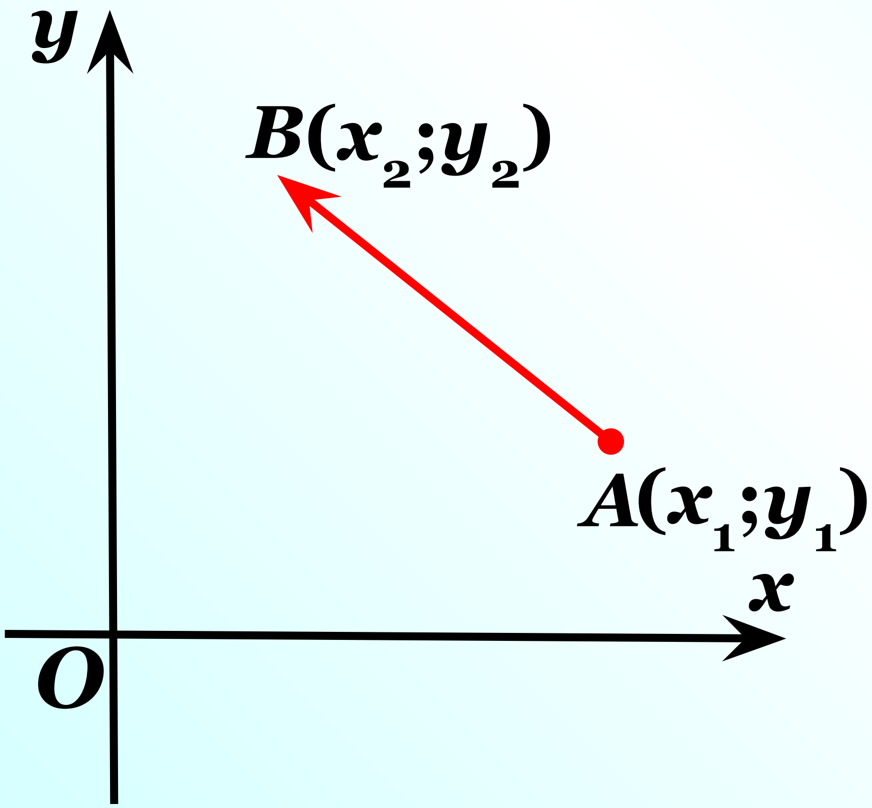
$$\frac{x_1}{x_2} = \frac{9}{-3} = -3$$

$$\frac{y_1}{y_2} = \frac{-15}{5} = -3$$

$$k = -3$$

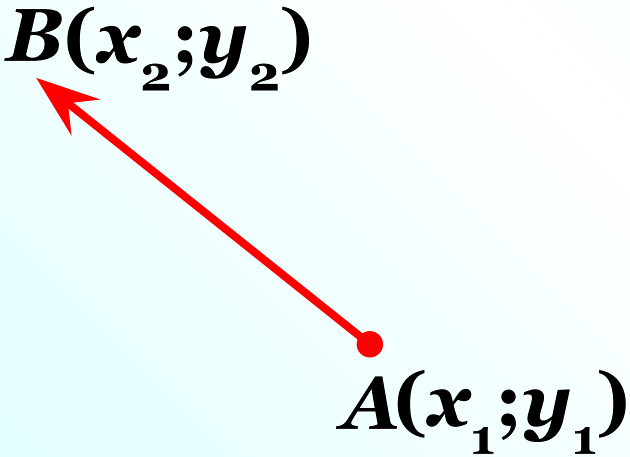
Ответ: коллинеарны, противоположно направлены.

Каждая координата вектора равна разности соответствующих координат его конца и начала.



$$\overrightarrow{AB}\{x_2 - x_1;\ y_2 - y_1\}$$

№ 934(а,б) Найдите координаты вектора $\overrightarrow{AB}$, зная координаты его начала и конца: а) $A\,(2;\ 7)$, $B\,(-2;\ 7)$; б) $A\,(-5;\ 1)$, $B\,(-5;\ 27)$; в) $A\,(-3;\ 0)$, $B\,(0;\ 4)$; г) $A\,(0;\ 3)$, $B\,(-4;\ 0)$.



$$\overrightarrow{AB}\{x_2 - x_1;\ y_2 - y_1\}$$

а) $\overrightarrow{AB}\{-2-2;\ \ 7-7\}$

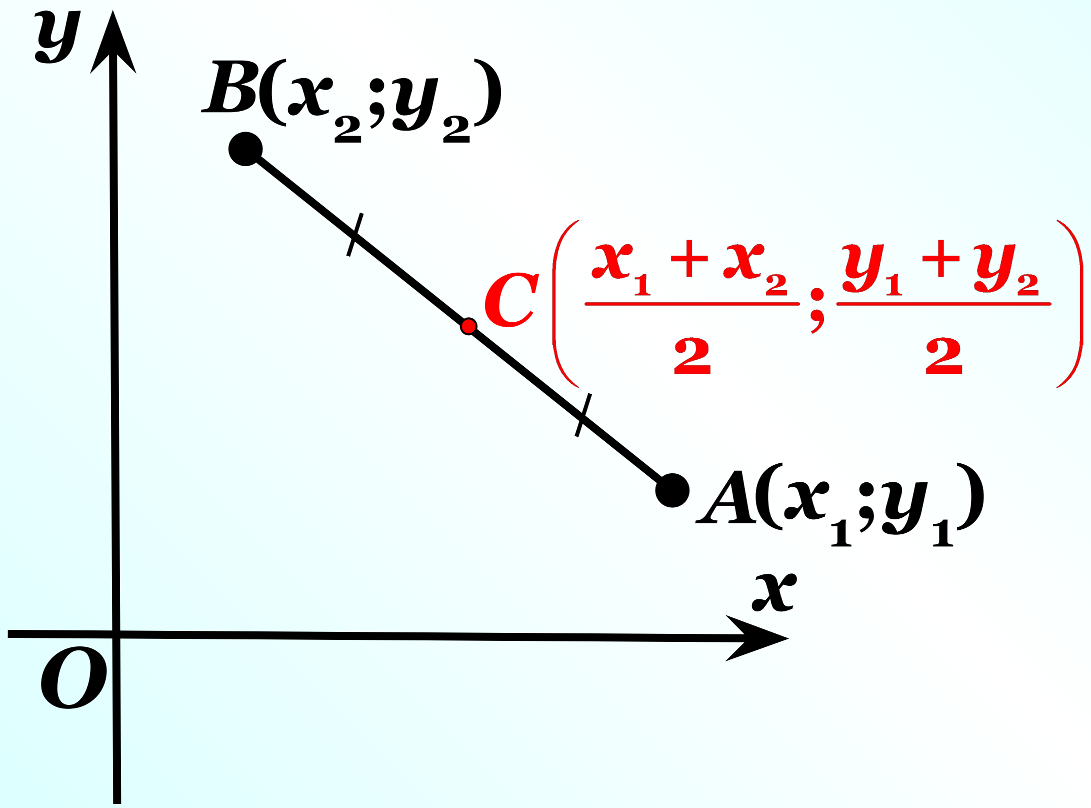
$\overrightarrow{AB}\{-4;\ 0\}$

б) $\overrightarrow{AB}\{-5+5;\ \ 27-1\}$

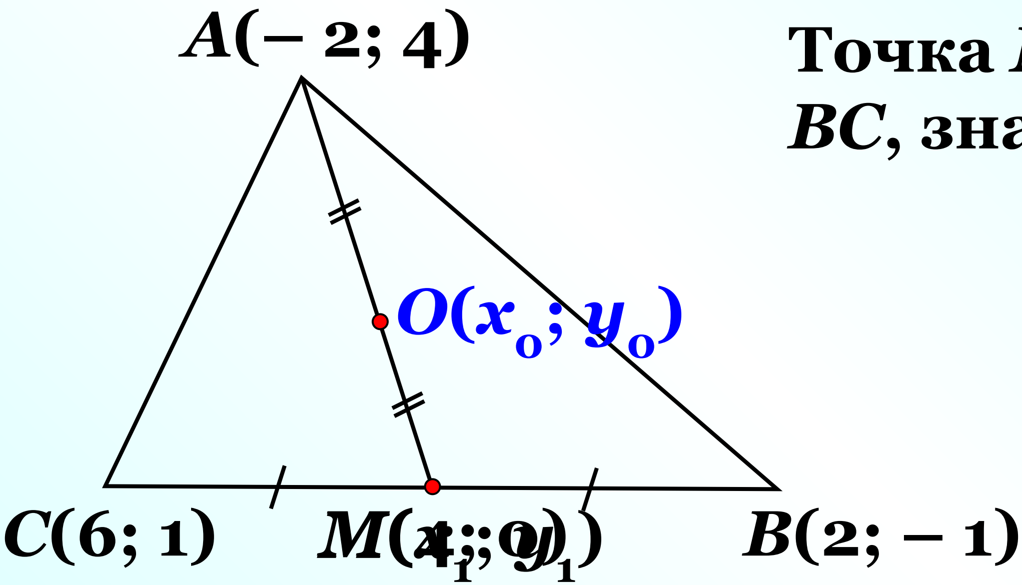
$\overrightarrow{AB}\{0;\ 26\}$

Координаты середины отрезка.

Каждая координата середины отрезка равна полусумме соответствующих координат его концов.



Задача. Найдите координаты середины медианы AM треугольника ABC, если $A(-2;\ 4)$, $B(2;\ -1)$, $C(6;\ 1)$.



Точка M – середина отрезка BC, значит

$$x_1 = \frac{6+2}{2} = 4$$

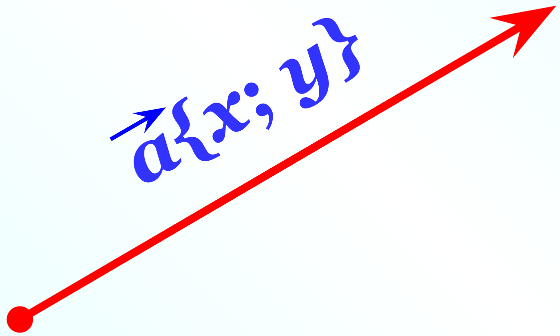
$$y_1 = \frac{1+(-1)}{2} = 0$$

Точка O – середина отрезка AM, значит

$$x_o = \frac{-2+4}{2} = 1 \qquad y_o = \frac{4+0}{2} = 2$$

***Ответ*: $O(1;\ 2)$.**

Вычисление длины вектора по его координатам.



$$|\vec{a}| = \sqrt{x^2 + y^2}$$

Задача.

Найдите длины векторов $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{AM}$, если $A\ (5;\ -3)$, $B\ (2;\ 1)$, $M\ (5;\ 3)$.

$$\overrightarrow{AB}\{2-5;\ 1-(-3)\}$$

$$\overrightarrow{AB}\{-3;\ 4\}$$

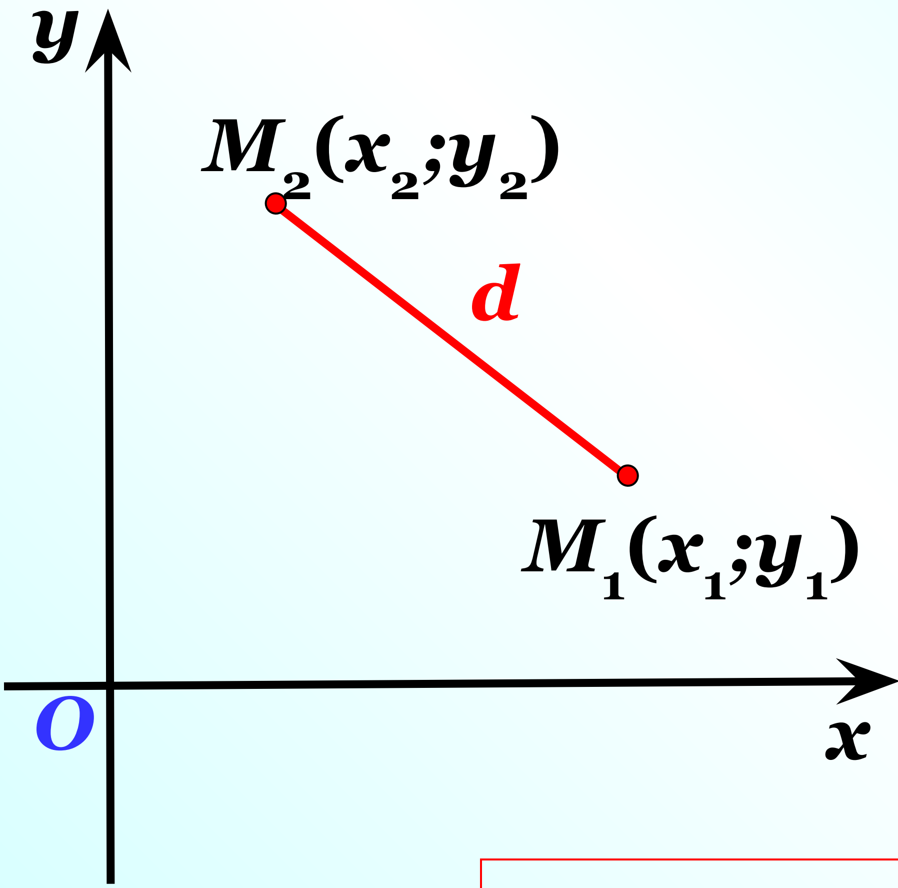
$$|\overrightarrow{AB}| = \sqrt{(-3)^2+4^2} = 5$$

$$\overrightarrow{AM}\{5-5;\ 3-(-3)\}$$

$$\overrightarrow{AM}\{0;\ 6\}$$

$$|\overrightarrow{AM}| = \sqrt{0^2+6^2} = 6$$

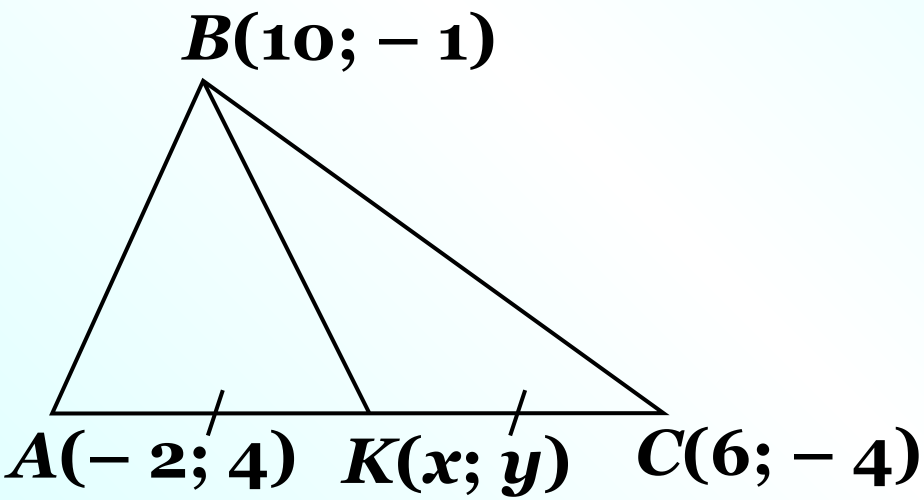
Расстояние между двумя точками.



$$d = M_1M_2 = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$$

Задача.

Найдите длины сторон AB и BC и длину медианы BK треугольника ABC, если $A(-2; 4)$, $B(10; -1)$, $C(6; -4)$.



$$K\left(\frac{-2+6}{2}; \frac{4-4}{2}\right)$$

$$K(2; 0)$$

$$AB = \sqrt{(10+2)^2 + (-1-4)^2} = \sqrt{12^2 + 5^2} = 13$$

$$BC = \sqrt{(10-6)^2 + (-1+4)^2} = \sqrt{4^2 + 3^2} = 5$$

$$BK = \sqrt{(10-2)^2 + (-1-0)^2} = \sqrt{8^2 + 1^2} = \sqrt{65}$$

Скалярное произведение векторов

$$\boxed{\vec{a}\cdot\vec{b} = |\vec{a}|\cdot|\vec{b}|\cdot\cos(\widehat{\vec{a};\vec{b}})}$$

$$\vec{a}\cdot\vec{b} = 0 \quad\Leftrightarrow\quad \vec{a}\perp\vec{b}$$

$$\vec{a}\cdot\vec{b} > 0 \quad\Leftrightarrow\quad (\widehat{\vec{a};\vec{b}}) < 90^\circ$$

$$\vec{a}\cdot\vec{b} < 0 \quad\Leftrightarrow\quad (\widehat{\vec{a};\vec{b}}) > 90^\circ$$

$$\vec{a}^2 = |\vec{a}|^2$$

Скалярное произведение векторов в координатах.

Скалярное произведение векторов

$\vec{a}\,\{x_1; y_1\}$ **и** $\vec{b}\,\{x_2; y_2\}$

выражается формулой

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = x_1 x_2 + y_1 y_2$$

Косинус угла α между ненулевыми векторами $\vec{a}\{x_1; y_1\}$ и $\vec{b}\{x_2; y_2\}$ выражается формулой:

$$\boxed{\cos\alpha = \frac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{a}|\cdot|\vec{b}|}}$$

$$\cos\alpha = \frac{x_1x_2 + y_1y_2}{\sqrt{x_1^2 + y_1^2}\cdot\sqrt{x_2^2 + y_2^2}}$$

1. Даны векторы $\vec{a}\{2; 4\}$, $\vec{b}\{-3; 6\}$ и $\vec{c}\{8; -4\}$.

1) Докажите, что вектор $\vec{a}$ перпендикулярен вектору $\vec{c}$ и не перпендикулярен вектору $\vec{b}$.

$$\vec{a} \cdot \vec{c} = 2 \cdot 8 + 4 \cdot (-4) = 16 - 16 = 0$$

Значит, $\vec{a} \perp \vec{c}$

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = 2 \cdot (-3) + 4 \cdot 6 = -6 + 24 \neq 0$$

Значит, $\vec{a}$ и $\vec{b}$ не перпендикулярны.

1. Даны векторы $\vec{a}\{2;\ 4\}$, $\vec{b}\{-3;\ 6\}$ и $\vec{c}\{8;\ -4\}$.

2) Найдите косинус угла α между векторами $\vec{b}$ и $\vec{c}$.

3) Определите, острым или тупым является угол α.

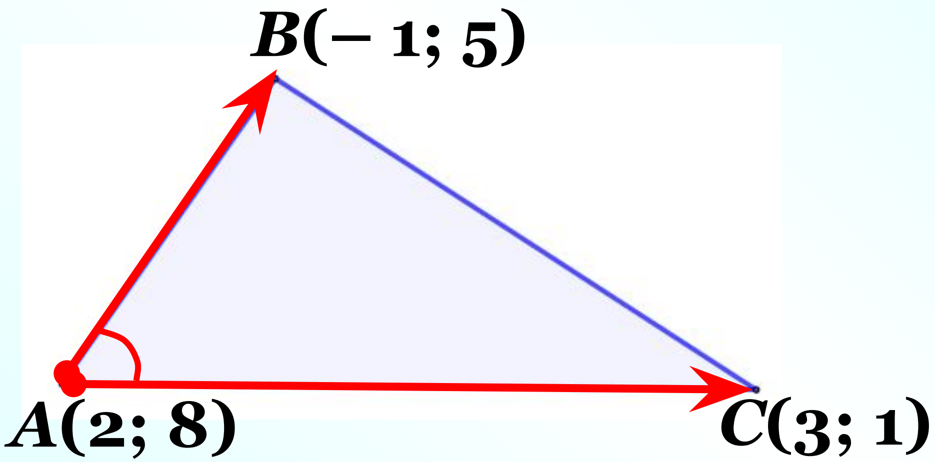
$$\boxed{\cos\alpha = \frac{\vec{b}\cdot\vec{c}}{|\vec{b}|\cdot|\vec{c}|}} = \frac{(-3)\cdot 8 + 6\cdot(-4)}{\sqrt{(-3)^2+6^2}\cdot\sqrt{8^2+(-4)^2}} =$$

$$= \frac{-48}{\sqrt{45}\cdot\sqrt{80}} = \frac{-48}{3\sqrt{5}\cdot 4\sqrt{5}} = \frac{-48}{12\cdot 5} = \frac{-8}{2\cdot 5} = -0{,}8 < 0$$

Ответ: 2) – 0,8; 3) тупой.

Проверка домашнего задания

№ 1048 Найдите косинусы углов треугольника с вершинами $A(2;\ 8)$, $B(-1;\ 5)$, $C(3;\ 1)$.



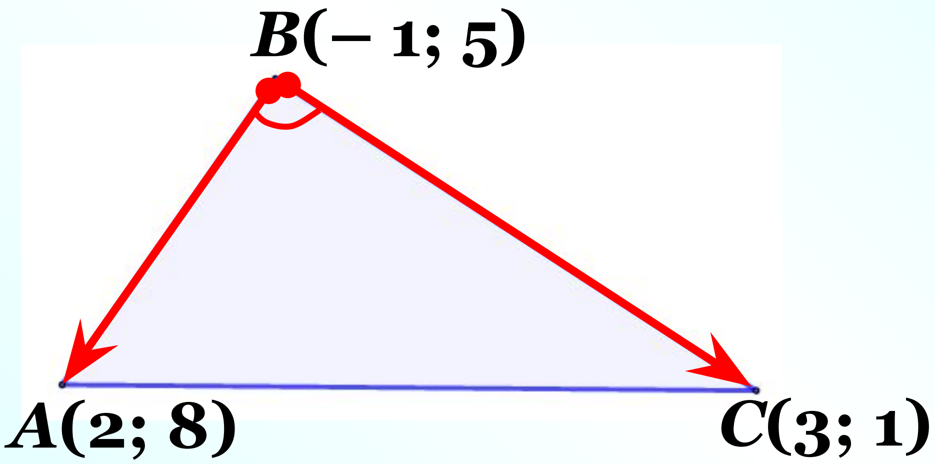
$\overrightarrow{AB}\{-3;\ -3\}$

$\overrightarrow{AC}\{1;\ -7\}$

$$\cos A = \frac{\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}}{|\overrightarrow{AB}|\cdot|\overrightarrow{AC}|} = \frac{(-3)\cdot 1 + (-3)\cdot(-7)}{\sqrt{(-3)^2+(-3)^2}\cdot\sqrt{1^2+(-7)^2}} =$$

$$= \frac{18}{3\sqrt{2}\cdot\sqrt{50}} = \frac{6}{\sqrt{100}} = \frac{6}{10} = 0{,}6$$

№ 1048 Найдите косинусы углов треугольника с вершинами $A\ (2;\ 8)$, $B\ (-1;\ 5)$, $C\ (3;\ 1)$.

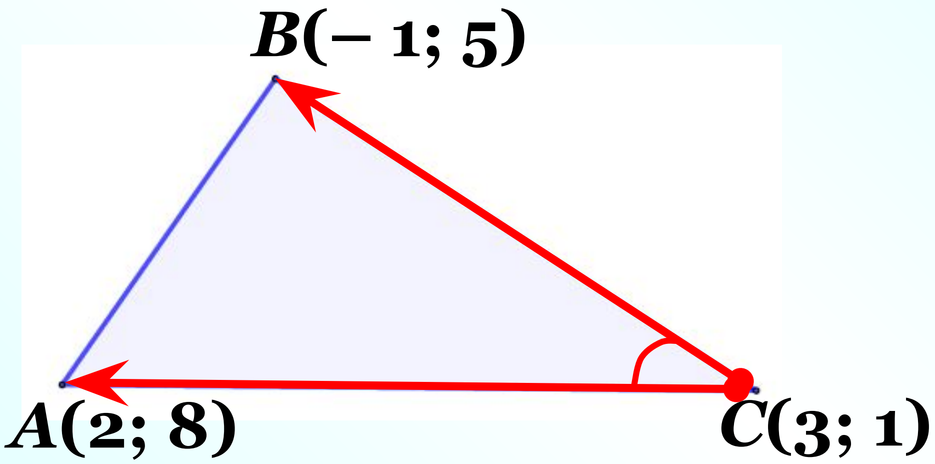


$\overrightarrow{BA}\{3;\ 3\}$

$\overrightarrow{BC}\{4;\ -4\}$

$$\cos B = \frac{\overrightarrow{BA}\cdot\overrightarrow{BC}}{|\overrightarrow{BA}|\cdot|\overrightarrow{BC}|} = \frac{3\cdot 4 + 3\cdot(-4)}{\sqrt{3^2+3^2}\cdot\sqrt{4^2+(-4)^2}} = 0$$

№ 1048 Найдите косинусы углов треугольника с вершинами $A(2;\ 8)$, $B(-1;\ 5)$, $C(3;\ 1)$.



$\overrightarrow{CB}\{-4;\ 4\}$

$\overrightarrow{CA}\{-1;\ 7\}$

$$\cos C = \frac{\overrightarrow{CB}\cdot\overrightarrow{CA}}{|\overrightarrow{CB}|\cdot|\overrightarrow{CA}|} = \frac{(-4)\cdot(-1)+4\cdot 7}{\sqrt{(-4)^2+4^2}\cdot\sqrt{(-1)^2+7^2}} =$$

$$= \frac{32}{4\sqrt{2}\cdot\sqrt{50}} = \frac{8}{\sqrt{100}} = \frac{8}{10} = 0{,}8$$

№ 1050 Вычислите $|\vec{a}+\vec{b}|$ и $|\vec{a}-\vec{b}|$, если $|\vec{a}|=5$, $|\vec{b}|=8$, $\widehat{\vec{a}\,\vec{b}}=60°$.

Скалярный квадрат вектора равен квадрату его длины.

$$\vec{a}^2 = |\vec{a}|^2$$

$$|\vec{a}+\vec{b}|^2 = (\vec{a}+\vec{b})^2 = \vec{a}^2 + 2\vec{a}\vec{b} + \vec{b}^2 =$$

$$= 5^2 + 2\cdot 5\cdot 8\cdot \cos 60^\circ + 8^2 =$$

$$= 25 + 2\cdot 40\cdot \frac{1}{2} + 64 = 129$$

$$|\vec{a}+\vec{b}| = \sqrt{129}$$

$$|\vec{a}-\vec{b}| = 7$$

№ 1052 Вычислите скалярное произведение векторов $\vec{p} = \vec{a} - \vec{b} - \vec{c}$ и $\vec{q} = \vec{a} - \vec{b} + \vec{c}$, если $|\vec{a}| = 5$, $|\vec{b}| = 2$, $|\vec{c}| = 4$ и $\vec{a} \perp \vec{b}$.

$$\vec{p} \cdot \vec{q} = (\vec{a} - \vec{b} - \vec{c}) \cdot (\vec{a} - \vec{b} + \vec{c}) =$$

$$= \vec{a}^2 - \vec{a}\vec{b} + \cancel{\vec{a}\vec{c}} - \vec{a}\vec{b} + \vec{b}^2 - \cancel{\vec{b}\vec{c}} - \cancel{\vec{a}\vec{c}} + \cancel{\vec{b}\vec{c}} - \vec{c}^2 =$$

$$= \vec{a}^2 - 2\overset{0}{\vec{a}\vec{b}} + \vec{b}^2 - \vec{c}^2 = 25 - 16 + 4 = 13$$

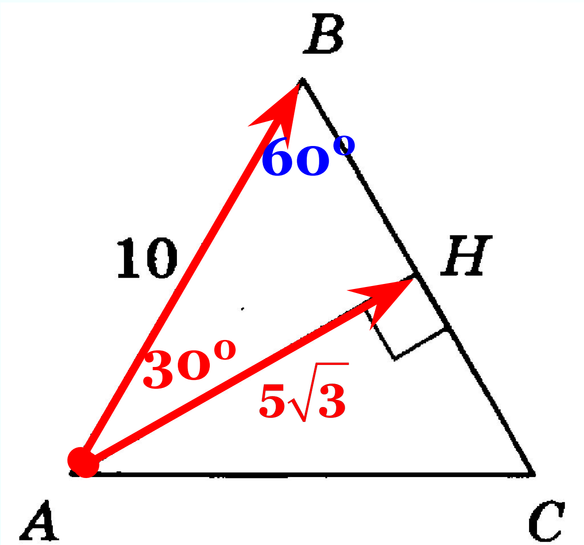
№ 1053

Вычислите скалярное произведение векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$, если $\vec{a} = 3\vec{p} - 2\vec{q}$ и $\vec{b} = \vec{p} + 4\vec{q}$, где $\vec{p}$ и $\vec{q}$ — единичные взаимно перпендикулярные векторы.

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = (3\vec{p} - 2\vec{q}) \cdot (\vec{p} + 4\vec{q}) =$$

$$= 3\vec{p}^2 + 12\vec{p}\vec{q} - 2\vec{p}\vec{q} - 8\vec{q}^2 = 3 - 8 = -5$$

Используя данные, указанные на рисунке, найдите скалярное произведение векторов $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{AH}$, если ΔABC равносторонний.



$$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AH} = \cos 30^{\circ}\; 5\sqrt{3}\cdot \quad = 50\cdot\sqrt{3}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2} = 75$$

Ответ: 75.