Лекция № 2

Способы вычисления предела последовательности

Вопросы для рассмотрения на лекции

1. СХОДЯЩИЕСЯ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТИ И ИХ СВОЙСТВА
2. БЕСКОНЕЧНО БОЛЬШИЕ И БЕСКОНЕЧНО МАЛЫЕ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТИ И СВЯЗЬ МЕЖДУ НИМИ
3. ОПЕРАЦИИ СО СХОДЯЩИМИСЯ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТЯМИ
4. МЕТОДЫ ВЫЧИСЛЕНИЯ ПРЕДЕЛА ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТИ.
5. ЧИСЛО Е

Определение **предела** последовательности

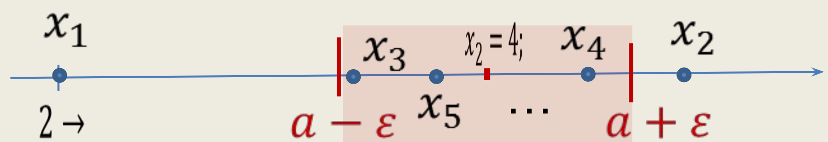
$$\not\subset$$

$$\Longrightarrow$$

ЗНАТЬ НАИЗУСТЬ

Геометрический смысл **предела** последовательности

если неравенство $|x_n - a| < \varepsilon$ выполняется для всех $n > N(\varepsilon)$, это значит, что все элементы последовательности, следующие за x_N, находятся в выбранной ε- окрестности точки a. **Вне** этой окрестности лежит лишь **КОНЕЧНОЕ** множество элементов.



Число a наз. ***пределом*** последовательности $\{x_n\}$, если в ***любой ε- окрестности*** точки a ***находятся ВСЕ элементы последовательности, начиная с некоторого номера*** (зависящего только от ε).

Поэтому **добавление или исключение КОНЕЧНОГО** множества элементов **не влияет** на **сходимость** последовательности и **значение ее предела**.

Сходящаяся последовательность

Последовательность, у которой ***существует КОНЕЧНЫЙ*** **предел**, наз. ***СХОДЯЩЕЙСЯ***.

Последовательность, у которой **не существует КОНЕЧНОГО предела**, наз. **РАСХОДЯЩЕЙСЯ**.

ПРИМЕРЫ:

1) Последовательность всех квадратов натуральных чисел: 2 **РАСХОДЯЩАЯСЯ**

2) Последовательность N; ***СХОДЯЩАЯСЯ***

3) Последовательность π **РАСХОДЯЩАЯСЯ**

4) Последовательность $\in$ принадлежит ***СХОДЯЩАЯСЯ***

Свойства ***сходящихся*** последовательностей

1) ***Сходящаяся*** последовательность имеет только **ОДИН** предел.

Пусть даны два числа $a, b \in R, a < b$;

$$(a-\varepsilon, a+\varepsilon)$$

Бесконечно малая и бесконечно большая последовательность

Последовательность $\{\alpha_n\}$ наз. БЕСКОНЕЧНО МАЛОЙ (БМ), если $\lim\limits_{n\to\infty} \alpha_n = 0$.

Задание: сформулируйте это определение на языке кванторов.

$$\lim_{n\to\infty} \alpha_n = 0 \quad : \quad \forall \varepsilon > 0 \ \exists N(\varepsilon) \in \mathbf{N}: \forall n > N(\varepsilon) \qquad |\alpha_n| < \varepsilon.$$

Последовательность $\{\mathrm{X}_n\}$ наз. БЕСКОНЕЧНО БОЛЬШОЙ (ББ) если для любого положительного числа A найдется номер $N(\mathrm{A})$ такой, что для всех последующих элементов последовательности верно неравенство: $|\mathrm{X}_n| > \mathrm{A}$.

Обозначение: $\lim\limits_{n\to\infty} \mathrm{X}_n = \infty$

Задание: сформулируйте это определение на языке кванторов.

$$\lim_{n\to\infty} \mathrm{X}_n = \infty \quad : \quad \forall \mathrm{A} > 0 \ \exists \ N(\mathrm{A}) \in \mathbf{N} : \forall n > N(\mathrm{A}) \qquad |\mathrm{X}_n| > \mathrm{A}.$$

Связь между БМ и ББ последовательностями

Если последовательность $\{\alpha_n\}$ БЕСКОНЕЧНО МАЛАЯ и $\forall n \quad \alpha_n \neq 0$, то

последовательность $\left\{\frac{1}{\alpha_n}\right\}$ является БЕСКОНЕЧНО БОЛЬШОЙ:

$$\boxed{\lim_{n\to\infty} \alpha_n = 0 \ , \forall n \quad \alpha_n \neq 0 \Rightarrow \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\alpha_n} = \infty}$$

Справедливо и обратное:

если последовательность $\{\mathrm{X}_n\}$ БЕСКОНЕЧНО БОЛЬШАЯ, то

последовательность $\left\{\frac{1}{X_n}\right\}$ является БЕСКОНЕЧНО МАЛОЙ.

$$\boxed{\lim_{n\to\infty} \mathrm{X}_n = \infty \ \Rightarrow \lim_{n\to\infty} \frac{1}{X_n} = 0}$$

Операции со ***сходящимися*** последовательностями

Пусть $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$, $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = b$, тогда:

1) $\lim\limits_{n\to\infty}(x_n + y_n) = a + b$;

2) $\lim\limits_{n\to\infty}(x_n - y_n) = a - b$;

3) $\lim\limits_{n\to\infty}(x_n \cdot y_n) = a \cdot b$;

4) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{x_n}{y_n}\right) = \frac{a}{b}$, если $y_n \neq 0$ и $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = b \neq 0$

5) $\lim\limits_{n\to\infty} {x_n}^{y_n} = a^b$

Операции, которые не определены

1) $1 \cdot (1 - (-1)^1) = 2;$

$+(-1)^3 \cdot \frac{1}{3} = 1 - \frac{1}{3} = \frac{2}{3};\quad 2 \cdot (1 - (-1)^2) = 0;$

3) $3 \cdot (1 - (-1)^3) = 6;$

$+(-1)^4 \cdot \frac{1}{4} = 1 + \frac{1}{4} = \frac{5}{4};\quad 4 \cdot (1 - (-1)^4) = 0;$

$+(-1)^5 \cdot \frac{1}{5} = 1 - \frac{1}{5} = \frac{4}{5};\quad 5 \cdot (1 - (-1)^5) = 10;$

6) ∞^0

7) $0 \cdot (\pm\infty)$

неопределенность

Методы вычисления предела числовой последовательности (раскрытие неопределенности)

- Метод вынесения старшей степени
- Применение формул сокращенного умножения
- Метод умножения на сопряженный множитель
- Применение формул арифметической и геометрической прогрессий
- Пределы последовательностей, содержащих факториалы.
- Вычисление пределов с помощью числа e

ПРИМЕР: ВЫЧИСЛИТЬ $\lim_{n\to\infty}\frac{1-2n^2}{2+4n^2}$ Неопределенность вида $\frac{\infty}{\infty}$

РЕШЕНИЕ: Вынесем в числителе и в знаменателе старшую степень n^2:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1-2n^2}{2+4n^2}=\left[\frac{\infty}{\infty}\right]=\lim_{n\to\infty}\frac{\cancel{n^2}\left(\frac{1}{n^2}-\frac{2\cancel{n^2}}{\cancel{n^2}}\right)}{\cancel{n^2}\left(\frac{2}{n^2}+\frac{4\cancel{n^2}}{\cancel{n^2}}\right)}=\lim_{n\to\infty}\frac{\left(\overset{0}{\frac{1}{n^2}}-2\right)}{\left(\underset{0}{\frac{2}{n^2}}+4\right)}=\frac{-2}{4}=-\frac{1}{2}$$

ОТВЕТ

Этот метод называется ВЫНЕСЕНИЕ СТАРШЕЙ СТЕПЕНИ .

$$\lim_{n\to\infty}\frac{(n+1)^3-n^3}{(n+1)^2-2n^2}= \qquad \left\{\begin{matrix}(a+b)^3=a^3+3a^2b+3ab^2+b^3\\ a=n\,;\,b=1\,;\end{matrix}\right\}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{(n^3+3n^2\cdot 1+3n\cdot 1^2+1^3)-n^3}{(n^2+2n+1)-2n^2}=\lim_{n\to\infty}\frac{n^3+3n^2+3n+1-n^3}{n^2+2n+1-2n^2}=$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{3n^2+3n+1}{2n+1-n^2}=$$

Вынесем в числителе и в знаменателе старшую степень n^2:

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{n^2\left(\frac{3n^2}{n^2}+\frac{3n}{n^2}+\frac{1}{n^2}\right)}{n^2\left(\frac{2n}{n^2}+\frac{1}{n^2}-\frac{n^2}{n^2}\right)}=\lim_{n\to\infty}\frac{\left(3+\overset{0}{\frac{3}{n}}+\overset{0}{\frac{1}{n^2}}\right)}{\left(\underset{0}{\frac{2}{n}}+\underset{0}{\frac{1}{n^2}}-1\right)}=\frac{3}{-1}=-3;$$

ОТВЕТ

Метод умножения на сопряженный множитель для квадратного корня

ПРИМЕР 1. Вычислить $\lim_{n\to\infty}\left(\sqrt{n+2}-\sqrt{n}\right) = \ [\infty-\infty]$, неопределенность

РЕШЕНИЕ : и как уничтожить? $\left(\sqrt{n+2}\,\right)^2 = n+2$ $\quad (\sqrt{n}\,)^2 = n$

Квадратный корень уничтожается обратной операцией - - возведением в квадрат (во вторую степень).

есть $(a-b)(a+?b) = a^2-b^2$

Разность $(a-b)$ надо умножить на сумму $(a+b)$, чтобы получить разность квадратов и избавиться от квадратных корней.

Если $a=\sqrt{x}\,, b=\sqrt{y}\,,$ то формула примет вид:

$$(\sqrt{x}-\sqrt{y})(\sqrt{x}+\sqrt{y}) = (\sqrt{x})^2-(\sqrt{y})^2 = \not\subset$$

СОПРЯЖЕННЫЙ МНОЖИТЕЛЬ
дополняет до РАЗНОСТИ КВАДРАТОВ разность квадратных корней.

$\left\{ (a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3 \right\}$ $\sqrt{n+2}$ $\sqrt{n}$

$a = n\,;\, b = 1\,;$

Здесь $= \sqrt{x},$ $= \sqrt{y}$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{(n^3 + 3n^2\cdot 1 + 3n\cdot 1^2 + 1^3) - n^3}{(n^2 + 2n + 1) - 2n^2} =$$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n^3 + 3n^2 + 3n + 1 - n^3}{n^2 + 2n + 1 - 2n^2} =$$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\left(3 + \frac{3}{n} + \frac{1}{n^2}\right)}{\left(\frac{2}{n} + \frac{1}{n^2} - 1\right)} = (\sqrt{x})^2 - (\sqrt{y})^2$$

$$= \quad = \lim_{n\to\infty} \frac{3n^2 + 3n + 1}{2n + 1 - n^2} =$$

Вынесем в числителе и в знаменателе старшую степень n^2:

O $\quad C_{+}$

ОТВ

ЕТ

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{n^2\left(\frac{3n^2}{n^2} + \frac{3n}{n^2} + \frac{1}{n^2}\right)}{n^2\left(\frac{2n}{n^2} + \frac{1}{n^2} - \frac{n^2}{n^2}\right)} =$$

$(+\infty)$ $\quad (+\infty) = \infty$

$\not\subset$ $\quad 0\,;\; X_n = \sqrt{n+2} + \sqrt{n}\ \frac{3}{-1} = -3;$ ОТВЕТ : -3

$\in$ принадлежит $\quad \left[\frac{1}{\infty}\right] = 0$

ВЫЧИСЛЕНИЕ ПРЕДЕЛА ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТИ : - ПРИМЕНЕНИЕ ФОРМУЛ СУММЫ АРИФМЕТИЧЕСКОЙ И ГЕОМЕТРИЧЕСКОЙ ПРОГРЕССИИ

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{n^2\left(\frac{3n^2}{n^2} + \frac{3n}{n^2} + \frac{1}{n^2}\right)}{n^2\left(\frac{2n}{n^2} + \frac{1}{n^2} - \frac{n^2}{n^2}\right)} =$$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1 - 2n^2}{2 + 4n^2} = \left[\frac{\infty}{\infty}\right] =$$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{(n+1)^3 - n^3}{(n+1)^2 - 2n^2} = \lim_{n\to\infty} \frac{(n^3 + 3n^2\cdot 1 + 3n\cdot 1^2 + 1^3) - n^3}{(n^2 + 2n + 1) - 2n^2} =$$

$$\left((a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3;\ a = n;\ b = 1;\right)$$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n^3 + 3n^2 + 3n + 1 - n^3}{n^2 + 2n + 1 - 2n^2} = = \lim_{n\to\infty} \frac{3n^2 + 3n + 1}{2n + 1 - n^2} = \frac{7}{6}$$

Вынесем в числителе и в знаменателе старшую степень n^2:

ОТВЕТ

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\left(3+\frac{3}{n}+\frac{1}{n^2}\right)}{\left(1\frac{2}{n}+\frac{1}{n^2}-\pi 1\right)}=$$

в знаменателе задана арифметическая прогрессия

применим формулу суммы:

$$\infty \quad \frac{a_1+a_n}{2}\cdot n$$

$$=\lim_{n\to\infty}\left[\frac{n+2}{\frac{1+n}{2}\cdot n}-\frac{2}{3}\right]=$$

$$=\lim_{n\to\infty}\left[\frac{(n+2)\cdot 2}{(1+n)\cdot n}-\frac{2}{3}\right]=\lim_{n\to\infty}\left[\frac{3\cdot(n+2)\cdot 2-2\cdot(1+n)\cdot n}{(1+n)\cdot n\cdot 3}\right]=$$

$$=\lim_{n\to\infty}\left[\frac{6n+12-2n-2n^2}{3n+3n^2}\right]=\lim_{n\to\infty}\left[\frac{4n+12-2n^2}{3n+3n^2}\right]=0\cdot(\pm\infty)$$

$$=\lim_{n\to\infty}\left[\frac{\cancel{n^2}\left(\frac{4n}{n^2}+\frac{12}{n^2}-2\right)}{\cancel{n^2}\left(\frac{3n}{n^2}+3\right)}\right]=\lim_{n\to\infty}\left[\frac{\left(\overset{\infty^0}{\frac{4}{n}}+\overset{0}{\frac{12}{n^2}}-2\right)}{\left(\underset{0}{\frac{3}{n}}+3\right)}\right]=-\frac{2}{3}$$

ОТВЕТ

+∞ $\quad 4n \quad$ +∞

$$\lim_{n \to \infty} \frac{4n}{4n} = +$$

в числителе задана арифметическая прогрессия: $d = 2$

применим формулу суммы для $k = n$:

$$S_n = \frac{a_1 + a_n}{2} \cdot n$$

в знаменателе задана арифметическая прогрессия: $d = 2$

применим формулу суммы для $k = n$:

$$S_n = \frac{a_1 + a_n}{2} \cdot n$$

$($ $)$

$($ $)$

$($ $)$

$=$ $\quad n$

СОПРЯЖЕННЫЙ МНОЖИТЕЛЬ $(a^2 + ab + b^2) =$

$N;$

∞

$\sqrt[3]{n^3+1}\ 1$ ОТВЕТ

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{3+2}{6}+\frac{9+4}{36}+\cdots+\frac{3^n+2^n}{6^n}\right)=$$

$$=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{3+2}{6}+\frac{3^2+2^2}{6^2}+\cdots+\frac{3^n+2^n}{6^n}\right)=$$

$$=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{3}{6}+\frac{2}{6}+\frac{3^2}{6^2}+\frac{2^2}{6^2}+\cdots+\frac{3^n}{6^n}+\frac{2^n}{6^n}\right)=$$

$$=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\left(\frac{3}{6}\right)^2+\left(\frac{2}{6}\right)^2+\cdots+\left(\frac{3}{6}\right)^n+\left(\frac{2}{6}\right)^n\right)=$$

$$=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\left(\frac{1}{2}\right)^2+\left(\frac{1}{3}\right)^2+\cdots+\left(\frac{1}{2}\right)^n+\left(\frac{1}{3}\right)^n\right)=$$

$$=\lim_{n\to\infty}\left(\left[\frac{1}{2}+\left(\frac{1}{2}\right)^2+\cdots+\left(\frac{1}{2}\right)^n\right]+\left[\frac{1}{3}+\left(\frac{1}{3}\right)^2+\cdots+\left(\frac{1}{3}\right)^n\right]\right)=\left\{S_n=b_1\cdot\frac{1-q^n}{1-q}\right\}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\left(\left[\frac{1}{2}\cdot\frac{1-\overset{0}{\left(\frac{1}{2}\right)^n}}{1-\frac{1}{2}}\right]+\left[\frac{1}{3}\cdot\frac{1-\overset{0}{\left(\frac{1}{3}\right)^n}}{1-\frac{1}{3}}\right]\right)=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{\frac{1}{2}}+\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{\frac{2}{3}}=1+\frac{1}{2}=\frac{3}{2}$$

ОТВЕТ

Второй замечательный предел

ЗНАТЬ НАИЗУСТЬ

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = [1^\infty] = e$$

Домашнее задание

Выполнить задачу 1 из своего варианта РГР