

## 6.9. ВТОРОЙ ЗАМЕЧАТЕЛЬНЫЙ ПРЕДЕЛ

Рассмотрим числовую последовательность

$$a_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$$

где  $a_1=2$ ,  $a_2=2.25$ ,  $a_3=2.37 \dots$

Можно предположить, что эта последовательность будет возрастающей.

Воспользуемся формулой

бинома Ньютона:

$$(1+x)^m = 1 + mx + \frac{m(m-1)}{2!}x^2 + \frac{m(m-1)(m-2)}{3!}x^3 + \dots$$
$$\dots + \frac{m(m-1)\dots(m-n+1)}{n!}x^n$$

где  $m$  – любое действительное число.

В нашем случае:

$$\begin{aligned}
 a_n &= \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = 1 + n \cdot \frac{1}{n} + \frac{n(n-1)}{1 \cdot 2} \cdot \frac{1}{n^2} + \\
 &+ \frac{n(n-1)(n-2)}{1 \cdot 2 \cdot 3} \cdot \frac{1}{n^3} + \dots + \frac{n(n-1)\dots(n-(n-1))}{1 \cdot 2 \cdot \dots \cdot n} \cdot \frac{1}{n^n} =
 \end{aligned}$$

$$= 2 + \frac{1}{1 \cdot 2} \left(1 - \frac{1}{n}\right) + \frac{1}{1 \cdot 2 \cdot 3} \left(1 - \frac{1}{n}\right) \cdot \left(1 - \frac{2}{n}\right) + \dots$$

$$\dots + \frac{1}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \dots \cdot n} \left(1 - \frac{1}{n}\right) \cdot \left(1 - \frac{2}{n}\right) \cdot \dots \cdot \left(1 - \frac{n-1}{n}\right)$$

Видно, что с ростом  $n$  увеличивается число положительных слагаемых, которых всего будет  $n+1$ , и растет величина каждого слагаемого, т.е.

$$a_1 < a_2 < a_3 < \dots < a_n < \dots$$

Это значит, что данная последовательность возрастает.

Теперь покажем, что она является ограниченной.

Поскольку каждая скобка меньше единицы, отбрасываем эти скобки и получаем неравенство:

$$a_n < 2 + \frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{1 \cdot 2 \cdot 3} + \dots + \frac{1}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \dots \cdot n}$$

**Теперь каждую дробь в правой части заменяем большей дробью с двойкой в знаменателе:**

$$\frac{1}{1 \cdot 2 \cdot 3} < \frac{1}{2^2} \quad \dots \quad \frac{1}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \dots \cdot n} < \frac{1}{2^{n-1}}$$

**Получаем:**

$$a_n < 2 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \dots + \frac{1}{2^{n-1}}$$

Сумма  $\frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \dots + \frac{1}{2^{n-1}}$

есть сумма  $n-1$  членов геометрической прогрессии, где первый член

$$a_1 = \frac{1}{2}$$

и знаменатель  $q = \frac{1}{2}$

По формуле суммы членов геометрической прогрессии имеем:

$$S_{n-1} = \frac{a_1(q^{n-1} - 1)}{q - 1} = \frac{\frac{1}{2} \left( \frac{1}{2^{n-1}} - 1 \right)}{\frac{1}{2} - 1} = 1 - \frac{1}{2^{n-1}} < 1$$

**Т.к.  $S_{n-1} < 1$ , то**

$$a_n = \left( 1 + \frac{1}{n} \right)^n < 2 + 1 = 3$$

**Действительно, данная последовательность является ограниченной.**

Согласно признаку существования предела,  
монотонная и ограниченная  
последовательность имеет предел.

*Числом  $e$  или вторым замечательным  
пределом называется предел  
числовой последовательности*

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left( 1 + \frac{1}{n} \right)^n = e$$



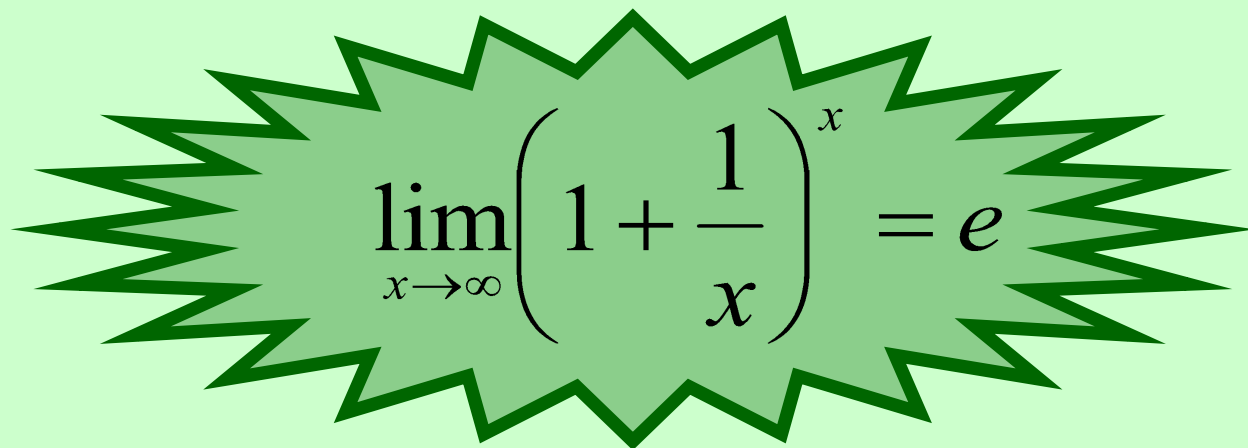
*$e$  – число Эйлера  
 $e=2,718281\dots$*

**Можно показать, что функция**

$$f(x) = \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x$$

**при  $x \rightarrow \pm\infty$**

**где  $x$  пробегает все значения, а не только  
целые, тоже имеет предел, равный  $e$ :**


$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left( 1 + \frac{1}{x} \right)^x = e$$

*Второй замечательный  
предел*

Пусть  $y = \frac{1}{x}$ , тогда

$$\lim_{y \rightarrow 0} (1 + y)^{\frac{1}{y}} = e$$

*Второй замечательный  
предел*

# Примеры.

1

*Вычислить*

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left( 1 + \frac{5}{x} \right)^{3x}$$

# Решение:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{5}{x}\right)^{3x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \left[ \left(1 + \frac{5}{x}\right)^{\frac{x}{5}} \right]^{\frac{5}{x} \cdot 3x} =$$

$$= \lim_{x \rightarrow \infty} \left[ \left(1 + \frac{5}{x}\right)^{\frac{x}{5}} \right]^{15} = e^{15}$$

$e$

2

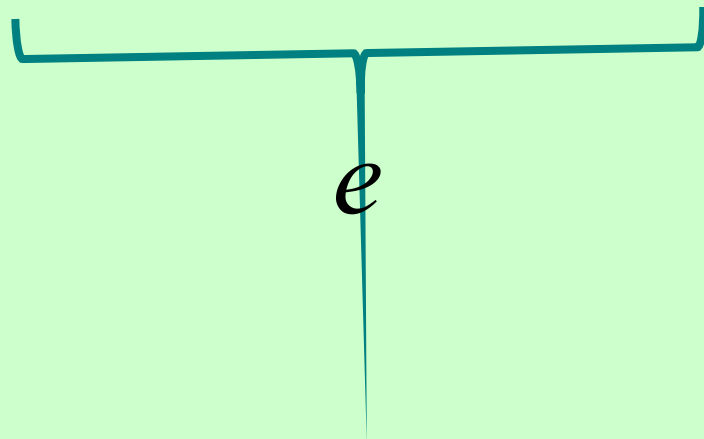
*Вычислить*

$$\lim_{y \rightarrow 0} (1 - 3y)^{\frac{2}{y}}$$

# Решение:

$$\lim_{y \rightarrow 0} (1 - 3y)^{\frac{2}{y}} = \lim_{y \rightarrow 0} \left[ (1 - 3y)^{-\frac{1}{3y}} \right]^{\frac{2}{y} \cdot (-3y)} =$$

$$= \lim_{y \rightarrow 0} \left[ (1 - 3y)^{-\frac{1}{3y}} \right]^{-6} = e^{-6}$$

  
 $e$



*В качестве еще одного примера рассмотрим задачу о непрерывном начислении процентов.*

Первоначальный вклад в банк составляет  $Q_0$  денежных единиц. Банк выплачивает ежегодно  $P$  % годовых.

Найти размер вклада через  $t$  лет.

При использовании простых процентов размер вклада ежегодно будет увеличиваться на одну и ту же величину

$$\frac{P}{100} \cdot Q_0$$



**То есть**

$$Q_1 = Q_0 \left( 1 + \frac{P}{100} \right)$$
$$Q_2 = Q_0 \left( 1 + \frac{2P}{100} \right) \quad \dots$$
$$Q_t = Q_0 \left( 1 + \frac{t \cdot P}{100} \right)$$

**На практике часто применяются сложные проценты. В этом случае размер вклада ежегодно будет увеличиваться в одно и то же число**

$$\left( 1 + \frac{P}{100} \right)$$

**раз, т.е.**

$$Q_1 = Q_0 \left( 1 + \frac{P}{100} \right)$$

$$Q_2 = Q_0 \left( 1 + \frac{P}{100} \right)^2 \quad \dots$$

$$Q_t = Q_0 \left( 1 + \frac{P}{100} \right)^t$$

Если начислять проценты не один, а  $n$  раз в году, то при ежегодном приросте  $P$  %, процент начисления за  $1/n$  часть года составляет  $P/n$  %.

Тогда размер вклада за  $t$  лет при  $nt$  начислениях составит

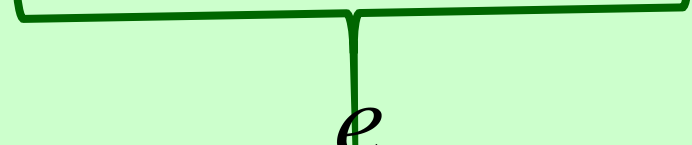
$$Q_t = Q_0 \left( 1 + \frac{P}{100n} \right)^{nt}$$

Будем полагать, что проценты по вкладу начисляются каждое полугодие ( $n=2$ ), ежеквартально ( $n=4$ ), ежемесячно ( $n=12$ ), каждый день ( $n=365$ ), каждый час ( $n=8760$ ) и далее непрерывно  $x \rightarrow \infty$

Тогда размер вклада за  $t$  лет составит

$$Q_t = \lim_{n \rightarrow \infty} Q_0 \left( 1 + \frac{P}{100n} \right)^{nt} = Q_0 \lim_{n \rightarrow \infty} \left( 1 + \frac{P}{100n} \right)^{nt} =$$

$$= Q_0 \lim_{n \rightarrow \infty} \left[ \left( 1 + \frac{P}{100n} \right)^{\frac{100n}{P}} \right]^{\frac{P}{100n} \cdot nt} = Q_0 \cdot e^{\frac{Pt}{100}} = Q_t$$


  
 $e$

Эта формула выражает показательный (экспоненциальный) рост (при  $P > 0$ ) или убывание (при  $P < 0$ ). Погрешность вычисленной суммы вклада по формуле непрерывного начисления процентов по сравнению с формулой сложных процентов оказывается незначительной (около 2.5 %).