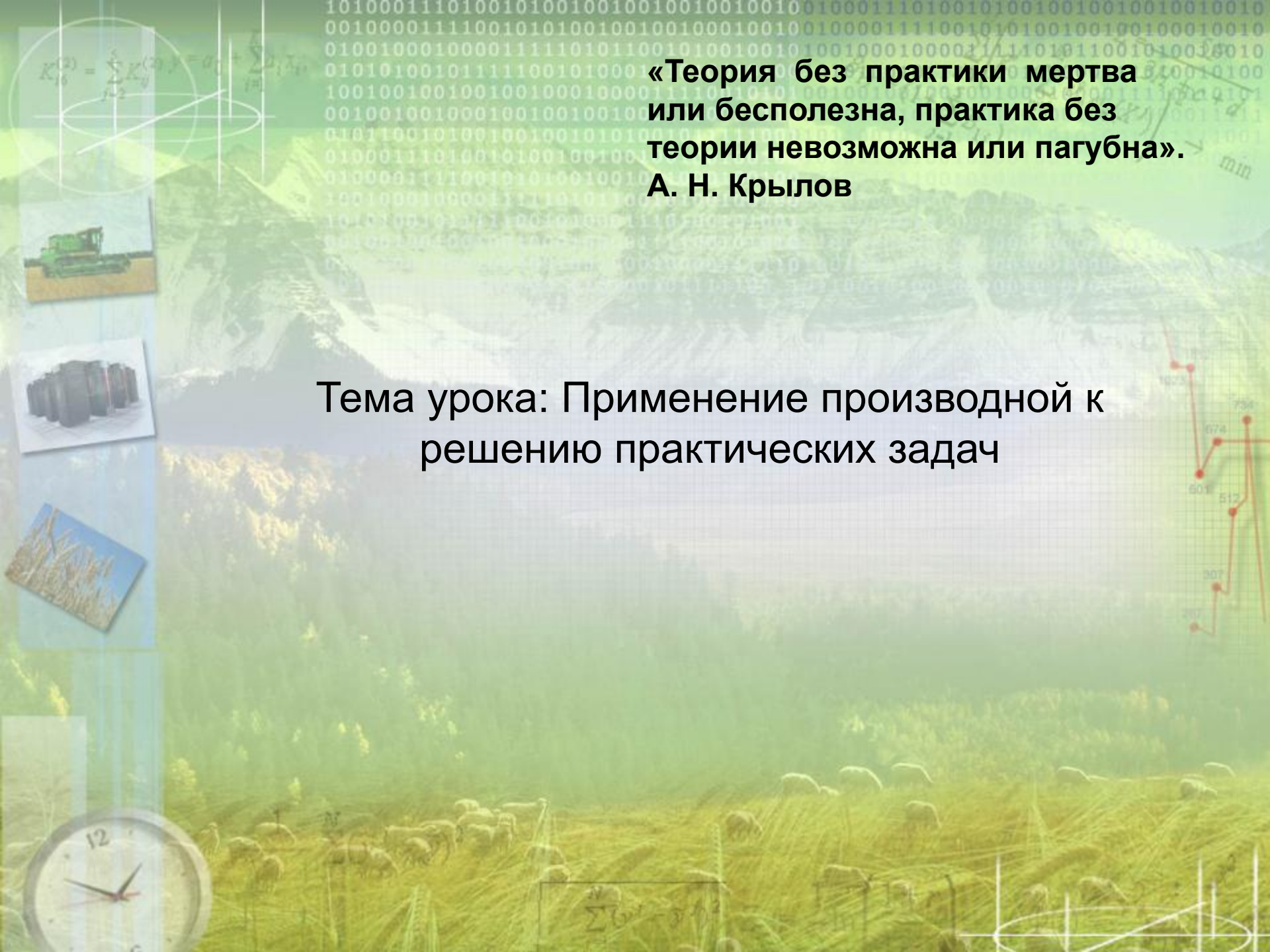


**«Теория без практики мертва  
или бесполезна, практика без  
теории невозможна или пагубна».**  
А. Н. Крылов

Тема урока: Применение производной к  
решению практических задач



## ***• Воспитательная работа:***

1. Расширение кругозора и познавательной деятельности учащихся
2. Развитие логического мышления и умение применять свои знания

## ***• Техническое обеспечение:***

1. Интерактивная доска
2. Компьютер
3. Диск

- **обобщить и закрепить применение техники дифференцирования**
- **учить работать с теоретическими вопросами темы**
- **обобщить, систематизировать знания о производной**





**На практике часто решают вопросы на оптимизацию, на выбор наилучшего результата:**

**-организовать производство так, чтобы выпускать больше продукции,**

**-разработать прибор для космического корабля таким, чтобы его масса была наименьшей;**

**-построить сооружения таким образом, чтобы их устойчивость и прочность была наибольшей.**



**На уроке мы рассмотрим некоторые задачи и разберём их решение.**

# *Повторение основных понятий:*

*1. Вспомним основное определение  
производной?*

*2. Геометрический смысл производной ?*

*3. Физический смысл производной ?*



## ПРОИЗВОДНАЯ

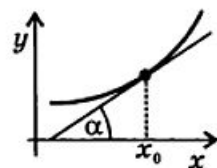
Производной функции  $f(x)$  в точке  $x_0$  называется предел отношения приращения функции  $\Delta f = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)$  к приращению аргумента  $\Delta x$  при  $\Delta x \rightarrow 0$ , если этот предел существует:

$$f'(x_0) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}$$

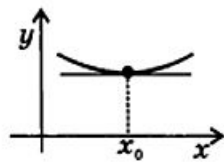
Пример:  $(x^2)' = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{(x + \Delta x)^2 - x^2}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} (2x + \Delta x) = 2x.$

## ГЕОМЕТРИЧЕСКИЙ СМЫСЛ ПРОИЗВОДНОЙ

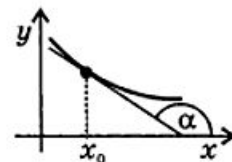
Производная в точке  $x_0$  равна угловому коэффициенту касательной к графику функции  $y = f(x)$  в этой точке:



$$f'(x_0) = \operatorname{tg} \alpha > 0$$



$$f'(x_0) = \operatorname{tg} \alpha = 0$$



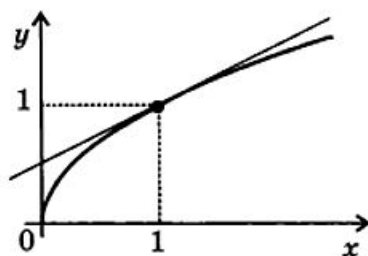
$$f'(x_0) = \operatorname{tg} \alpha < 0$$

## УРАВНЕНИЕ КАСАТЕЛЬНОЙ

к графику функции  $y = f(x)$  в точке  $x_0$ :

$$y = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$$

Пример. Нахождение уравнения касательной к графику функции  $f(x) = \sqrt{x}$  в точке  $x_0 = 1$ :



1.  $f(x_0) = f(1) = 1$

2.  $f'(x) = (\sqrt{x})' = \frac{1}{2\sqrt{x}}$

3.  $f'(x_0) = f'(1) = \frac{1}{2}$

4.  $y = 1 + \frac{1}{2}(x - 1) = \frac{1}{2}x + \frac{1}{2}$



## Физический ( механический ) смысл производной

Если при прямолинейном движении путь  $s$ , пройденный точкой, есть функция от времени  $t$ , т.е.  $s = s(t)$ , то **скорость** точки есть **производная** от пути по времени, т.е.  $v(t) = s'(t)$ .  
**Производная** выражает **мгновенную скорость** в момент времени  $t$ .

**Задача №1.** Два тела движутся прямолинейно: одно по закону  $s = t^3 + t^2 - 27t$ , другое — по закону  $s = t^2 + 1$ . Определить момент, когда скорости этих тел окажутся равными



# Применение производной к исследованию функций

- Признак возрастания (убывания) функции
- Критические точки функции, максимумы и минимумы
- Наибольшее и наименьшее значения функции
- Касательная к графику функции. Уравнение касательной.

**Задача №2 Написать уравнение касательной в точке  $X=1$ :**

$$Y = X^3 - X^2 - 2.$$

*Заметим, что при определении касательной к кривой и нахождении мгновенной скорости неравномерного движения, по существу, выполняются одни и те же математические операции:*

-Заданному значению аргумента дают приращение и вычисляют новое значение функции, соответствующее новому значению аргумента.

-Определяют приращение функции, соответствующее выбранному приращению аргумента.


-Приращение функции делят на приращение аргумента.

-Вычисляют предел этого отношения при условии, что приращение аргумента стремится к нулю.

Минутка релаксацији:







Производная – одно из фундаментальных понятий математики.  
Умение решать задачи с применением производной требует хорошего знания теоретического материала, **умения проводить исследование различных ситуаций.**

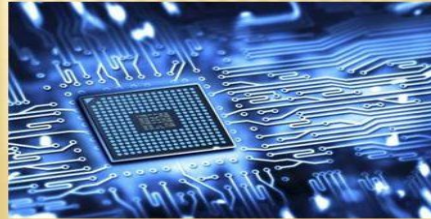
## В ЭЛЕКТРОТЕХНИКЕ

Количественной характеристикой электрического тока является сила тока.

В цепи электрического тока электрический заряд меняется с течением времени по закону  $q=q(t)$ . Сила тока есть производная заряда  $q$  по времени.



$$I=q'(t)$$



Так как в практических приложениях обычно интересует не только сама функция, но и скорость ее изменения, то производная, будучи характеристикой скорости изменения, функции, имеет самые широкие практические применения в вопросах физики, химии, геометрии и т. д.

**Задача 3.** Количество электричества, протекающего через тело Человека при замыкании электрической цепи, задаётся формулой  $q(t) = 13t^2 + 4t + 1$  (Кл).  
Найдите силу тока опасного для человека в момент времени  $t = 1$  с.

Сила тока есть производная  $I = q'(t)$   
где  $\Delta q$  – положительный электрический заряд, переносимый через сечение проводника за время  $\Delta t$ .

№4 Тело массой 8 кг движется прямолинейно по закону  $s = 2t^2 + 3t - 1$ . Найти кинетическую энергию тела ( $E = mv^2/2$ ) через 3 секунды после начала движения.

**Решение:**

Найдем скорость движения тела в любой момент времени:

$$V = ds / dt = 4t + 3$$

Вычислим скорость тела в момент времени  $t = 3$ :

$$V_{t=3} = 4 * 3 + 3 = 15 \text{ (м/с)}.$$

Определим кинетическую энергию тела в момент времени  $t = 3$ :

$$mv^2/2 = 8 * 15^2 / 2 = 900 \text{ (Дж)}.$$





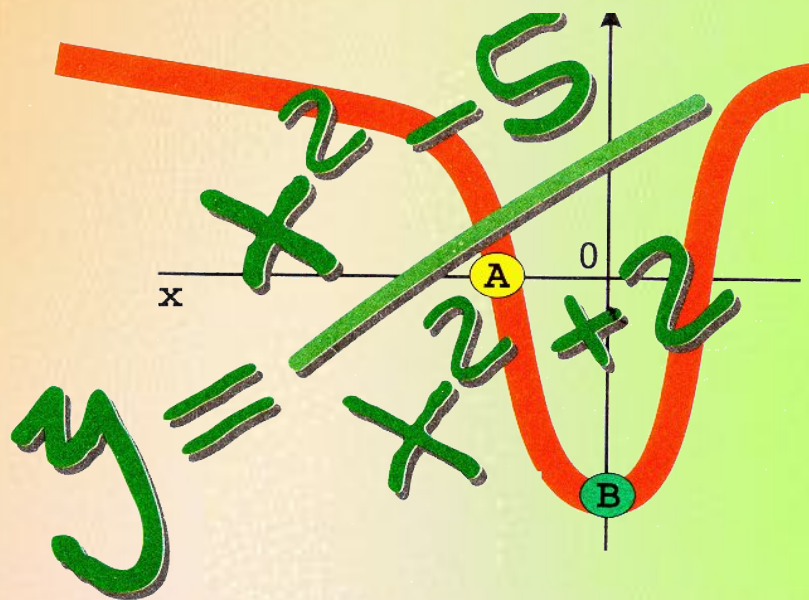
## Самостоятельная работа:

**Задача 5.** Количество электричества, протекающего через тело человека при замыкании электрической цепи, задаётся формулой  $q(t) = 4t^2 + 11,2t$  (Кл).

Найдите силу тока не опасного для человека в момент времени  $t = 1$  с?

# Применение производной в в разных областях науки, техники и жизни

Дифференциальное исчисление- это описание окружающего нас мира, выполненное на математическом языке. Производная помогает нам успешно решать не только математические задачи, но и задачи практического характера в разных областях науки, техники и жизни. <https://scienceforum.ru/2016/article/2016026525>



# Применение производной

Формула производной встречается ещё в 15 веке. Великий итальянский математик **Тартальи**, рассматривая и развивая вопрос - на сколько зависит дальность полёта снаряда от наклона орудия - применяет её в своих трудах.

Формула производной часто встречается в работах известных математиков 17 века. Её применяют Ньютон и Лейбниц.

Посвящает целый трактат о роли производной в математике известный учёный Галилео Галилей. Затем производная и различные изложения с её применением стали встречаться в работах Декарта, французского математика Роберваля и англичанина Грегори. Большой вклад по изучению производной внесли такие умы, как Лопиталь, Бернулли, Лангранж и др.

<https://scienceforum.ru/2016/article/2016026525>





# Задача № 4

Из круглого бревна диаметром  $d$  требуется вырезать стойку прямоугольного сечения с наибольшей площадью. Наибольшая площадь сечения балки необходима для использования большей нагрузки.

**Пояснения к задаче:**

## **Стойка в строительстве**

Стойка - это вертикальная или наклонная конструкция в

проектировании строительных объектов и строительстве, означающее [колонну](#).

Применяют деревянные стойки при строительстве различных сельскохозяйственных

сооружений, деревянных домов, складов и временных сооружений. Также деревянные

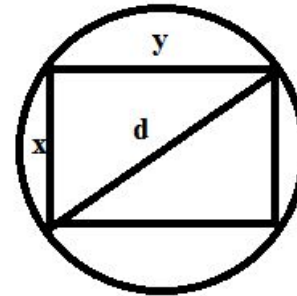
стойки нашли широкое применение как опоры для опалубки при возведении монолитных

железобетонных конструкций и др.



## Решение

1) Представим математическую модель



2) Введём переменные:  $x$  - ширина,  $y$  - длина прямоугольника.  
Выразим  $y$

через  $x$  по теореме Пифагора:

3) Выразим площадь прямоугольника  $S = x \cdot y = x \cdot \sqrt{d^2 - x^2}$



4) Найдём производную площади:  $S' =$

5) Определим критические точки  $S' = 0$

6) В точке производная меняет знак с "+" на "-", следовательно это

точка максимума. В этой точке площадь прямоугольника будет наибольшей.

Ответ:

Сечение балки должно быть квадратом со стороной .



Ответ:

Сечение балки должно быть квадратом со стороной .





Вопрос: Какой порядок действий мы использовали для нахождения  
наибольшего значения величины?

При решении задач на нахождение наибольшего (наименьшего) значения придерживались следующего порядка действий:

- 1) вводили переменную;
- 2) выражали через эту переменную и известные данные величину, наибольшее значение которой необходимо найти, вводили функцию (площадь прямоугольника);
- 3) определяли наибольшее значение введённой функции.



## Задача № 6.

Для хранения строительных материалов необходимо сделать временное хранилище в форме сварного каркаса, накрытого брезентом. Для изготовления каркаса, имеющего форму правильной четырёхугольной призмы, имеется 36 м металлического прута. Какую необходимо выбрать длину, ширину и высоту каркаса, чтобы под навес уместилось как можно больше строительных материалов?

## Решение:



*Применение пространственного каркаса в строительстве получило широкую популярность благодаря преимуществам технологии. Она позволяет сэкономить ресурсы и время на возведение конструкции.*

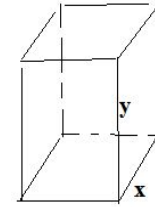
*Каркасы значительно улучшают крепость железобетонных строений, придают им большую жесткость.*

*Такое армирование предотвращает появление трещин, сколов, деформации. Виды каркасов зависят от способа производства и диаметра [металлических прутьев](#), которые используются. [Легкий каркас](#) изготавливается из стержней диаметром от 3 мм, а тяжелый – свыше 12 мм. Производятся они с помощью дуговой или точечной сварки.*

*Пространственный каркас использовать гораздо дешевле, чем плоский. Экономия достигается за счет меньшего количества используемой стали. При этом жесткость конструкции с объемным каркасом не уступает строению с плоским.*

1) Представим математическую модель.

2) Введём переменные:  $x$  - сторона квадрата,  $y$  - высота каркаса.



3) На весь каркас расходуется 36 м металлического прута:

$$36 = 8x + 4y, \quad 9 = 2x + y, \quad y = 9 - 2x.$$

4) Выразим объём четырёхугольной призмы:  $V = a^2 y = x^2 (9 - 2x) = 9x^2 - 2x^3$ .

5) Находим производную объёма:  $V' = (9x^2 - 2x^3)' = 18x - 6x^2$

6) Определяем критические точки:  $V' = 0$ ,  $18x - 6x^2 = 0$ ,  $3x(6 - 2x) = 0$ ,  $x = 0$  и  $x = 3$ .

$x = 0$  не подходит по смыслу задачи, используем  $x = 3$ .

7) Производная в точке  $x = 3$  меняет знак с "+" на "-", следовательно это точка максимума. В этой точке объём призмы будет наибольшим.

$$y = 9 - 2 \cdot 3 = 3, \quad V = a^2 y = 3^2 \cdot 3 = 27 \text{ м}^3.$$

Ответ: Каркас для навеса должен иметь форму куба с длиной 3 м.

## Самостоятельная работа

*1 вариант:*

Каковы должны быть стороны прямоугольного участка с периметром 120 м, чтобы площадь этого участка была наибольшей?

*2 вариант:*

Прямоугольный участок земли площадью 4 га огораживается забором. Каковы должны быть размеры участка, чтобы площадь была наименьшей?

*3 вариант:*

Проволочной сеткой длиной 240 м надо огородить прямоугольный участок земли.

Какие размеры должен иметь участок, чтобы его площадь была наибольшей?

*4 вариант:*

Из квадратного листа картона со стороной  $a$  нужно сделать открытую

сверху коробку прямоугольной формы, вырезав по краям квадраты и загнув образовавшиеся

края (рисунок). Какой должна быть высота коробки, чтобы её объём был наибольшим?



№8 Тело, масса которого 30 кг, движется прямолинейно по закону  $s = 4t^2 + t$ . Доказать, что движение тела происходит под действием постоянной силы.

**Решение:** Имеем  $s' = 8t+1$ ,  $s'' = 8$ .

Следовательно,  $a(t) = 8$  (м/с<sup>2</sup>), т. е. при данном законе движения тело движется с постоянным ускорением 8 м/с<sup>2</sup>.

Далее, так как масса тела постоянна (30 кг), то по второму закону Ньютона действующая на него сила  $F=ma=30*8=240$  (Н)-также постоянная величина.





## Подведение итогов урока

✓ ***Каким вопросам был посвящен урок?***

✓ ***Чему научились на уроке?***

✓ ***Какие рассмотренные задачи оказались наиболее сложными?  
Почему?***



