

СИСТЕМА ДВОХ РІВНЯНЬ ІЗ ДВОМА ЗМІННИМИ ЯК МАТЕМАТИЧНА МОДЕЛЬ ПРИКЛАДНОЇ ЗАДАЧІ

ВЧОРА



Ви розв'язували системи рівнянь із двома змінними, а також задачі за допомогою квадратних і дробово-раціональних рівнянь

СЬОГОДНІ



Ви навчитеся розв'язувати задачі на арифметичні співвідношення між об'єктами, на рух, сумісну роботу та інші за допомогою систем двох рівнянь із двома змінними

ЗАВЖДИ



Ви зможете складати математичні моделі реальних життєвих ситуацій

ГОЛОВНА ІДЕЯ

У курсі алгебри 7–8 класів ви розв'язували текстові задачі за допомогою лінійних, квадратних, дробово-раціональних рівнянь та систем лінійних рівнянь. У 8 класі ви познайомилися з алгоритмом розв'язування текстової задачі за допомогою рівняння. Аналогічний алгоритм застосовують і для розв'язування текстових задач за допомогою системи рівнянь.

Алгоритм розв'язування текстової задачі за допомогою системи рівнянь

1. Проаналізувати умову задачі (основні величини, зв'язки між ними, вимоги задачі).
2. Створити математичну модель (у вигляді таблиці, рисунка, тексту тощо).
3. Скласти систему рівнянь до задачі.
4. Розв'язати отриману систему рівнянь.
5. Проаналізувати отримані результати з огляду на умову задачі.
6. Записати відповідь.

**Алгоритм розв'язування
задачі за допомогою
системи рівнянь**

Аналіз умови задачі



Математична модель задачі



Система рівнянь



Розв'язування системи рівнянь



Аналіз отриманих результатів



Відповідь



ПРИКЛАД 1

Сума двох чисел дорівнює 24, а різниця їх квадратів — 48.
Знайдіть ці числа.

Розв'язання

1 Аналізуємо умову задачі

Основні величини: два числа, над якими виконуються певні дії.
Аналіз дій, які виконуються над числами: якщо позначити перше число через x , а друге — через y , то їх сума дорівнюватиме $x + y$, а різниця квадратів $x^2 - y^2$.

2 Створюємо математичну модель задачі

За умовою $x + y = 24$, $x^2 - y^2 = 48$, причому обидві рівності виконуються одночасно. Тому потрібно скласти систему рівнянь.

3 Складаємо систему рівнянь

$$\begin{cases} x + y = 24, \\ x^2 - y^2 = 48. \end{cases}$$

4 Розв'язуємо отриману систему рівнянь

Крок	Зміст дії	Результат дії
КРОК 1	Розкладемо ліву частину другого рівняння на множники. У друге рівняння підставимо $x + y = 24$ і запишемо рівносильну систему рівнянь.	$\begin{cases} x + y = 24, \\ (x - y)(x + y) = 48; \end{cases}$ $\begin{cases} x + y = 24, \\ x - y = 2 \end{cases}$
КРОК 2	Додамо почленно обидва рівняння системи і знайдемо значення x .	$2x = 26;$ $x = 13$
КРОК 3	Знайдемо значення y , наприклад, із першого рівняння системи.	$y = 24 - x;$ $y = 24 - 13;$ $y = 11$

5 Аналізуємо отримані результати з огляду на умову задачі, записуємо відповідь

Шукані числа можуть бути довільними, отже, знайдені числа задовольняють умову задачі.

Відповідь: 11 і 13.



ПРИКЛАД 2

На двох фуршетних столах рядами викладено по 260 канапе (маленьких бутербродів). На другому столі кількість рядів на 3 менша, а кількість канапе у кожному ряді на 6 більша, ніж на першому столі. Визначте кількість рядів і кількість канапе в кожному ряді на першому столі.

Розв'язання

1 Аналізуємо умову задачі

Основні величини: кількість канапе в одному ряді на кожному столі; кількість рядів канапе на кожному столі; загальна кількість канапе на кожному столі.

Аналіз кількості канапе в одному ряді: це невідомі величини, пов'язані певними умовами. Позначимо кількість канапе в одному ряді на першому столі через x . Тоді кількість канапе в одному ряді на другому столі $x + 6$.

Аналіз кількості рядів канапе: це також невідомі величини, пов'язані певними умовами. Позначимо кількість рядів на першому столі через y . Тоді кількість рядів на другому столі $y - 3$.

Аналіз загальної кількості канапе на кожному столі: щоб знайти цю величину, потрібно помножити кількість канапе в одному ряді на кількість рядів. За умовою цей добуток для кожного із столів дорівнює 260.

2 Створюємо математичну модель задачі у вигляді таблиці

Фуршетний стіл	Кількість канапе в одному ряді	Кількість рядів	Кількість канапе на столі
I	x	y	xy
II	$x+6$	$y-3$	$(x+6)(y-3)$

3 Складаємо систему рівнянь

За умовою кількість канапе на кожному столі дорівнює 260. Складемо рівняння: $xy = 260$, $(x+6)(y-3) = 260$. Утворимо систему

рівнянь:
$$\begin{cases} xy = 260, \\ (x+6)(y-3) = 260. \end{cases}$$

4 Розв'язуємо отриману систему рівнянь

Крок	Зміст дії	Результат дії
КРОК 1	Розкриємо дужки в другому рівнянні, замінимо xy на 260 та спростимо друге рівняння.	$\begin{cases} xy = 260, \\ xy - 3x + 6y - 18 = 260; \end{cases} \quad \begin{cases} xy = 260, \\ 260 - 3x + 6y = 260 + 18; \end{cases}$ $\begin{cases} xy = 260, \\ 6y - 3x = 18; \end{cases} \quad \begin{cases} xy = 260, \\ 2y - x = 6 \end{cases}$
КРОК 2	Розв'яжемо отриману систему способом підстановки .	$\begin{cases} xy = 260, \\ x = 2y - 6; \end{cases} \quad (2y - 6)y = 260;$ $y^2 - 3y - 130 = 0; \quad y_1 = 13, \quad y_2 = -10$

5 Аналізуємо отримані результати з огляду на умову задачі, записуємо відповідь

Оскільки y — кількість рядів канапе, то від'ємний корінь $y_2 = -10$ не задовольняє умову задачі. Шукана кількість рядів канапе на першому столі $y_1 = 13$. Тоді кількість канапе у кожному ряді на першому столі $260 : 13 = 20$ (канапе).

Відповідь: 13 рядів по 20 канапе.

ПРИКЛАД 3

Протягом вихідних днів до інтернет-магазину надійшло 72 замовлення. Менеджери Андрій і Максим упродовж понеділка мають їх опрацювати. Відомо, що за той самий час Андрій опрацює 6 замовлень, а Максим — 5 замовлень. Скільки замовлень опрацює за 1 год кожний менеджер, якщо всі замовлення Андрій може опрацювати на 1,5 год швидше, ніж Максим?

Розв'язання

1 Аналізуємо умову задачі

Основні величини:

- швидкість опрацювання замовлень Андрієм (замовлень/год);
- швидкість опрацювання замовлень Максимом (замовлень/год).

Аналіз швидкості опрацювання замовлень (замовлень/год).

Нехай v_1 — швидкість опрацювання замовлень Андрієм, а v_2 — Максимом. Тоді час, протягом якого одне замовлення виконує Андрій, дорівнює $\frac{1}{v_1}$ год, Максим — $\frac{1}{v_2}$ год.

2 Створюємо математичну модель задачі у вигляді таблиці

$$\text{час опрацювання замовлень} = \frac{\text{кількість замовлень}}{\text{швидкість опрацювання замовлень}}$$

	Швидкість опрацювання замовлень	Загальна кількість замовлень	Час опрацювання замовлень	
			72 замовлення	n замовлень
Андрій	v_1	72	$\frac{72}{v_1}$	$n = 6, \frac{6}{v_1}$
Максим	v_2	72	$\frac{72}{v_2}$, на 1,5 год більше, ніж	$n = 5, \frac{5}{v_2}$

3 Складаємо систему рівнянь

За умовою задачі величина $\frac{72}{v_2}$ більша за величину $\frac{72}{v_1}$ на 1,5.

Складемо рівняння: $\frac{72}{v_2} - \frac{72}{v_1} = 1,5$. За умовою задачі величини $\frac{6}{v_1}$

і $\frac{5}{v_2}$ дорівнюють одна одній. Складемо рівняння: $\frac{6}{v_1} = \frac{5}{v_2}$.

Маємо систему рівнянь:
$$\begin{cases} \frac{72}{v_2} - \frac{72}{v_1} = 1,5, \\ \frac{6}{v_1} = \frac{5}{v_2}. \end{cases}$$

4 Розв'язуємо отриману систему рівнянь

Крок	Зміст дії	Результат дії
КРОК 1	Використаємо спосіб підстановки . Виразимо з другого рівняння системи v_1 через v_2 , підставимо отриманий вираз у перше рівняння.	$v_1 = \frac{6}{5}v_2$; $\frac{72}{v_2} - \frac{72 \cdot 5}{6 \cdot v_2} = 1,5$
КРОК 2	Винесемо $\frac{72}{v_2}$ за дужки та розв'яжемо отримане рівняння.	$\frac{72}{v_2} \left(1 - \frac{5}{6}\right) = 1,5$; $\frac{72}{v_2} \cdot \frac{1}{6} = 1,5$; $\frac{72}{v_2} = 9$; $v_2 = 8$
КРОК 3	Знайдемо v_1 .	$v_2 = 8$, $v_1 = \frac{6}{5}v_2$, $v_1 = \frac{6}{5} \cdot 8 = 9,6$

5 Аналізуємо отримані результати з огляду на умову задачі, записуємо відповідь

Шукані числа мають бути додатними, отже, знайдені числа задовольняють умову задачі.

Відповідь: 9,6 і 8 замовлень за годину.

ПРИКЛАД 4

Відстань між ролердромом і тенісним кортом 700 м. Зоя вирушила з корту до ролердрому, а через 3 хв після цього з ролердрому до корту пішов Юрій, який зустрівся із Зоею через 3 хв після свого виходу. Відстань між ролердромом і кортом Зоя долає на 2,1 хв швидше, ніж Юрій. Знайдіть швидкість Зої.

Розв'язання

1 Аналізуємо умову задачі

Основні величини: швидкість руху Зої; швидкість руху Юрія.

Аналіз руху Зої та Юрія:

- час руху Юрія до зустрічі із Зоею — $3 \text{ хв} = \frac{1}{20} \text{ год}$;
- час руху Зої до виходу Юрія — 3 хв;
- час руху Зої до зустрічі з Юрієм — $6 \text{ хв} = \frac{1}{10} \text{ год}$;
- відстань, яку Зоя та Юрій пройшли разом до зустрічі — $700 \text{ м} = 0,7 \text{ км}$.

Оскільки швидкість руху Зої є невідомою і шуканою, то її доцільно позначити змінною x . Тоді швидкість руху Юрія позначимо змінною y .

2 Створюємо математичну модель задачі у вигляді таблиці

	Відстань між ролердромом і кортом, км	Швидкість руху, км/год	Час подолання всієї дистанції, год	Відстань, пройдена до зустрічі, км
Зоя	0,7	x	$\frac{0,7}{x}$, на 2,1 хв $\left(\frac{7}{200} \text{ год}\right)$ менше, ніж	$\frac{1}{10}x$
Юрій	0,7	y	$\frac{0,7}{y}$	$\frac{1}{20}y$

} 0,7

3 Складаємо систему рівнянь

Відстані, що пройшли Зоя та Юрій до зустрічі, складають разом усю відстань між кортом і ролердромом, яка за умовою дорівнює 0,7 км. Складемо рівняння: $\frac{1}{10}x + \frac{1}{20}y = 0,7$. За умовою задачі

величина $\frac{0,7}{x}$ менша від величини $\frac{0,7}{y}$ на $\frac{7}{200}$. Складемо рів-

няння: $\frac{0,7}{y} - \frac{0,7}{x} = \frac{7}{200}$. Маємо систему рівнянь:
$$\begin{cases} \frac{1}{10}x + \frac{1}{20}y = 0,7, \\ \frac{0,7}{y} - \frac{0,7}{x} = \frac{7}{200}. \end{cases}$$

4 Розв'язуємо отриману систему рівнянь

Крок	Зміст дії	Результат дії
КРОК 1	Спростимо кожне з рівнянь системи: обидві частини першого рівняння помножимо на 20, а другого — на 10.	$\begin{cases} 2x + y = 14, \\ \frac{7}{y} - \frac{7}{x} = \frac{7}{20} \end{cases} \quad : 7; \quad \begin{cases} 2x + y = 14, \\ \frac{1}{y} - \frac{1}{x} = \frac{1}{20} \end{cases}$
КРОК 2	Розв'яжемо систему рівнянь способом підстановки .	$\begin{cases} y = 14 - 2x, \\ \frac{1}{14 - 2x} - \frac{1}{x} = \frac{1}{20} \end{cases}$
КРОК 3	Розв'яжемо друге рівняння системи $\frac{1}{14 - 2x} - \frac{1}{x} - \frac{1}{20} = 0$ як дробово-раціональне рівняння.	$\frac{20x - 20(14 - 2x) - x(14 - 2x)}{20x(14 - 2x)} = 0;$ $\begin{cases} x^2 + 23x - 140 = 0, \\ x \neq 0, \\ x \neq 7; \end{cases} \quad x_1 = 5, \quad x_2 = -28$

5 Аналізуємо отримані результати з огляду на умову задачі, записуємо відповідь

Оскільки x — швидкість руху Зої, то від'ємний корінь $x_2 = -28$ не задовольняє умову. Отже, $x = 5$, шукана швидкість 5 км/год.

Відповідь: 5 км/год.

Домашнє завдання

- 1 У кінотеатрі x рядів, у кожному ряді 10 місць. Скільки всього місць у кінотеатрі?

А	Б	В	Г
$\frac{x}{10}$	$10x$	$\frac{10}{x}$	$x+10$

- 2 Величина x більша за величину y на 6. Виразіть x через y .

А	Б	В	Г
$x=y+6$	$x=y-6$	$x=6y$	$x=\frac{y}{6}$

- 3 Для фарбування x м² підлоги витрачається y л фарби. Скільки літрів фарби потрібно для фарбування підлоги площею $5x$ м²?

А	Б	В	Г
$5y$	$\frac{y}{5}$	$5xy$	$\frac{5x}{y}$

- 4 Катер рухався проти течії річки протягом 3 год. Яку відстань пройшов катер, якщо його власна швидкість дорівнює y км/год, а швидкість течії річки — x км/год?

А	Б	В	Г
$3xy$	$3(x+y)$	$3(y-x)$	$3(x-y)$

- 5 Довжина гіпотенузи прямокутного трикутника дорівнює 4 см, один із катетів на 1 см менший, ніж другий. Яка система рівнянь відповідає умові, якщо довжину меншого катета позначено через x см, а більшого — через y см?

А	Б	В	Г
$\begin{cases} x-y=1, \\ x^2+y^2=4 \end{cases}$	$\begin{cases} x-y=1, \\ x^2+y^2=16 \end{cases}$	$\begin{cases} y-x=1, \\ x^2+y^2=4 \end{cases}$	$\begin{cases} y-x=1, \\ x^2+y^2=16 \end{cases}$

- 6 Установіть відповідність між задачами (1–3) і виразами (А–Г), що є розв'язками задач.

1	Потяг проїхав x км зі швидкістю y км/год. Скільки годин потяг був у дорозі?	А	Б	В	Г
2	З басейну об'ємом y л викачали воду за x год. Скільки літрів води викачували з басейну щогодини?	$\frac{y}{x}$	$\frac{x}{y}$	$x+y$	xy
3	Автобус за один рейс перевозить x пасажирів. Скільки пасажирів перевіз автобус, здійснивши y рейсів?				

- 7 Різниця чисел x і y дорівнює 5, а їх добуток дорівнює 14.

- 1) Запишіть систему рівнянь для визначення x та y .
- 2) Розв'яжіть систему.

- 8 Два дизайнери, працюючи разом, виконують завдання за $1\frac{1}{5}$ год. Одному дизайнеру на виконання цього завдання потрібно на 1 год більше, ніж іншому. За скільки годин може виконати завдання кожен дизайнер, працюючи самостійно?