Уральский федеральный университет

Дифференциальные уравнения и ряды

Лекция 11

§5. Степенные ряды

Среди функциональных рядов особую роль играют ***степенные*** ряды, т.е. ряды, членами которых являются степенные функции:

$$a_0 + a_1x + a_2x^2 + \ldots + a_nx^n + \ldots = \sum_{n=0}^{\infty} a_nx^n \qquad (1),$$

$$a_0 + a_1(x - x_0) + a_2(x - x_0)^2 + \ldots + a_n(x - x_0)^n + \ldots = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(x - x_0)^n \qquad (2).$$

Числа $a_0, a_1, a_2, \ldots a_n$ называют коэффициентами ряда.

С помощью замены $x - x_0 = t$ ряд (2) приводится к виду (1).

Поэтому при изучении степенных рядов достаточно рассмотреть ряды первого вида.

Область сходимости степенного ряда всегда содержит, по крайней мере, одну точку $x = 0$ для ряда (1) и $x = x_0$ для ряда (2).

Теорема Абеля.

Если степенной ряд (1) сходится при некотором значении $x_0 \neq 0$, то он абсолютно сходится при всех значениях таких x, что $|x| < |x_0|$.

Следствие.

Если ряд (1) расходится при некотором значении $x = x_1$, то он расходится для всех таких x, что $|x| > |x_1|$.

Из теоремы Абеля следует, что существует такое число $R \geq 0$, что при $|x| < R$ ряд (1) сходится, а при $|x| > R$ – расходится.

Число R называют ***радиусом сходимости*** степенного ряда, а интервал $(-R; R)$ – ***интервалом сходимости*** ряда (1).

На концах интервала сходимости, т.е. при $x = \pm R$, ряд может как сходиться, так и расходиться.

Замечания:

1. При $R = 0$ степенной ряд (1) сходится только в одной точке $x = 0$.
При $R = \infty$ ряд сходится на всей числовой оси.

2. Интервал сходимости степенного ряда (2) находят из неравенства $|x - x_0| < R$;
он имеет вид: $(x_0 - R; x_0 + R)$.

3. Интервал сходимости удобно находить, применяя признак Даламбера или радикальный признак Коши для ряда из модулей, при этом радиус сходимости

$$R = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right| \quad \text{или} \quad R = \frac{1}{\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{|a_n|}}.$$

Пример 1. Найти область сходимости ряда $\sum\limits_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{x^{2n+1}}{4^n}$.

Решение.

Запишем соответствующий абсолютный ряд и применим к нему признак Даламбера:

$$\sum_{n=0}^{\infty}\left|(-1)^n\frac{x^{2n+1}}{4^n}\right|=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{|x|^{2n+1}}{4^n}.$$

2

$$\lim_{n\to\infty}\frac{u_{n+1}}{u_n}=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{|x|^{2n+3}}{4^{n+1}}:\frac{|x|^{2n+1}}{4^n}\right)=\lim_{n\to\infty}\frac{\cancel{4^n}\,|x|^{\cancel{2n+3}}}{\cancel{4^{n+1}}\,\cancel{|x|^{2n+1}}}=\lim_{n\to\infty}\frac{|x|^2}{4}=\frac{x^2}{4}.$$

По признаку Даламбера ряд сходится, если $\frac{x^2}{4}<1$.

Решаем неравенство: $x^2<4\ \Rightarrow\ |x|<2\ \Rightarrow\ -2<x<2$.

Проверим крайние точки интервала сходимости $x = \pm 2$ (в этих точках $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = 1$, поэтому признак Даламбера ответа о сходимости не дает).

При $x = -2$ получим

$$\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{(-2)^{2n+1}}{4^n} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{(-2)(-2)^{2n}}{4^n} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^{n+1} 2$$

знакочередующийся ряд, который расходится по достаточному условию расходимости (общий член ряда не стремится к 0).

Аналогично, при $x = 2$ получаем ряд

$$\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{2^{2n+1}}{4^n} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{2 \cdot 2^{2n}}{4^n} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n 2,$$

который тоже расходится.

Таким образом, областью сходимости данного ряда является интервал $(-2, 2)$, причем ряд сходится абсолютно во всех точках этого интервала.

Пример 2. Найти область сходимости ряда $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x-3)^n}{n^2 2^n}$.

В предыдущем примере ряд содержал только нечетные степени x, поэтому при нахождении области сходимости использовали признак Даламбера.

Здесь имеем ряд вида (2) и для него рационально находить радиус сходимости (см. замечание №3) по коэффициентам ряда, а не применять признак на прямую к общему члену ряда.

Решение.

Найдем радиус сходимости ряда по формуле $R = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right|$, где a_n − коэффициент ряда при степени n.

В нашем случае $a_n = \frac{1}{n^2 2^n}$, $a_{n+1} = \frac{1}{(n+1)^2 2^{n+1}}$.

Тогда $R=\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n^2 2^n}:\frac{1}{(n+1)^2 2^{n+1}}\right)=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{(n+1)^2 \cancel{2^{n+1}}}{n^2 \cancel{2^n}}=$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{(n+1)^2\, 2}{n^2}=2.$$

Интервал сходимости: $(x_0-R,\ x_0+R)=(3-2,\ 3+2)=(1,\ 5).$

Проверим сходимость в крайних точках интервала.

При $x=5$ получим $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(5-3)^n}{n^2 2^n}=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$ – обобщенный гармонический ряд с α = 2, который сходится.

При $x=1$ получим $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(1-3)^n}{n^2 2^n}=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n^2}$ –

знакочередующийся ряд, который сходится абсолютно (т.к. сходится соответствующий ряд из абсолютных величин).

Таким образом, областью сходимости ряда $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(x-3)^n}{n^2\,2^n}$ является отрезок [1, 5], причем во всех точках отрезка ряд сходится абсолютно.

Задание для самоконтроля

Найти область сходимости ряда $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{(2n)!}$.

Равномерная сходимость степенного ряда

Пусть $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ сходится к $S(x)$ на $X = (-R; R)$. Возьмем $x_1 \in X$. Тогда ряды $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x_1^n$ и $\sum_{n=0}^{\infty} |a_n x_1^n|$ сходятся.

Для всех x, $|x| \le |x_1|$ ряд $\sum_{n=0}^{\infty} |a_n x_1^n|$ является мажорантой.

По признаку Вейерштрасса исходный ряд равномерно сходится на $[-|x_1|; |x_1|]$.

Таким образом, всякий степенной ряд, сходящийся на интервале $(-R; R)$, равномерно сходится на любом отрезке, вложенном в интервал сходимости.

Свойства равномерно сходящихся степенных рядов:

1. Сумма $S(x)$ степенного ряда является непрерывной функцией в интервале сходимости.

2. Степенной ряд можно почленно интегрировать в интервале сходимости:

$$\int_a^t S(x)\,dx = \int_a^t a_0\,dx + \int_a^t a_1 x\,dx + \int_a^t a_2 x^2\,dx + \ldots + \int_a^t a_n x^n\,dx + \ldots$$

$(-R < a < t < R)$.

3. Степенной ряд можно почленно дифференцировать в интервале сходимости:

$$S'(x) = a_1 + 2a_2 x + 3a_3 x^2 + \ldots + n a_n x^{n-1} + \ldots$$

После интегрирования и дифференцирования полученные ряды имеют тот же радиус сходимости.

§ 6. Разложение функций в степенные ряды

Для функции $f(x)$, имеющей производные до $(n+1)$-го порядка включительно в окрестности точки x_0, справедлива формула Тейлора:

$$f(x)=f(x_0)+\frac{f'(x_0)}{1!}(x-x_0)+\frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2+$$
$$+\ldots+\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n+R_n(x),$$

где $R_n(x)=\dfrac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1},\ c\in(x_0;x)$ остаточный член.

Если функция $f(x)$ имеет производные всех порядков в окрестности точки x_0 и остаточный член $R_n(x)$ стремится к нулю при $n\to\infty$, то из формулы Тейлора получим разложение функции по степеням $(x-x_0)$, которое называют ***рядом Тейлора***:

$$f(x)=f(x_0)+\frac{f'(x_0)}{1!}(x-x_0)+\frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2+$$

$$+\ldots+\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n+\ldots \quad =\sum_{n=0}^{\infty}\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n.$$

При $x_0 = 0$ получим разложение функции по степеням x, которое называют ***рядом Маклорена***:

$$f(x)=f(0)+\frac{f'(0)}{1!}x+\frac{f''(0)}{2!}x^2+\ldots+\frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n+\ldots=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n.$$

Пример 1. Разложить в ряд Маклорена функцию $f(x) = e^x$.

Решение.

Для ряда Маклорена $x_0 = 0$.

Найдем значения функции $f(x)$ и ее производных в этой точке:

$f(0) = 1,\;\; f' = e^x \;\Rightarrow\; f'(0) = 1,\;\; f'' = e^x \;\Rightarrow\; f''(0) = 1, \;\; \ldots$

Очевидно, что $f^{(n)} = e^x \;\Rightarrow\; f^{(n)}(0) = 1,$ поэтому

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \ldots + \frac{x^n}{n!} + \ldots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}.$$

Радиус сходимости полученного ряда равен бесконечности (проверить самостоятельно), поэтому ряд сходится на всей числовой оси.

Таким образом, $e^x = \sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!},$ где $x \in R$.

Для каждой из элементарных функций остаточный член $R_n(x)$ в формуле Тейлора стремится к нулю при $n\to\infty$ в некотором интервале, т.е. функция разложима в ряд Тейлора.

При разложении в ряд более сложных функций используют разложения элементарных функций в ряд Маклорена и свойства степенных рядов о почленном дифференцировании и почленном интегрировании.

Пример 2. Разложить в ряд Тейлора функцию $f(x) = xe^x$ в окрестности $x_0 = 2$.

Решение.

Точка $x_0 \neq 0$, поэтому делаем замену $x - x_0 = x - 2 = t$.

Тогда $f(t) = (t + 2)e^{t+2} = e^2\,(te^t + 2e^t)$.

Используем разложение показательной функции в ряд Маклорена, полученное в примере 1:

$$f(t) = e^2\left(t\cdot\sum_{n=0}^{\infty}\frac{t^n}{n!} + 2\sum_{n=0}^{\infty}\frac{t^n}{n!}\right) = e^2\left(\sum_{n=0}^{\infty}\frac{t^{n+1}}{n!} + 2\sum_{n=0}^{\infty}\frac{t^n}{n!}\right).$$

Полученные ряды имеют слагаемые с одинаковой степенью, поэтому их нужно объединить в один ряд.

Запишем слагаемые до n-ой степени и приведем подобные:

$$f(t)=e^2\left(\left[t+\frac{t^2}{1!}+\frac{t^3}{2!}+\ldots+\frac{t^n}{(n-1)!}+\ldots\right]+\right.$$

$$\left.+\left[2+\frac{2t}{1!}+\frac{2t^2}{2!}+\ldots+\frac{2t^n}{n!}+\ldots\right]\right)=2e^2+e^2\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{t^n}{(n-1)!}+\frac{2t^n}{n!}\right)=$$

$$=2e^2+e^2\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(n+2)t^n}{n!},\quad t\in R.$$

Делаем обратную замену и получаем искомое разложение:

$$f(x)=2e^2+e^2\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(n+2)(x-2)^n}{n!},\quad x\in R.$$

Пример 3. Разложить в ряд Маклорена функцию $f(x) = \operatorname{arctg} x$.

Решение.

Запишем функцию в виде $f(x) = \operatorname{arctg} \quad = \int\limits_0^x \frac{dt}{t^2+1}$

и воспользуемся разложением

$$\frac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 - \ldots + (-1)^n x^n + \ldots = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n x^n,\ \ x \in \left(-1, 1\right).$$

В нашем случае $\frac{1}{1+t^2} = \sum\limits_{n=0}^{\infty} (-1)^n t^{2n},\ \ t \in \left(-1, 1\right).$

Согласно свойствам степенной ряд можно почленно интегрировать, поэтому

$$f(x)=\int_0^x\left(\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n t^{2n}\right)dt=\sum_{n=0}^{\infty}\left(\int_0^x(-1)^n t^{2n}dt\right)=\sum_{n=0}^{\infty}\left(\left.\frac{(-1)^n t^{2n+1}}{2n+1}\right|_0^x\right)=$$

$$=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n x^{2n+1}}{2n+1}.$$

Найдем область сходимости полученного ряда. Т.к. при интегрировании радиус сходимости не изменился, то интервал сходимости тоже не меняется $x\in(-1,\,1)$.

Нужно проверить крайние точки этого интервала.

При x = 1 получим $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{2n+1}$ знакочередующийся ряд.

Соответствующий абсолютный ряд

$\sum_{n=0}^{\infty}\left|\frac{(-1)^n}{2n+1}\right|=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{2n+1}\sim\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$, поэтому расходится.

Проверяем ряд на условную сходимость (по признаку Лейбница):

1. $a_n = \dfrac{1}{2n+1}, \ a_{n+1} = \dfrac{1}{2n+3} \quad \Rightarrow \quad a_n > a_{n+1}$

2. $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1}{2n+1} = 0.$

Оба условия признака Лейбница выполняются, поэтому ряд $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \dfrac{(-1)^n}{2n+1}$ сходится условно.

При $x = -1$ получим ряд $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \dfrac{(-1)^{n+1}}{2n+1}$, который отличается от предыдущего только знаком. Поэтому этот ряд тоже сходится условно.

Таким образом, $\operatorname{arctg} x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{2n+1}$, где $x \in [-1, 1]$.

(В точках $x = \pm 1$ ряд сходится условно, в остальных точках отрезка ряд сходится абсолютно).

Домашнее задание

Записать разложения в ряд Маклорена основных элементарных функций: e^x, $\sin x$, $\cos x$, $\ln(1+x)$, $(1+x)^\alpha$, $\frac{1}{1-x}$, $\frac{1}{1+x}$; указать область сходимости каждого ряда.