

Предмет стереометрии. Аксиомы стереометрии

Уроки
геометрии в 10
классе



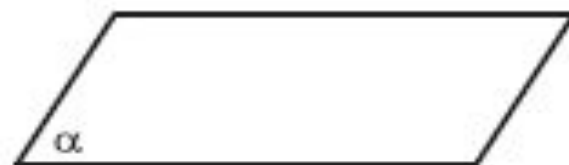
Точка



Прямая



Плоскость

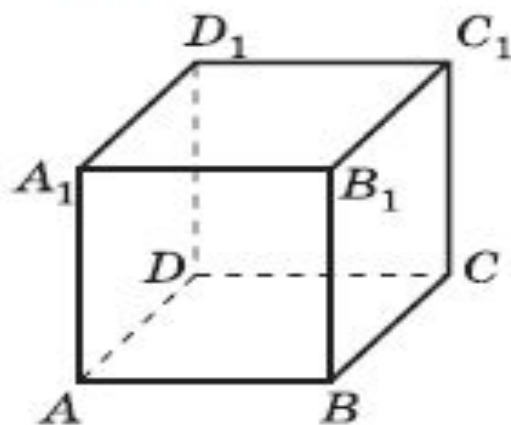


Прописные латинские буквы $A, B, C, D, E, \dots$

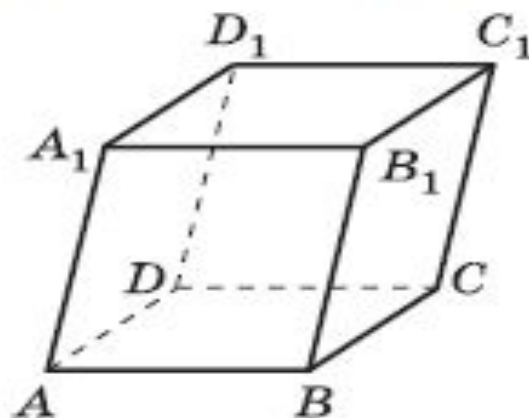
Строчные латинские буквы $a, b, c, d, e, \dots$

Греческие буквы $\alpha, \beta, \gamma, \lambda, \pi, \omega, \dots$

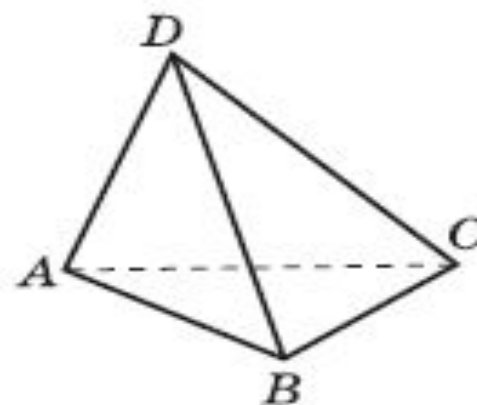
Приведите примеры прямых, проходящих через точки, принадлежащие указанным многогранникам:



Куб

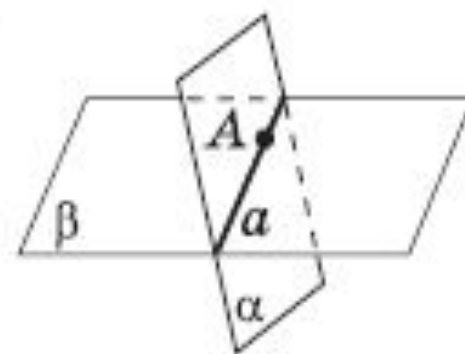
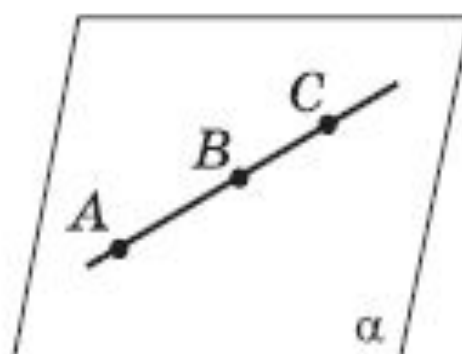
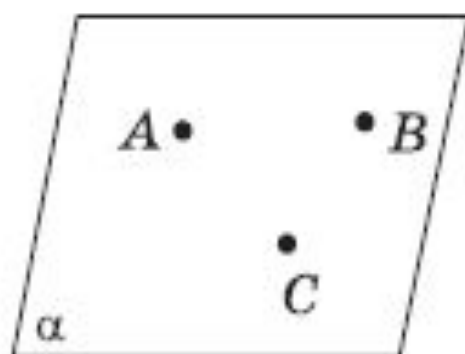


Параллелепипед



Тетраэдр

Сформулируйте аксиомы A_1 , A_2 , A_3 .
Прокомментируйте их с помощью приведённых рисунков.



A , B , C — произвольные точки, не лежащие на одной прямой. Через точки A , B , C проходит единственная плоскость α .

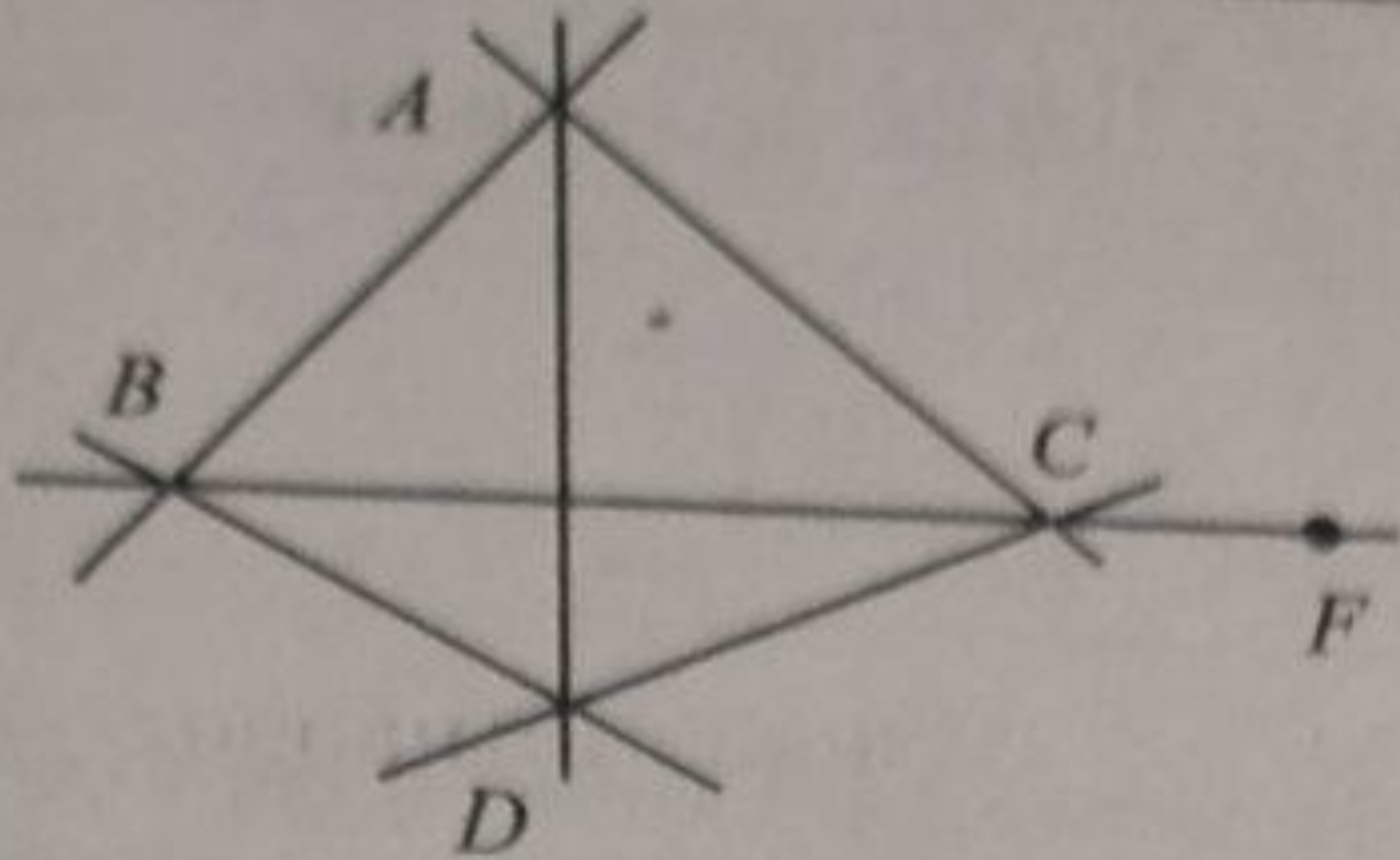
$$\frac{A \in \alpha, B \in \alpha, C \in AB}{C \in \alpha}$$

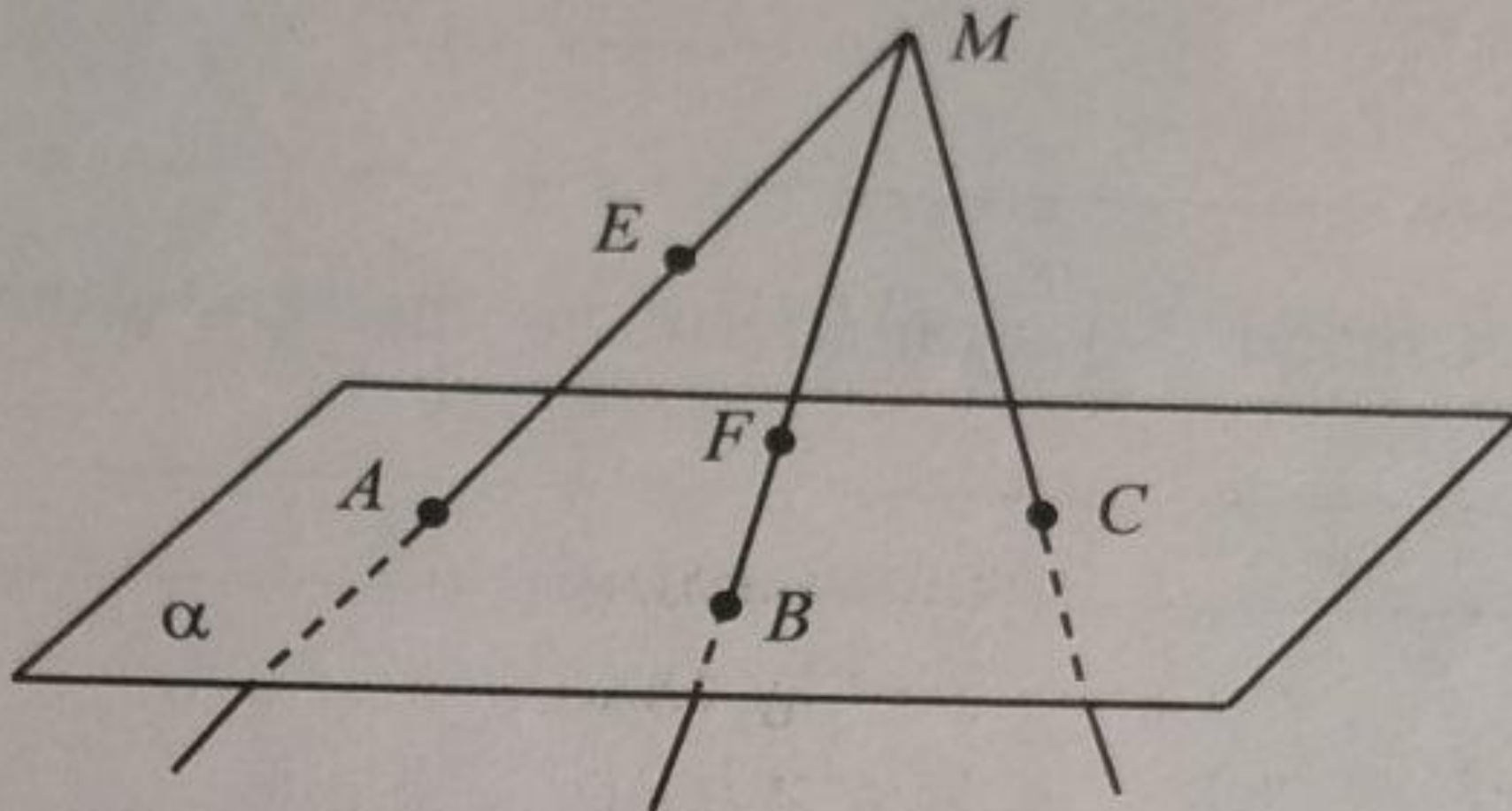
$$\frac{A \in \alpha, A \in \beta}{\alpha \cap \beta = a, A \in a}$$

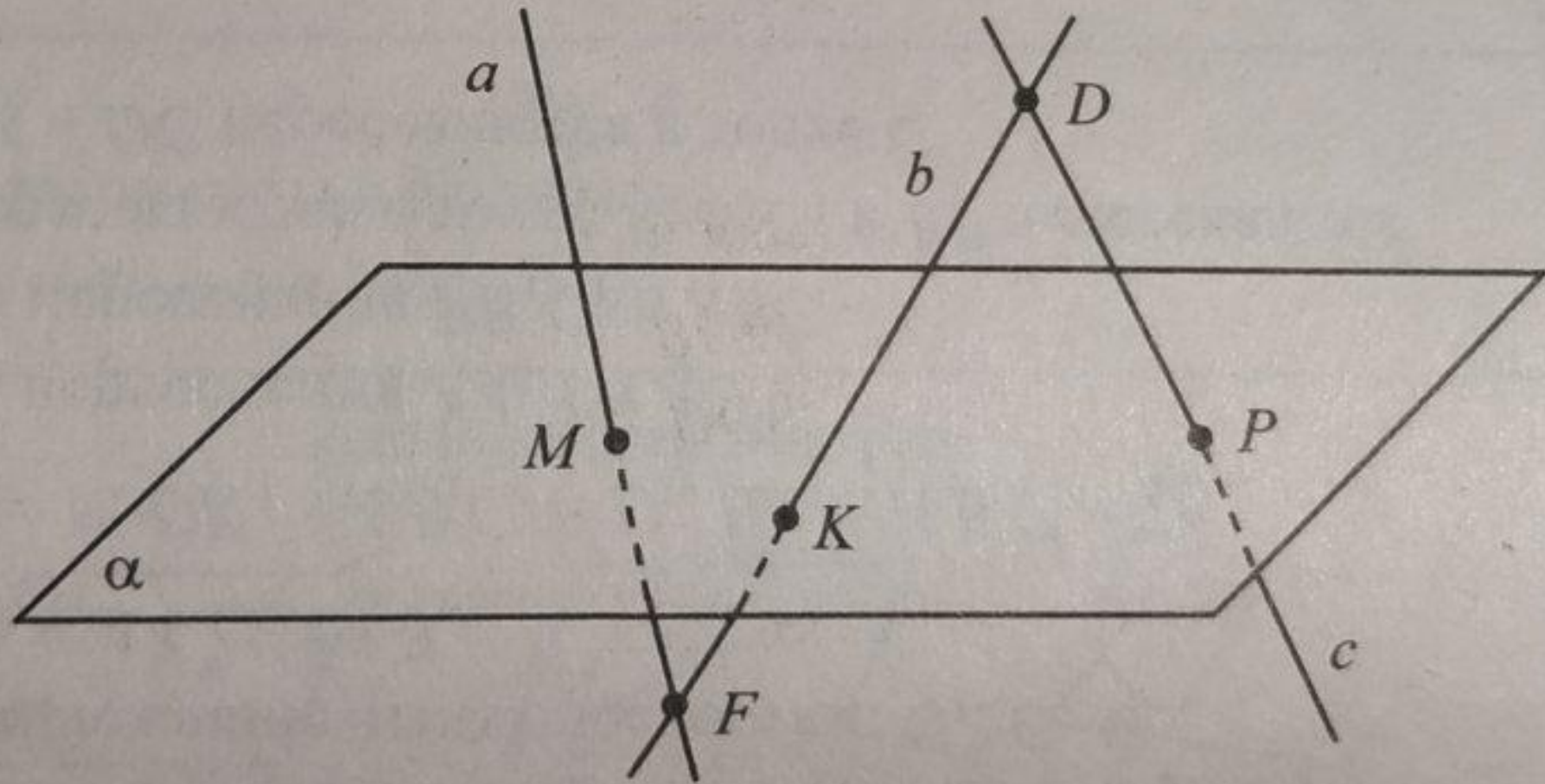
Следствия из аксиом

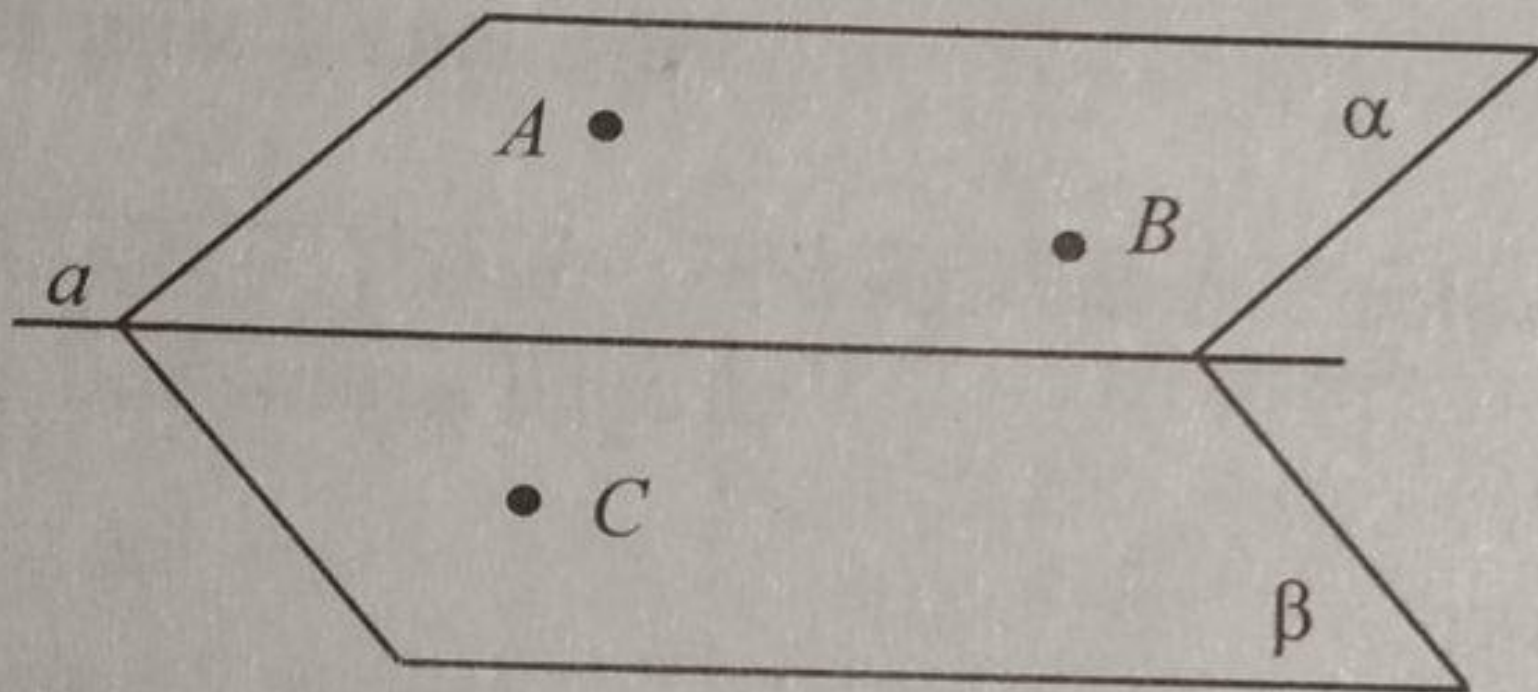
Уроки
геометрии в
10 классе











Задача. $ABCD$ — ромб, O — точка пересечения его диагоналей, M — точка пространства, не лежащая в плоскости ромба. Точки A, D, O лежат на плоскости α .

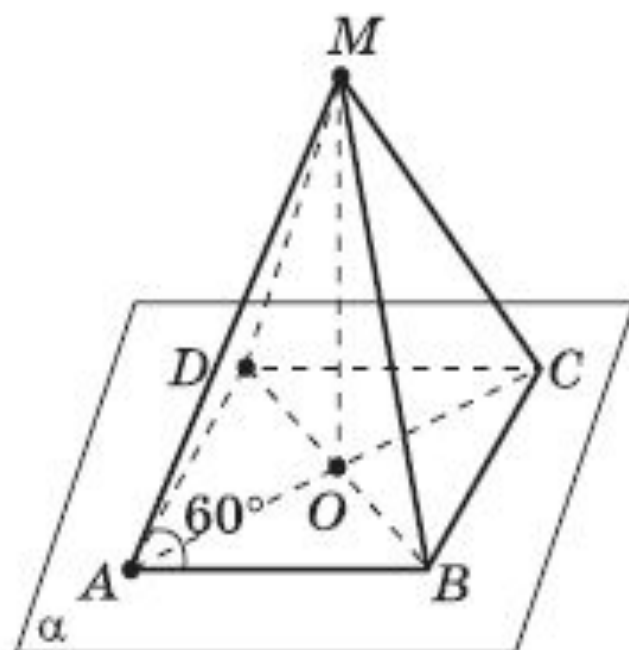
Дайте ответы на поставленные вопросы с необходимыми обоснованиями.

1. Лежат ли в плоскости α точки B и C ?

2. Лежит ли в плоскости MOB точка D ?

3. Назовите линию пересечения плоскостей MOB и ADO .

4. Вычислите площадь ромба, если сторона его равна 4 см, а угол равен 60° . Предложите различные способы вычисления площади ромба.



Решение задач

Уроки
геометрии в
10 классе



Задача. Дан тетраэдр $MABC$, каждое ребро которого равно 6 см. $D \in MB$, $E \in MC$, $F \in AB$, $AF = FB$, $P \in MA$.

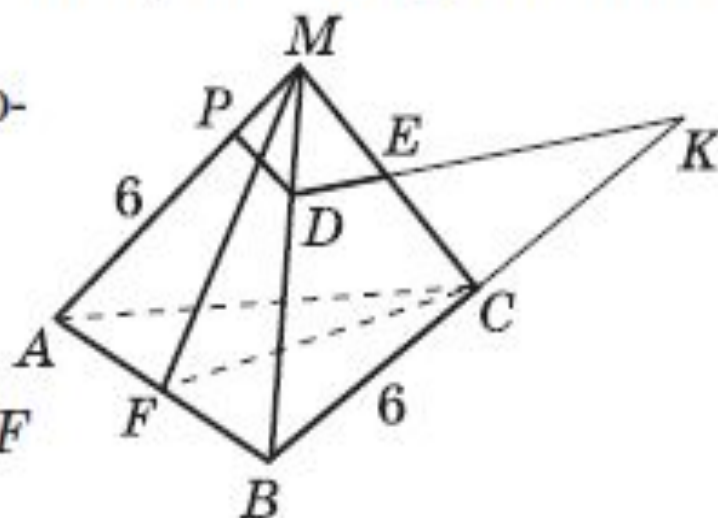
1. Назовите прямую, по которой пересекаются плоскости:

- а) MAB и MFC ;
- б) MCF и ABC .

2. Найдите длину отрезка CF и площадь треугольника ABC .

3. а) Объясните, как построить точку пересечения прямой DE с плоскостью ABC .

б) Постройте точку пересечения прямой PD с плоскостью ABC .



Задача. Пересечение двух плоскостей.

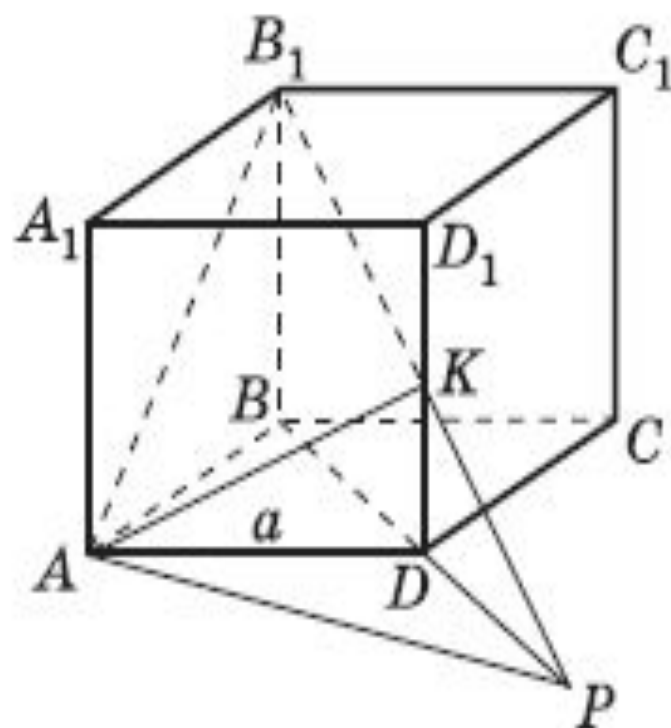
Дано: $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ — куб, $K \in DD_1$, $DK = KD_1$.

1. Объясните, как построить точку пересечения прямой $B_1 K$ с плоскостью ABC .

2. Объясните, как построить линию пересечения плоскостей $AB_1 K$ и ADD_1 .

3. Объясните, как построить линию пересечения плоскостей $AB_1 K$ и ADC .

4. Вычислите длины отрезков AK и AB_1 , если $AD = a$.



Решение задач. Самостоятельная работа

Уроки
геометрии в
10 классе





Параллельность прямых в пространстве. Параллельность трех прямых

Уроки
геометрии в
10 классе



Параллельность прямой и плоскости

Уроки
геометрии в
10 классе



Решение задач

Уроки
геометрии в
10 классе



Задача. Параллельность прямой и плоскости.

Дано: $AB \parallel \alpha$,
 $AB = 7$,
 $ABK \cap \alpha = CD$,
 $AC = 6$, $CK = 8$.

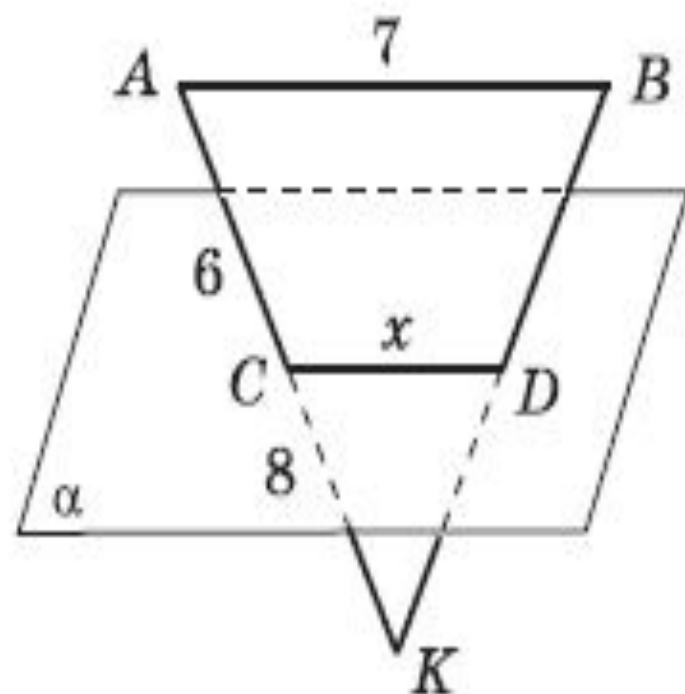
-
1. Каково взаимное расположение прямых AB и CD ?
 2. Найдите CD .

Решение.

1. $AB \parallel CD$.
2. $\triangle AKB \sim \triangle CKD$.

$$\frac{7}{x} = \frac{14}{8}, \quad x = 4.$$

Приведите необходимые обоснования.



Задача. Плоскость α пересекает стороны AB и AC треугольника ABC соответственно в точках B_1 и C_1 . Известно, что $BC \parallel \alpha$, $AB:B_1B=8:3$, $AC=16$ см.

1. Докажите, что $B_1C_1 \parallel BC$.

2. Найдите AC_1 .

Решение.

Способ 1

1. $BC \parallel \alpha$, $ABC \cap \alpha = B_1C_1$;

$B_1C_1 \parallel BC$.

2. $AC_1:C_1C=5:3$,

$5m+3m=16$ см, $m=2$ см,

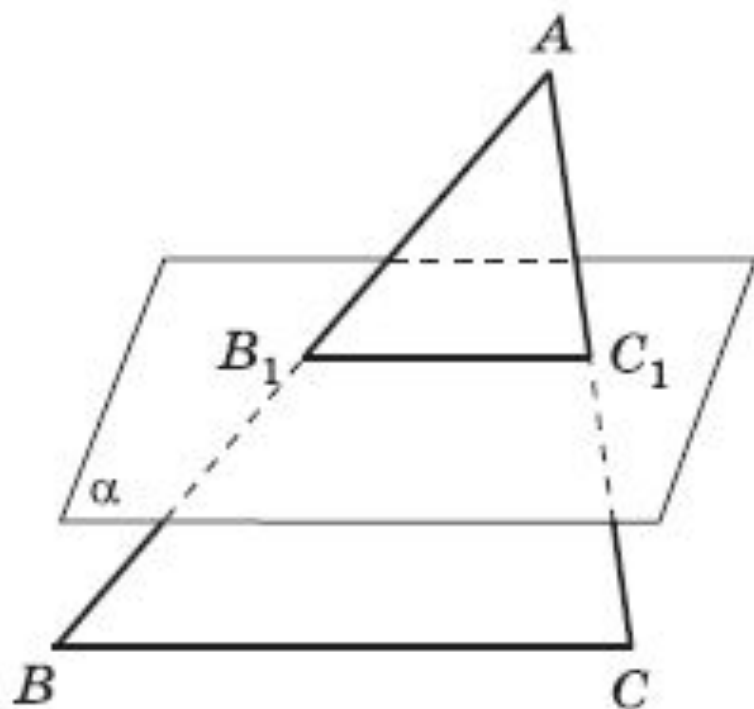
$AC_1=5m$, $AC_1=10$ см.

Способ 2

$$\frac{AB_1}{AB} = \frac{AC_1}{AC}, \quad \frac{5}{8} = \frac{AC_1}{16 \text{ см}},$$

$AC_1=10$ см.

Дайте обоснование решения.



Самостоятельная работа

Скрещивающиеся прямые

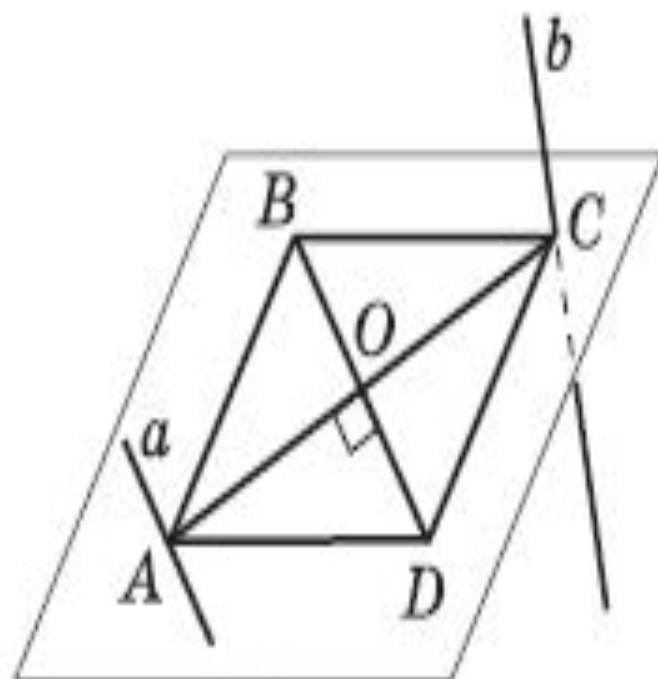
Уроки
геометрии в
10 классе



Задача. Через вершину A ромба $ABCD$ проведена прямая a , параллельная диагонали BD , а через вершину C — прямая b , не лежащая в плоскости ромба.

Докажите, что:

- а) прямые a и CD пересекаются;
- б) прямые a и b являются скрещивающимися.



Углы с сонаправленными сторонами. Угол между прямыми

Уроки
геометрии в
10 классе



Решение задач

Уроки
геометрии в
10 классе



Задача. Дан четырёхугольник $ABCD$, вершины которого не лежат в одной плоскости (пространственный четырёхугольник). Докажите, что середины сторон пространственного четырёхугольника являются вершинами параллелограмма.

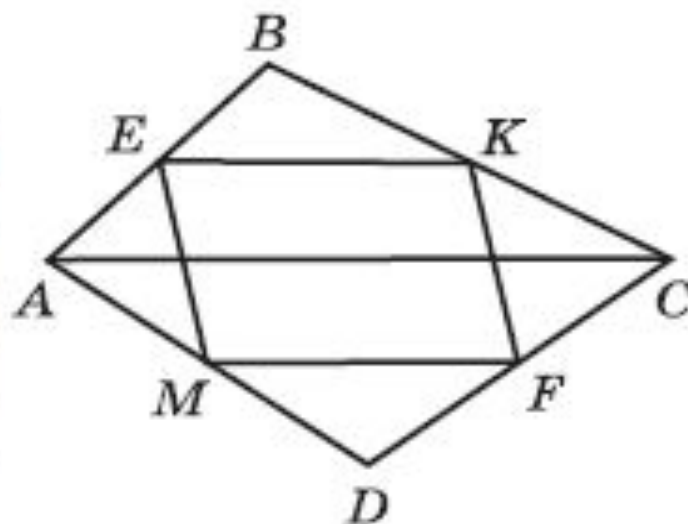
Доказательство.

1. EK — средняя линия треугольника ABC , поэтому $EK \parallel AC$ и $EK = \frac{1}{2}AC$.

2. MF — средняя линия треугольника ADC , поэтому $MF \parallel AC$ и $MF = \frac{1}{2}AC$.

3. $EK \parallel MF$ и $EK = MF$.

4. Вершины четырёхугольника $MEKF$ лежат в одной плоскости, определяемой параллельными прямыми EK и MF , его противоположные стороны EK и MF параллельны и равны, поэтому $MEKF$ — параллелограмм.



Контрольная работа

Параллельные плоскости. Свойства параллельных плоскостей

Уроки
геометрии в
10 классе



Повторение вопросов теории и решение задач на параллельность плоскостей

Уроки
геометрии в
10 классе



Задача. Не лежащие в одной плоскости прямые MK , ME и MF пересекают плоскость α в точках A , B и C , а параллельную ей плоскость β в точках A_1 , B_1 и C_1 .

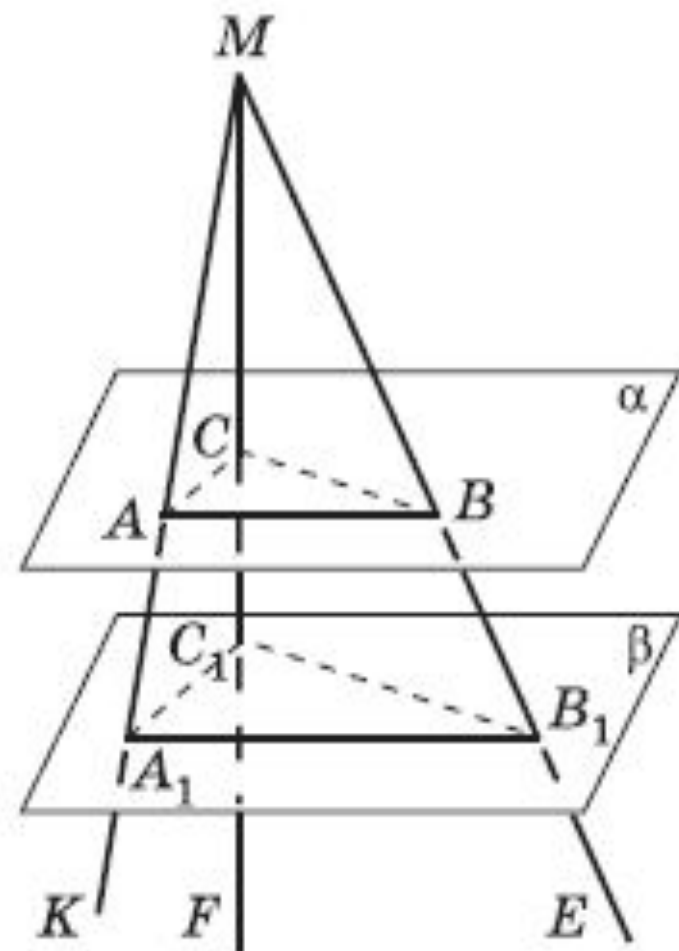
1. Докажите, что:

а) соответственные стороны треугольников ABC и $A_1B_1C_1$ параллельны;

б) соответственные углы треугольников ABC и $A_1B_1C_1$ равны;

в) треугольники ABC и $A_1B_1C_1$ подобны.

2. Найдите площадь треугольника $A_1B_1C_1$, если $MA:AA_1=2:1$, $S_{ABC}=4 \text{ см}^2$.



Тетраэдр и параллелепипед

Уроки
геометрии в
10 классе



Задачи на построение сечений

Уроки
геометрии в
10 классе



Задачи на построение сечений

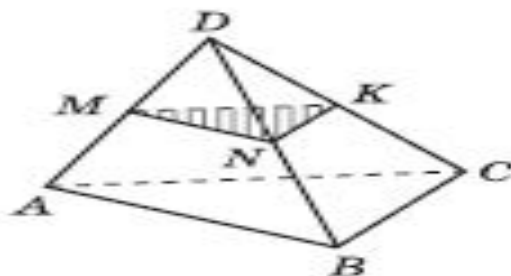
Уроки
геометрии в
10 классе



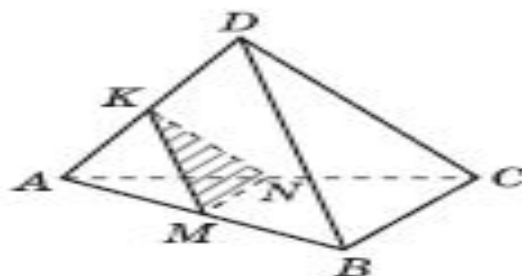
1. Объясните, как построить сечение тетраэдра $DABC$ плоскостью, проходящей через данные точки M, N, K .

2. В задачах 1—3 найдите периметр сечения, если M, N, K — середины рёбер и каждое ребро тетраэдра равно a .

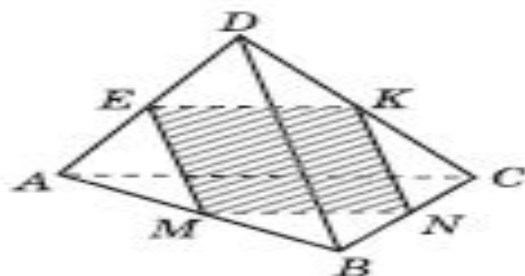
1.



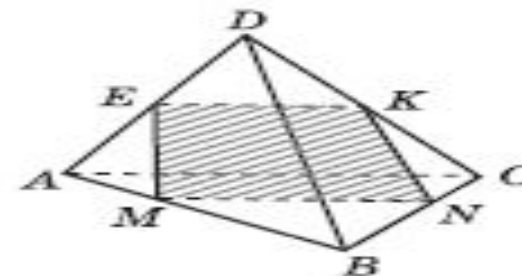
2.



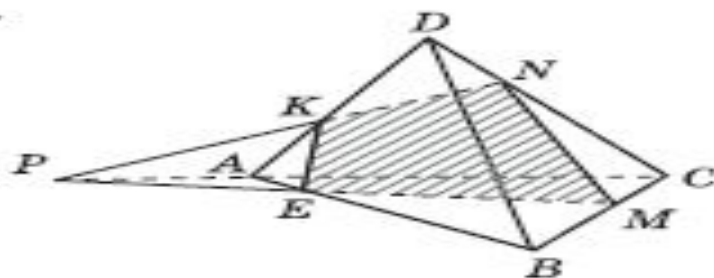
3.



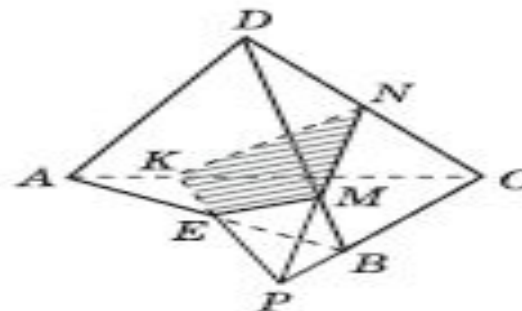
4.



5.



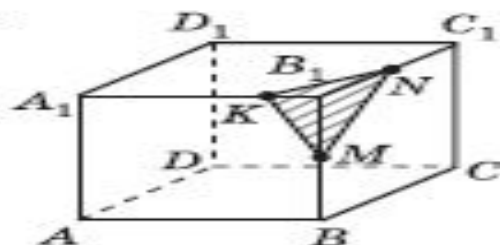
6.



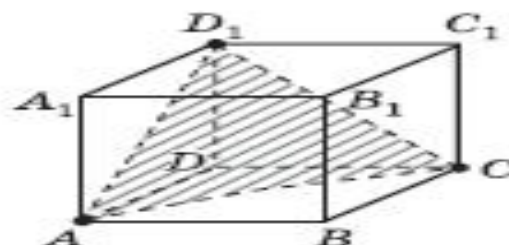
1. Объясните, как построить сечение куба плоскостью, проходящей через три данные точки, являющиеся либо вершинами куба, либо серединами его рёбер (три данные точки на рисунках выделены).

2. В задачах 1—4 и 6 найдите периметр сечения, если ребро куба равно a . В задаче 5 докажите, что $AE = \frac{1}{3}a$.

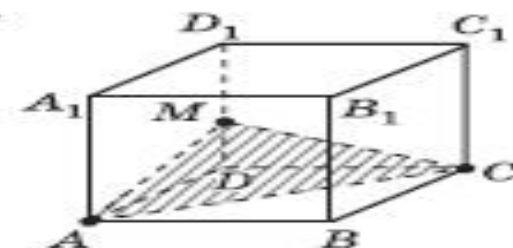
1.



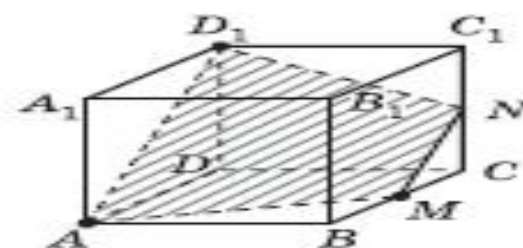
2.



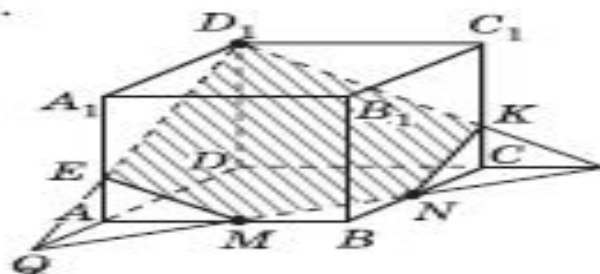
3.



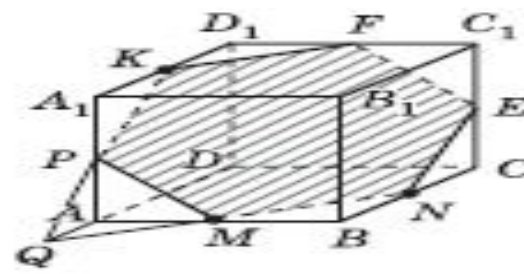
4.



5.



6.

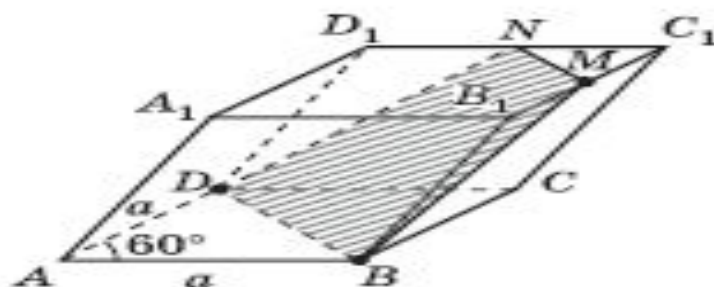


Задача. Все грани параллелепипеда — равные ромбы со стороной a и острым углом 60° .

1. Объясните, как построить сечение параллелепипеда плоскостью, проходящей через точки B , D и M , если M — середина ребра B_1C_1 .

2. Докажите, что построенное сечение есть равнобедренная трапеция.

3. Найдите стороны трапеции.



Решение.

1) Пусть α — секущая плоскость, $\alpha \cap ABCD = BD$, $\alpha \cap BCC_1B_1 = BM$, $MN \parallel BD$, сечение — трапеция $BDNM$.

2) $\triangle BB_1M = \triangle DD_1N$, $BM = DN$, трапеция $BDNM$ равнобедренная.

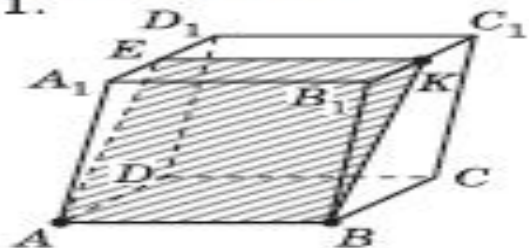
3) $BD = a$, $MN = \frac{a}{2}$, $BM = \frac{a\sqrt{7}}{2}$.

Приведите необходимые обоснования.

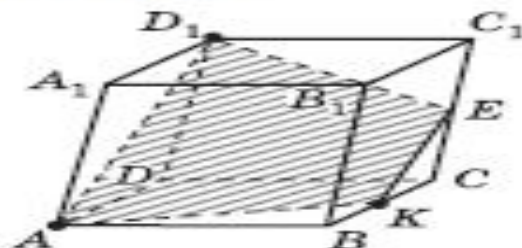
Постройте сечение параллелепипеда $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ плоскостью, проходящей через точки:

1) A, B, K ;

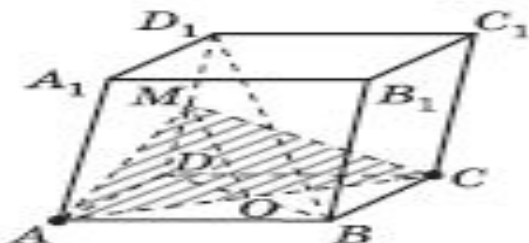
1.



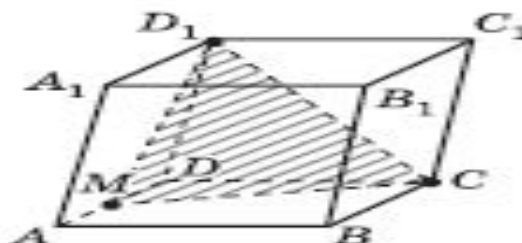
2) A, D_1, K ;



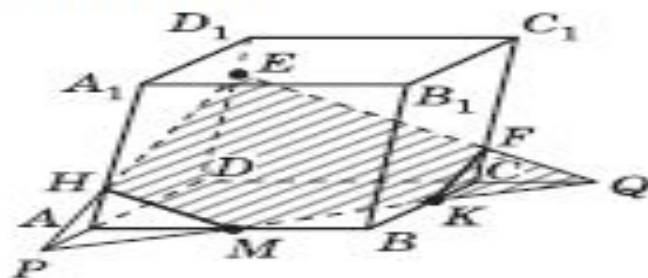
3) A и C параллельно диагонали BD_1 ;



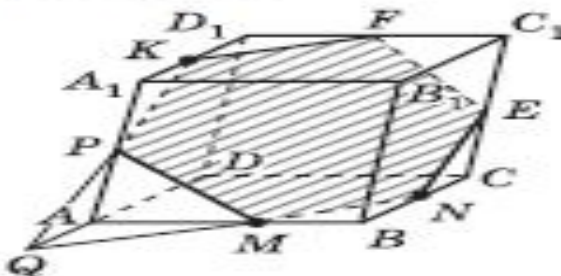
4) M, D_1, C ;



5) M, E, K ;



6) K, M, N .



Решение задач

Уроки
геометрии в
10 классе



Контрольная работа

Уроки
геометрии в
10 классе



Зачёт № 1.

Параллельность прямых и плоскостей

Уроки
геометрии в
10 классе



Перпендикулярные прямые в пространстве. Параллельные прямые,

перпендикулярные к плоскости

уроки
геометрии в
10 классе



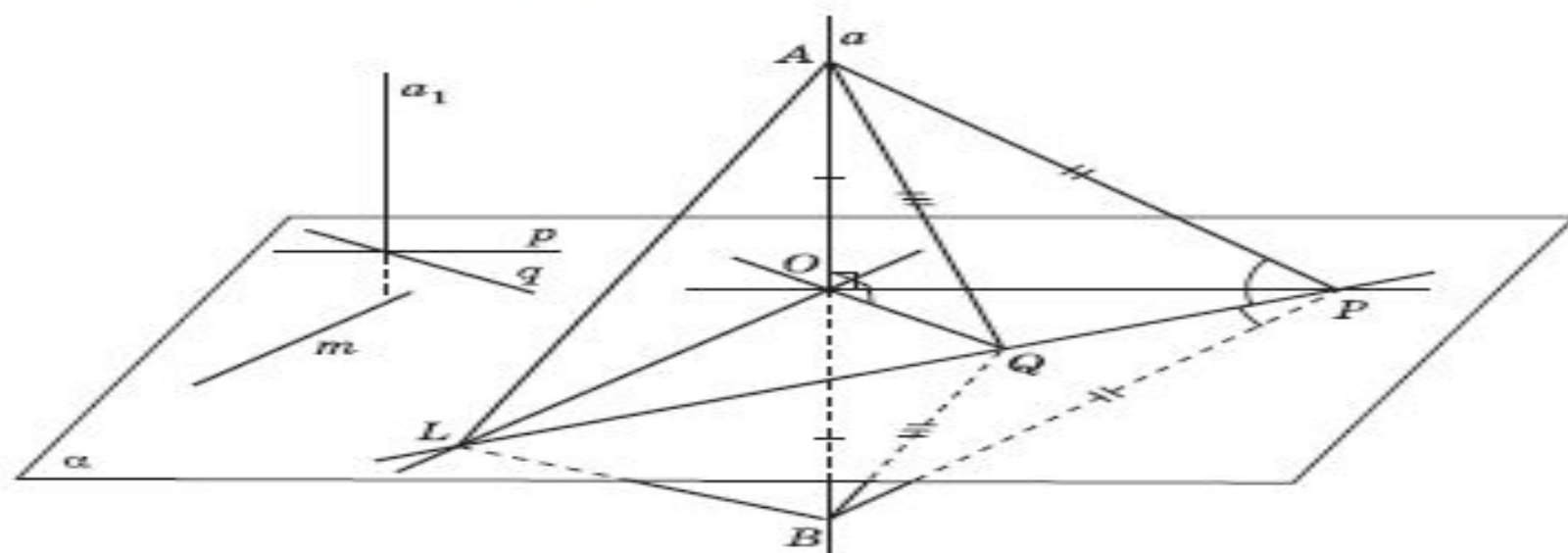
Признак перпендикулярности прямой и плоскости

Уроки
геометрии в
10 классе



1. Сформулируйте определение перпендикулярности прямой и плоскости.

2. Теорема. Если прямая перпендикулярна к двум пересекающимся прямым, лежащим в плоскости, то она перпендикулярна к этой плоскости.



План доказательства

1-й этап. Дано: $a \perp OP$, $a \perp OQ$, $OL \subset \alpha$.

Требуется доказать: $a \perp OL$.

1) $AO = OB$.

2) $AP = BP$, $AQ = BQ$.

3) $\triangle APQ = \triangle BPQ$, поэтому $\angle APQ = \angle BPQ$.

4) $\triangle APL = \triangle BPL$, поэтому $AL = BL$.

5) В $\triangle ABL$ медиана LO является высотой, т. е. $AB \perp OL$ или $a \perp OL$.

2-й этап. m — произвольная прямая плоскости α , $OL \parallel m$. Так как $a \perp OL$, то $a \perp m$, и, следовательно, $a \perp \alpha$.

3-й этап. Дано: $a \perp p$, $a \perp q$. Требуется доказать: $a \perp \alpha$.

1) $a_1 \parallel a$.

2) Так как $a_1 \perp \alpha$, то $a \perp \alpha$.

Теорема о прямой, перпендикулярной к плоскости

Уроки
геометрии в
10 классе



Задача. В треугольнике ABC дано: $\angle C = 90^\circ$, $AC = 12$ см, $BC = 16$ см, CM — медиана. Через вершину C проведена прямая CK , перпендикулярная к плоскости треугольника ABC , $CK = 24$ см.

1. Найдите KM .

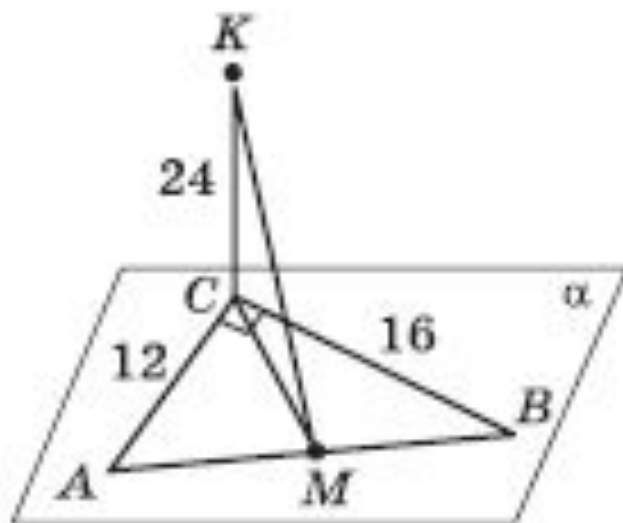
2. Составьте план решения задачи, если отрезок CM — высота треугольника.

3. Составьте план решения задачи, если отрезок CM — биссектриса треугольника.

1) $AB = 20$ см, $CM = \frac{1}{2}AB = 10$ см, $KM = 26$ см.

2) $20 \cdot CM = 12 \cdot 16$.

3) $\frac{1}{2} \cdot 12 \cdot 16 = \frac{1}{2} \cdot 12 \cdot CM \cdot \sin 45^\circ + \frac{1}{2} \cdot 16 \cdot CM \cdot \sin 45^\circ$.



Решение задач. Самостоятельная работа

Уроки
геометрии в
10 классе



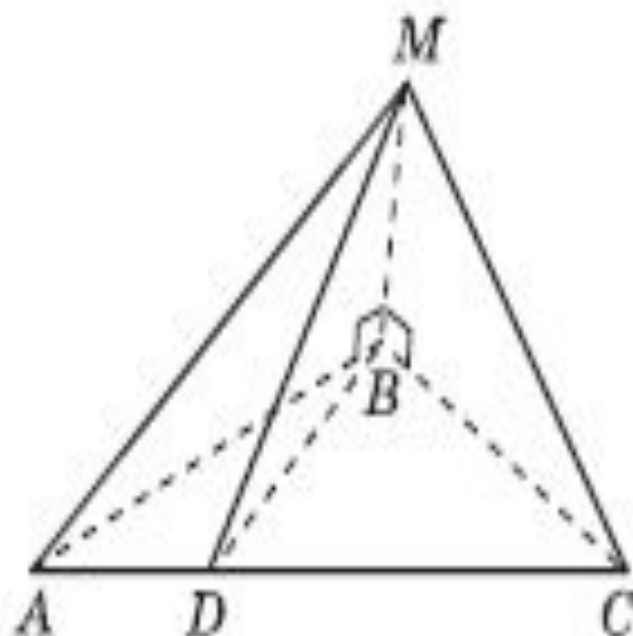
Задача. Дан тетраэдр $MABC$, в котором $MB \perp BC$ и $MB \perp BA$.

1. Докажите, что треугольник MBD прямоугольный, если D — произвольная точка отрезка AC .

2. Найдите MD и площадь треугольника MBD , если $MB = BD = a$.

1) $MB \perp BC$, $MB \perp BA$, поэтому $MB \perp ABC$, следовательно, $MB \perp BD$.

2) $MD = a\sqrt{2}$, $S_{MBD} = 0,5a^2$.



Расстояние от точки до плоскости. Теорема о трёх перпендикулярах

Уроки
геометрии в
10 классе



Дано: $AN \perp \alpha$, AM — наклонная к плоскости α , NM — проекция наклонной, $a \subset \alpha$, $a \perp NM$.

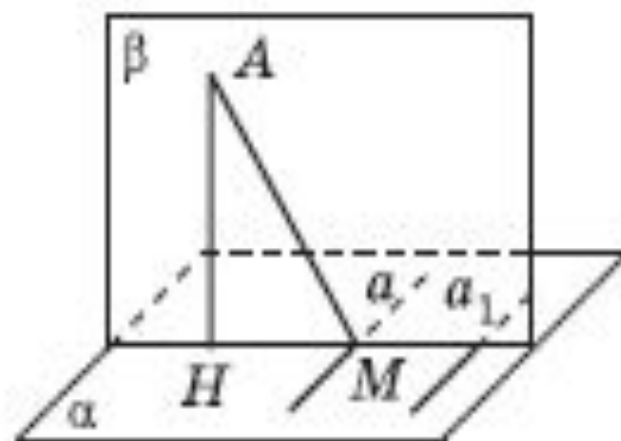
Докажите: $a \perp AM$.

Доказательство.

$AN \perp a$, так как $AN \perp \alpha$.

$a \perp AN$, $a \perp NM$, следовательно, $a \perp \beta$ по признаку перпендикулярности прямой и плоскости. Отсюда следует, что $a \perp AM$ (по определению перпендикулярности прямой и плоскости).

Приведите полное обоснование обратной теоремы: $a \subset \alpha$, $a \perp AN$, $a \perp AM$, следовательно, $a \perp \beta$ и поэтому $a \perp NM$.



Угол между прямой и плоскостью

Уроки
геометрии в
10 классе



есть наименьший из всех углов между данной прямой и прямыми, лежащими в этой плоскости и проходящими через точку пересечения данной прямой с плоскостью.

Дано: $MO \perp \alpha$, MA — наклонная, $PQ \subset \alpha$, $\angle MAO = \varphi_0$, $\angle MAQ = \varphi$.

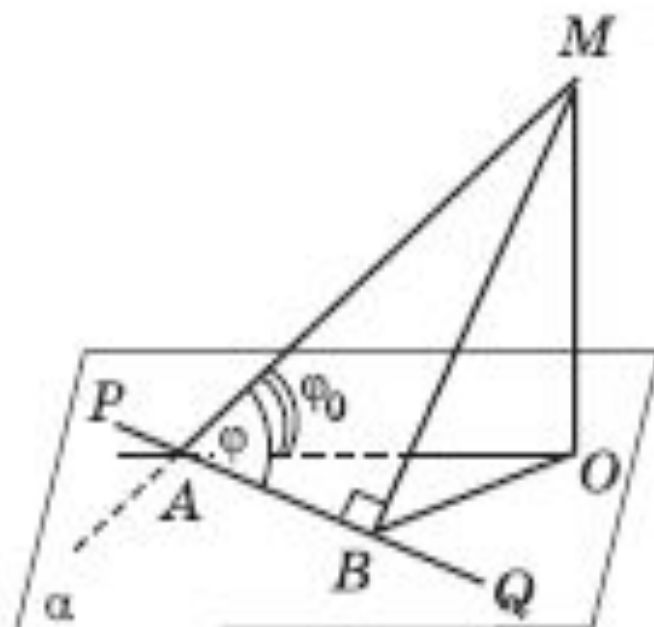
Докажите: $\varphi_0 < \varphi$.

Доказательство.

$MB \perp PQ$, $MO < MB$.

$\frac{MO}{MA} < \frac{MB}{MA}$, $\sin \varphi_0 < \sin \varphi$, $\varphi_0 < \varphi$.

Приведите полное обоснование решения.



Решение задач

Уроки
геометрии в
10 классе

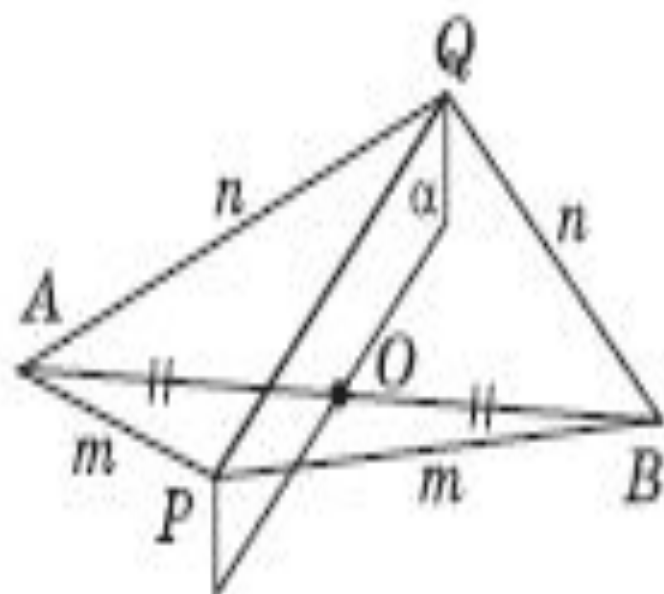


Задача. Найдите угол между скрещивающимися прямыми AB и PQ , если каждая из точек P и Q равноудалена от концов отрезка AB .

Решение.

$$PA = PB = m, \quad QA = QB = n.$$

Отсюда следует, что точки P и Q лежат в плоскости α , проходящей через середину отрезка AB , и $\alpha \perp AB$. Поэтому $PQ \subset \alpha$ и $PQ \perp AB$, т. е. искомый угол равен 90° .



Решение задач. Самостоятельная работа

Уроки
геометрии в
10 классе



Двугранный угол

Уроки
геометрии в
10 классе



Признак перпендикулярности двух плоскостей

Уроки
геометрии в
10 классе



Прямоугольный параллелепипед

Уроки
геометрии в
10 классе



Решение задач

Уроки
геометрии в
10 классе



Дано: $\triangle ABC$: $AB=21$, $AC=10$, $BC=17$, $AC \subset \alpha$.
 Двугранный угол $BACO$ равен 60° , $\triangle AOC$ — проекция
 треугольника ABC на плоскость α . Найдите S_{AOC} .

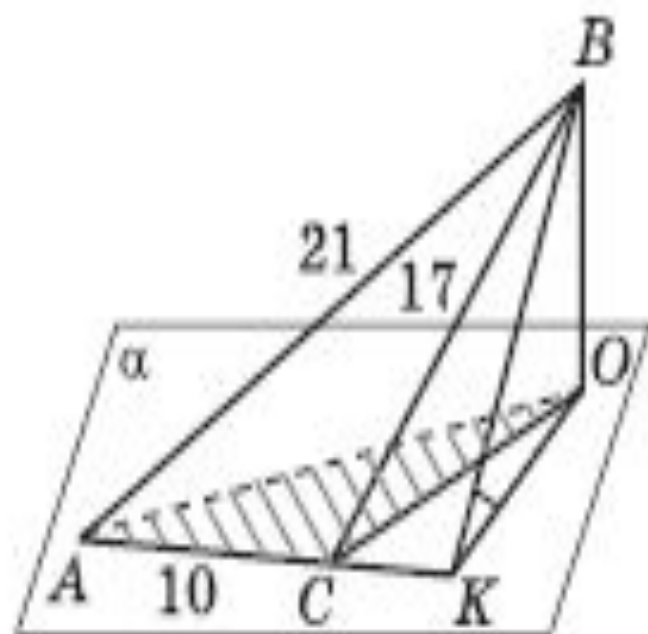
1. $21^2 > 17^2 + 10^2$. Поэтому
 $\triangle ABC$ тупоугольный.

2. Объясните, как построить
 $\triangle AOC$.

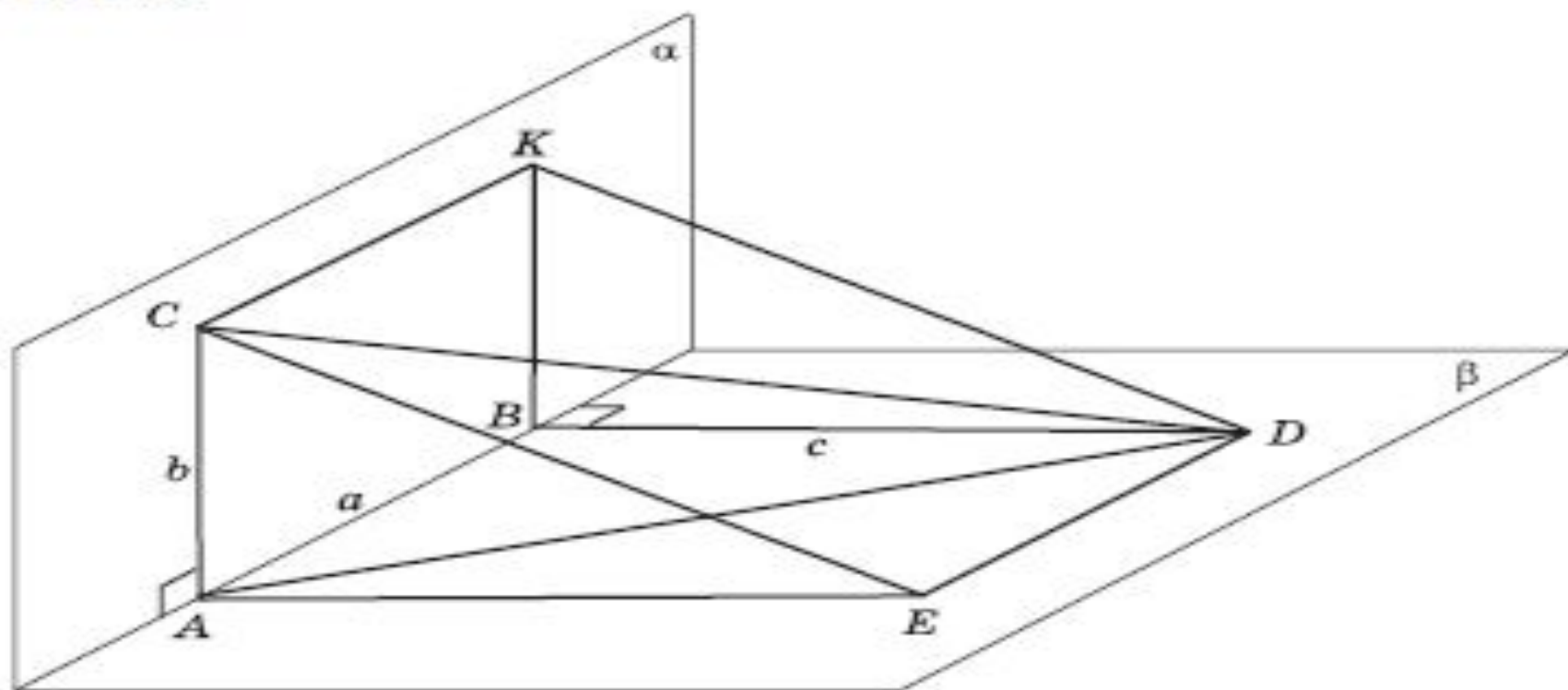
3. Объясните, как построить
 линейный угол двугранного угла
 $BACO$.

4. $S_{ABC} = 84$.

5. $S_{AOC} = 42$.



Точки A и B лежат на ребре прямого двугранного угла. Отрезки AC и BD проведены в разных гранях перпендикулярно к ребру двугранного угла: $AB = a$, $AC = b$, $BD = c$.



1. Объясните, как построить линейный угол двугранного угла.
2. Укажите различные способы вычисления длины отрезка CD .
3. Найдите длину отрезка CD .

Контрольная работа

Уроки
геометрии в
10 классе



Зачёт № 2.

Перпендикулярность прямых и плоскостей

Уроки
геометрии в
10 классе



Понятие многогранника. Призма

Уроки
геометрии в
10 классе



Площадь поверхности призмы

Уроки
геометрии в
10 классе



Решение задач

Уроки
геометрии в
10 классе



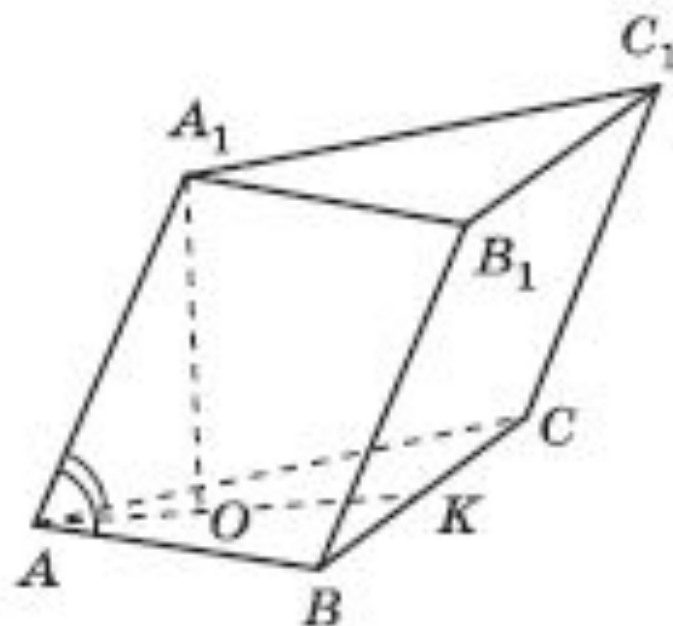
Задача. Основание призмы — правильный треугольник ABC . Боковое ребро AA_1 образует равные острые углы со сторонами основания AB и AC .

Докажите, что: а) $BC \perp AA_1$; б) грань BB_1C_1C — прямоугольник.

Решение.

а) Так как AA_1 образует равные острые углы со сторонами AB и AC , то проекцией ребра AA_1 на плоскость ABC является отрезок AO биссектрисы угла BAC . $BC \perp AO$, следовательно, $BC \perp AA_1$ по теореме о трёх перпендикулярах.

б) $BC \perp AA_1$, $AA_1 \parallel BB_1$, поэтому $BC \perp BB_1$, и значит, BB_1C_1C — прямоугольник.



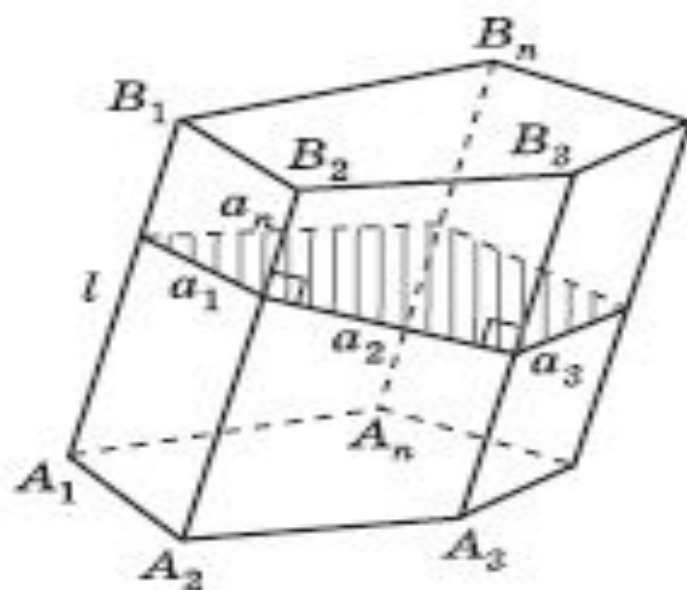
Докажите, что площадь боковой поверхности наклонной призмы равна произведению периметра перпендикулярного сечения на боковое ребро.

Доказательство.

Плоскость перпендикулярного сечения призмы перпендикулярна к боковым рёбрам, поэтому стороны перпендикулярного сечения призмы являются высотами параллелограммов.

$$S_{\text{бок}} = a_1 l + a_2 l + \dots + a_n l,$$

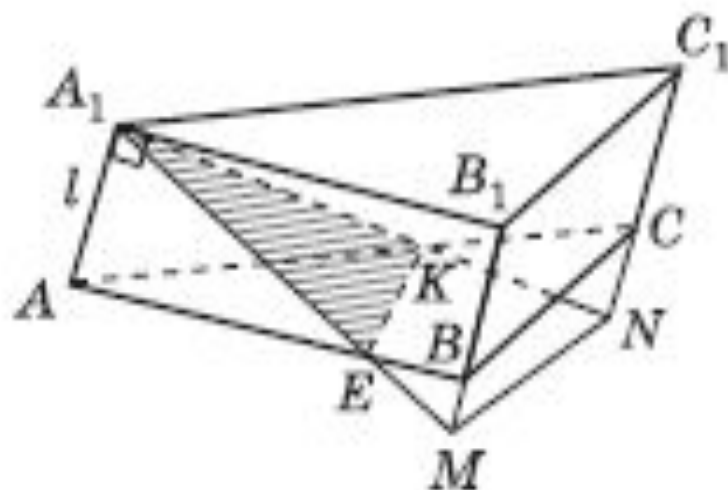
$$S_{\text{бок}} = (a_1 + a_2 + \dots + a_n) l, \quad S_{\text{бок}} = P_{\perp} \cdot l.$$



Задача. $ABCA_1B_1C_1$ — треугольная призма. Секущая плоскость α пересекает продолжения боковых рёбер B_1B и C_1C в точках M и N , $\alpha \perp AA_1$.

Сечение призмы плоскостью α есть треугольник A_1EK . За перпендикулярное сечение призмы принимается треугольник A_1MN . Докажите, что $S_{\text{бок}} = P_{\perp} \cdot l$, т. е.

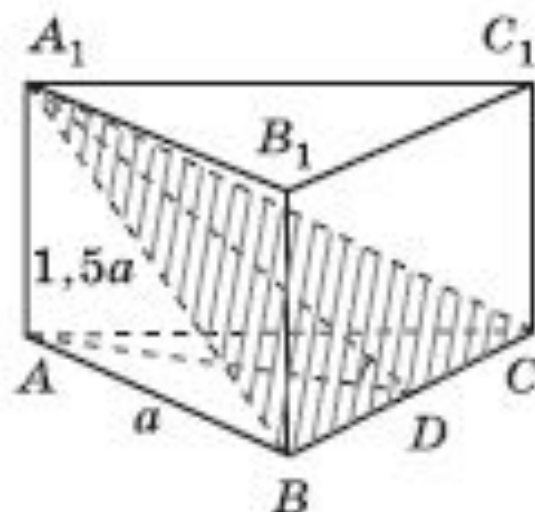
$$S_{\text{бок}} = (A_1M + A_1N + MN) \cdot AA_1.$$



Задача. Сторона основания правильной треугольной призмы равна a , высота призмы равна $1,5a$. Через сторону основания и противоположную вершину другого основания проведено сечение.

Найдите:

1. Площадь боковой поверхности призмы.
2. Высоту основания призмы.
3. Угол между плоскостями основания и сечения.
4. Отношение площадей основания и сечения призмы.



Ответ: 1. $4,5a^2$. 2. $\frac{a\sqrt{3}}{2}$.

3. 60° . 4. $\frac{1}{2}$.

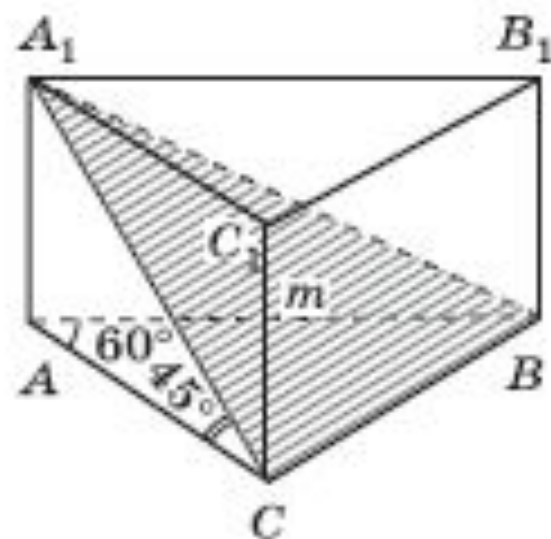
Задача. Основанием прямой призмы является прямоугольный треугольник, гипотенуза которого равна m , а острый угол равен 60° . Через катет, противолежащий этому углу, и противоположную этому катету вершину другого основания проведено сечение, составляющее угол 45° с плоскостью основания.

1. Докажите, что треугольник A_1CB прямоугольный.

2. Укажите различные способы вычисления площадей основания и сечения призмы.

3. Вычислите площадь основания призмы.

4. Вычислите площадь боковой поверхности призмы.



Ответ: 3. $\frac{m^2\sqrt{3}}{8}$.

4. $\frac{m^2(3+\sqrt{3})}{4}$.

Самостоятельная работа

Уроки
геометрии в
10 классе



Пирамида. Правильная пирамида

Уроки
геометрии в
10 классе



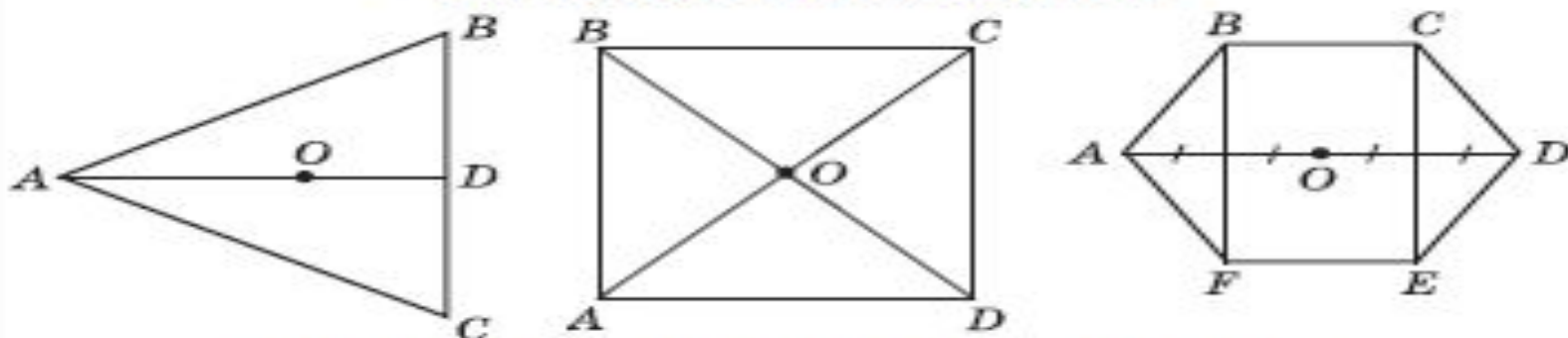
Решение задач

Уроки
геометрии в
10 классе

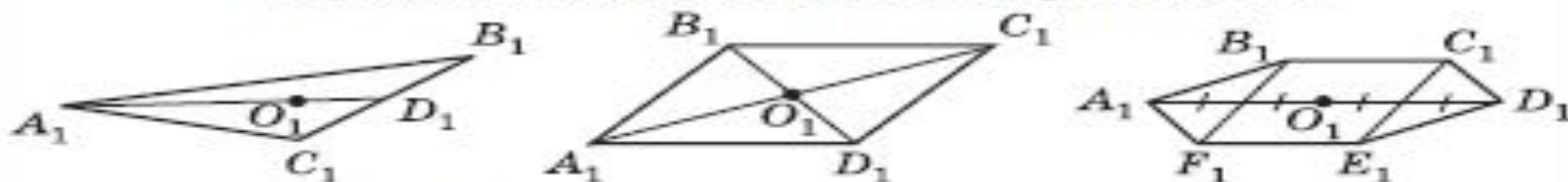


Опираясь на свойства параллельного проектирования, объясните вид проекций изображённых ниже правильных многоугольников и правильных пирамид.

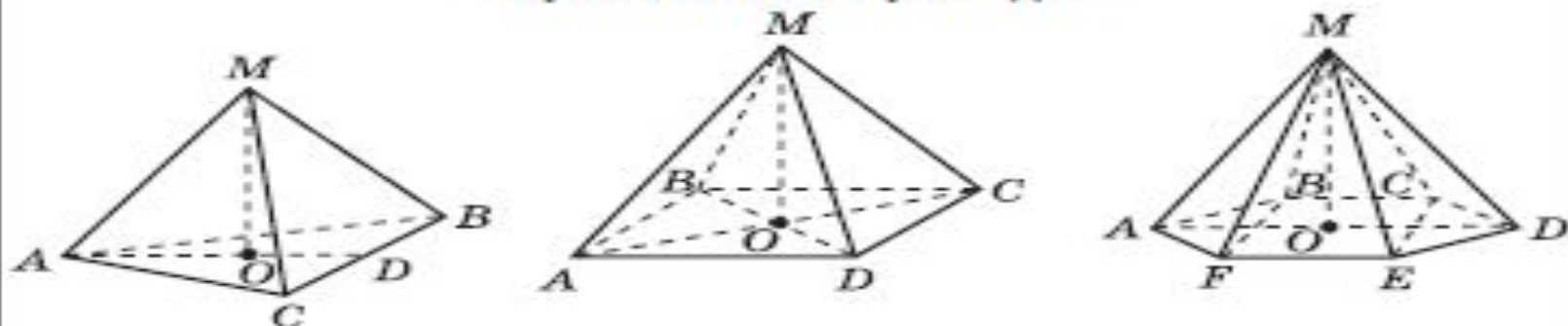
Правильные многоугольники



Параллельные проекции многоугольников



Правильные пирамиды



Пирамида. Правильная пирамида

Уроки
геометрии в
10 классе



Задача. $DABC$ — правильная треугольная пирамида.

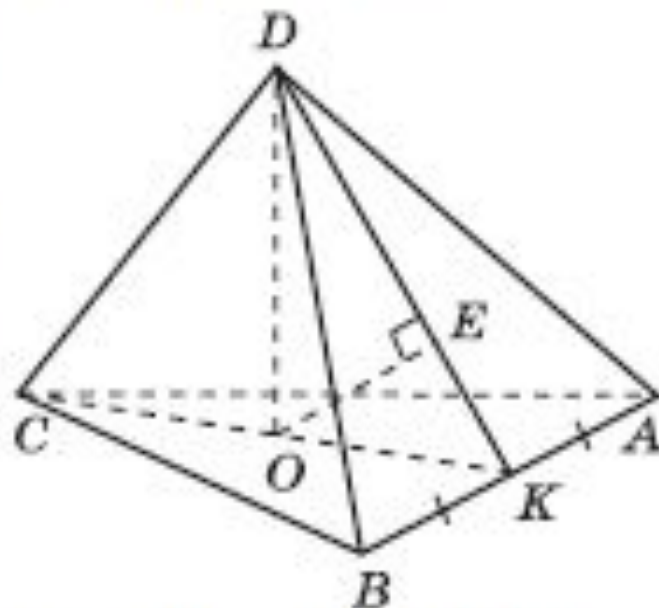
Докажите, что:

1. Скрещивающиеся рёбра DC и AB перпендикулярны.

2. $AB \perp DCK$.

3. Плоскости DAB и DCK перпендикулярны.

4. Перпендикуляр OE из точки O к апофеме DK является перпендикуляром к плоскости DAB .



Дополните подробным обоснованием приведённые записи:

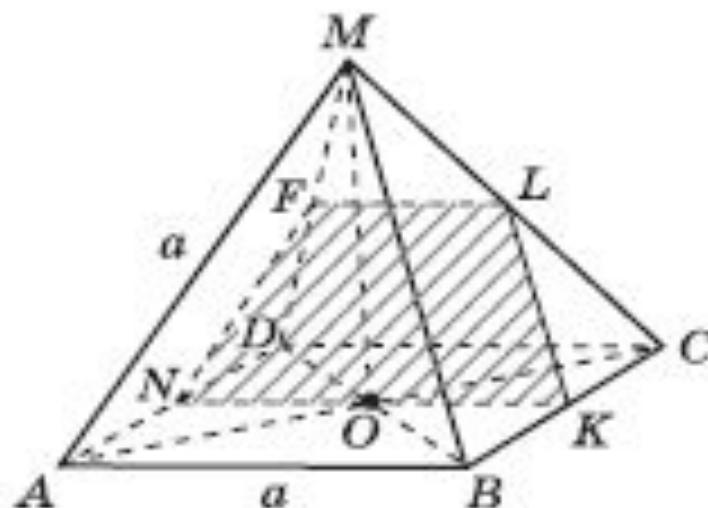
1. $AB \perp CO$, $AB \perp DC$.

2. $AB \perp CK$, $AB \perp DK$, $AB \perp DCK$.

3. $AB \perp DCK$, $AB \subset DAB$, $DAB \perp DCK$.

4. $OE \perp DK$, $OE \perp AB$, $OE \perp DAB$.

Задача. Каждое ребро правильной четырёхугольной пирамиды $MABCD$ равно a . Через середины N , K , L рёбер проведено сечение пирамиды плоскостью.



1. Докажите, что:
 - а) $NK \parallel MDC$; б) $LF \parallel KN$; в) сечение $NKLF$ — равнобедренная трапеция.
2. Вычислите периметр трапеции.
3. Составьте план вычисления площади трапеции.

Решение задач

Уроки
геометрии в
10 классе



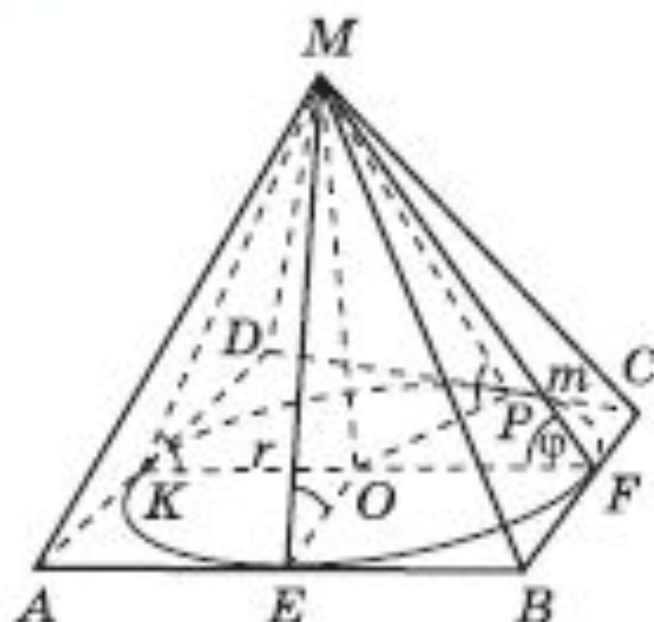
Задача. Известно, что боковые грани пирамиды наклонены к её основанию под одним и тем же углом φ .

Докажите, что:

1. В основание пирамиды можно вписать окружность и высота пирамиды проходит через центр этой окружности.

2. Высоты боковых граней, проведённые из вершины пирамиды, равны.

3. $S_{\text{осн}} = S_{\text{бок}} \cdot \cos \varphi$, где φ — угол наклона боковой грани к основанию пирамиды.



$S_{\text{осн}} = \frac{1}{2} p \cdot r = \frac{1}{2} p \cdot m \cdot \cos \varphi = S_{\text{бок}} \cdot \cos \varphi$, где p — периметр основания пирамиды, m — высота боковой грани, r — радиус окружности, вписанной в основание.

Самостоятельная работа

Уроки
геометрии в
10 классе



Усеченная пирамида

Уроки
геометрии в
10 классе



Симметрия в пространстве.
Понятие правильного многогранника.
Элементы симметрии правильных многогранников

Уроки
геометрии в
10 классе



Теорема Эйлера

Уроки
геометрии в
10 классе



Контрольная работа

Уроки
геометрии в
10 классе



Зачёт № 3. Многогранники. Площади поверхностей призмы и пирамиды

Уроки
геометрии в
10 классе



Заключительное повторение тем геометрии 10 класса

Уроки
геометрии в
10 классе



Симметрия в пространстве.

Понятие правильного многогранника.

Элементы симметрии правильных многогранников