6.9. ВТОРОЙ ЗАМЕЧАТЕЛЬНЫЙ ПРЕДЕЛ

Рассмотрим числовую последовательность

$$a_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$$

где $a_1=2$, $a_2=2.25$, $a_3=2.37$ …

Можно предположить, что эта последовательность будет возрастающей.

Воспользуемся формулой

бинома Ньютона:

$$(1+x)^m = 1 + mx + \frac{m(m-1)}{2!}x^2 + \frac{m(m-1)(m-2)}{3!}x^3 + \ldots$$

$$\ldots + \frac{m(m-1)\ldots(m-n+1)}{n!}x^n$$

где m – любое действительное число.

В нашем случае:

$$a_n = \left(1+\frac{1}{n}\right)^n = 1 + n\cdot\frac{1}{n} + \frac{n(n-1)}{1\cdot 2}\cdot\frac{1}{n^2} +$$

$$+ \frac{n(n-1)(n-2)}{1\cdot 2\cdot 3}\cdot\frac{1}{n^3} + \ldots + \frac{n(n-1)\ldots(n-(n-1))}{1\cdot 2\cdot \ldots \cdot n}\cdot\frac{1}{n^n} =$$

$$= 2 + \frac{1}{1\cdot 2}\left(1-\frac{1}{n}\right) + \frac{1}{1\cdot 2\cdot 3}\left(1-\frac{1}{n}\right)\cdot\left(1-\frac{2}{n}\right) + \ldots$$

$$\ldots + \frac{1}{1\cdot 2\cdot 3\cdot \ldots \cdot n}\left(1-\frac{1}{n}\right)\cdot\left(1-\frac{2}{n}\right)\cdot\ldots\cdot\left(1-\frac{n-1}{n}\right)$$

Видно, что с ростом *n* увеличивается число положительных слагаемых, которых всего будет *n+1*, и растет величина каждого слагаемого, т.е.

$$a_1 < a_2 < a_3 < \ldots < a_n < \ldots$$

Это значит, что данная последовательность <u>возрастает.</u>

Теперь покажем, что она является <u>ограниченной</u>.

Поскольку каждая скобка меньше единицы, отбрасываем эти скобки и получаем неравенство:

$$a_n < 2 + \frac{1}{1\cdot 2} + \frac{1}{1\cdot 2\cdot 3} + ... + \frac{1}{1\cdot 2\cdot 3\cdot ...\cdot n}$$

Теперь каждую дробь в правой части заменяем большей дробью с двойкой в знаменателе:

$$\frac{1}{1\cdot 2\cdot 3} < \frac{1}{2^2} \quad ... \quad \frac{1}{1\cdot 2\cdot 3\cdot ...\cdot n} < \frac{1}{2^{n-1}}$$

Получаем:

$$a_n < 2 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + ... + \frac{1}{2^{n-1}}$$

Сумма $$\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+\ldots+\frac{1}{2^{n-1}}$$

есть сумма *n-1* членов геометрической прогрессии, где первый член

$$a_1=\frac{1}{2}$$

и знаменатель $$q=\frac{1}{2}$$

По формуле суммы членов геометрической прогрессии имеем:

$$S_{n-1} = \frac{a_1(q^{n-1}-1)}{q-1} = \frac{\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2^{n-1}}-1\right)}{\frac{1}{2}-1} = 1 - \frac{1}{2^{n-1}} < 1$$

Т.к. $S_{n-1}<1$**, то**

$$a_n = \left(1+\frac{1}{n}\right)^n < 2+1 = 3$$

Действительно, данная последовательность является ограниченной.

Согласно признаку существования предела, монотонная и ограниченная последовательность имеет предел.

Числом е или вторым замечательным пределом называется предел числовой последовательности

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = e$$

e – число Эйлера
e=2,718281…

Можно показать, что функция

$$f(x)=\left(1+\frac{1}{x}\right)^{x}$$

при $x\to\pm\infty$

где *x* пробегает все значения, а не только целые, тоже имеет предел, равный *e*:

$$\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^{x}=e$$

Второй замечательный предел

Пусть $y = \frac{1}{x}$, тогда

$$\lim_{y \to 0} (1 + y)^{\frac{1}{y}} = e$$

Второй замечательн
предел

Примеры.

1

Вычислить

$$\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{5}{x}\right)^{3x}$$

Решение:

$$\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{5}{x}\right)^{3x}=\lim_{x\to\infty}\left[\left(1+\frac{5}{x}\right)^{\frac{x}{5}}\right]^{\frac{5}{\cancel{x}}\cdot 3\cancel{x}}=$$

$$=\underbrace{\lim_{x\to\infty}\left[\left(1+\frac{5}{x}\right)^{\frac{x}{5}}\right]}_{e}^{15}=e^{15}$$

2

Вычислить

$$\lim_{y\to 0}(1-3y)^{\frac{2}{y}}$$

Решение:

$$\lim_{y\to 0}(1-3y)^{\frac{2}{y}} = \lim_{y\to 0}\left[(1-3y)^{-\frac{1}{3y}}\right]^{\frac{2}{\cancel{y}}\cdot(-3\cancel{y})} =$$

$$= \underbrace{\lim_{y\to 0}\left[(1-3y)^{-\frac{1}{3y}}\right]}_{e}{}^{-6} = e^{-6}$$

3

В качестве еще одного примера рассмотрим задачу о непрерывном начислении процентов.

Первоначальный вклад в банк составляет Q_0 денежных единиц. Банк выплачивает ежегодно P % годовых.

Найти размер вклада через t лет.

При использовании простых процентов размер вклада ежегодно будет увеличиваться на одну и ту же величину

$$\frac{P}{100} \cdot Q_0$$

То есть $$Q_1 = Q_0\left(1+\frac{P}{100}\right)$$

$$Q_2 = Q_0\left(1+\frac{2P}{100}\right) \quad \ldots$$

$$Q_t = Q_0\left(1+\frac{t\cdot P}{100}\right)$$

На практике часто применяются сложные проценты. В этом случае размер вклада ежегодно будет увеличиваться в одно и то же число

$$\left(1+\frac{P}{100}\right)$$

раз, т.е.

$$Q_1 = Q_0\left(1+\frac{P}{100}\right)$$

$$Q_2 = Q_0\left(1+\frac{P}{100}\right)^2 \qquad \ldots$$

$$Q_t = Q_0\left(1+\frac{P}{100}\right)^t$$

Если начислять проценты не один, а *n* раз в году, то при ежегодном приросте *P %*, процент начисления за *1/n* часть года составляет *P/n* %.

Тогда размер вклада за *t* лет при *nt* начислениях составит

$$Q_t = Q_0\left(1+\frac{P}{100n}\right)^{nt}$$

Будем полагать, что проценты по вкладу начисляются каждое полугодие (*n=2*), ежеквартально (*n=4*), ежемесячно (*n=12*), каждый день (*n=365*), каждый час (*n=8760*) и далее непрерывно $x \to \infty$

Тогда размер вклада за *t* лет составит

$$Q_t = \lim_{n\to\infty} Q_0\left(1+\frac{P}{100n}\right)^{nt} = Q_0 \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{P}{100n}\right)^{nt} =$$

$$= Q_0 \lim_{n\to\infty} \underbrace{\left[\left(1+\frac{P}{100n}\right)^{\frac{100n}{P}}\right]}_{e}^{\frac{P}{100n}\cdot nt} = \boxed{Q_0 \cdot e^{\frac{Pt}{100}} = Q_t}$$

Эта формула выражает показательный (экспоненциальный) рост (при *P>0*) или убывание (при *P<0*). Погрешность вычисленной суммы вклада по формуле непрерывного начисления процентов по сравнению с формулой сложных процентов оказывается незначительной (около 2.5 %).