

# ПОДГОТОВКА К ЕГЭ

Задачи на совместную работу

# Работу характеризуют три величины:

время работы - **t**;

объем работы - **A**;

производительность (объем произведенной работы в единицу времени) - **p**.

Соотношение между этими величинами следующее:  
*объем работы = время работы • производительность*

$$A = t \cdot p$$

Производительность совместного труда равна сумме производительностей всех работающих.

$$P_{\text{совм}} = P_1 + P_2 + \dots + P_n$$

# Правила решения задач на работу

- 1.  $A = p \cdot t$ , из этой формулы легко найти  $t$  или  $p$ .
- 2. Если объем работы не важен в задаче и нет никаких данных, позволяющих его найти — работа принимается за единицу. Построен дом (один), покрашен забор (один), наполнен резервуар. А вот если речь идет о количестве кирпичей, количестве деталей, литрах воды — работа как раз и равна этому количеству.
- 3. Если трудятся двое рабочих (два экскаватора, два мастера, Даша и Маша...) или трое (не важно) — их производительности складываются. Очень логичное правило.
- 4. В качестве переменной  $x$  удобно взять (в абсолютном большинстве задач) именно производительность.

# Задача 1

- Заказ на 240 деталей первый рабочий выполняет на 1 час быстрее, чем второй. Сколько деталей в час делает второй рабочий, если известно, что первый за час делает на 1 деталь больше?

	$p$	$t$	$A$
1 рабочий	$x + 1$	$t_1 = \frac{240}{x + 1}$	240
2 рабочий	$x$	$t_2 = \frac{240}{x}$	240

**Первый рабочий выполнил заказ на час быстрее. Следовательно, времени он затрачивает на 1 час меньше, чем второй, то есть  $t_1$  на 1 меньше, чем  $t_2$ , значит**

$$t_1 = t_2 - 1$$
$$\frac{240}{x+1} = \frac{240}{x} - 1$$

Очевидно, производительность рабочего не может быть отрицательной величиной. Значит, отрицательный корень не подходит.

$$\frac{240}{x+1} = \frac{240}{x} - 1 \quad | \cdot x(x+1)$$

$$240x = 240(x+1) - x(x+1)$$

$$240x + x^2 + x - 240x - 240 = 0$$

$$x^2 + x - 240 = 0$$

$$D = 961 \quad x_1 = 15 \quad x_2 = -16$$

**Ответ: 15**

# Задача 2

- На изготовление 40 деталей первый рабочий затрачивает на 6 часов меньше, чем второй рабочий на изготовление 70 таких же деталей. Известно, что первый рабочий за час делает на 3 детали больше, чем второй. Сколько деталей в час делает второй рабочий?

	$p$	$t$	$A$
1 рабочий	$x + 3$	$\frac{40}{x + 3}$	40
2 рабочий	$x$	$\frac{70}{x}$	70

- Сравнение будем проводить по времени. Сказано, что первый затрачивает на 6 часов меньше, чем второй. Значит:

$$\frac{40}{x+3} = \frac{70}{x} - 6 \quad | \cdot x(x+3)$$

$$40x = 70(x+3) - 6x(x+3)$$

$$6x^2 - 12x - 210 = 0$$

$$x^2 - 2x - 35 = 0$$

$$D = 144 \quad x_1 = 7 \quad x_2 = -5$$

**Ответ: 7**

# Задача 3

- Первая труба пропускает на 4 литра воды в минуту меньше, чем вторая. Сколько литров воды в минуту пропускает первая труба, если резервуар объемом 192 литра она заполняет на 4 минуты дольше, чем вторая труба?

	$p$	$t$	$A$
1 труба	$x$	$\frac{192}{x}$	192
2 труба	$x + 4$	$\frac{192}{x + 4}$	192

- Первая труба заполняет резервуар на 4 минуты дольше, чем вторая. То есть времени уходит больше

$$\frac{192}{x} \text{ больше, чем } \frac{192}{x+4} \text{ на } 4$$

$$\frac{192}{x} = \frac{192}{x+4} + 4 \quad | \cdot x(x+4)$$

$$192(x+4) = 192x + 4x(x+4)$$

$$192x + 4 \cdot 192 = 192x + 4x^2 + 16x = 0$$

$$4x^2 + 16x - 4 \cdot 192 = 0 \quad | \cdot \frac{1}{4}$$

$$x^2 + 4x - 192 = 0$$

$$D = b^2 - 4ac = 4^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-192) = 16 + 768 = 784$$

$$x_1 = \frac{-b + \sqrt{D}}{2a} = \frac{-4 + \sqrt{784}}{2 \cdot 1} = \frac{-4 + 28}{2} = 12$$

$$x_2 = \frac{-b - \sqrt{D}}{2a} = \frac{-4 - \sqrt{784}}{2 \cdot 1} = \frac{-4 - 28}{2} = -16$$

**Ответ: 12**

# Задача 4

- Каждый из двух рабочих одинаковой квалификации может выполнить заказ за 19 часов. Через 1 час после того, как один из них приступил к выполнению заказа, к нему присоединился второй рабочий, и работу над заказом они довели до конца уже вместе. Сколько часов потребовалось на выполнение всего заказа?

Сразу отметим, что производительность каждого рабочего  $1/19$  (заказа в час). Заказ это работа, она равна 1.

	$p$	$t$	$A$
1 рабочий	$\frac{1}{19}$	$x + 1$	$\frac{x + 1}{19}$
2 рабочий	$\frac{1}{19}$	$x$	$\frac{x}{19}$

- Сумма сделанных ими объёмов работы составляет всю работу, равную 1.

Совместно рабочие работали  
9 часов.

Значит, на весь заказ ушло  $9 + 1 = 10$  часов.

**Ответ: 10**

# Задача 5

- Один мастер может выполнить заказ за 36 часов, а другой — за 12 часов. За сколько часов выполнят заказ оба мастера, работая вместе?

Пусть  $x$  это время, за которое мастера выполнят работу вместе.

Производительность первого  $1/36$  (заказа в час), второго  $1/12$  (заказа в час), этот вывод мы сделали из условия задачи.

- При совместной работе производительности складываются:

$$\left(\frac{1}{36} + \frac{1}{12}\right)x = 1$$

$$x = 9$$

**Ответ: 9**

# Задача 6

- В помощь садовому насосу, перекачивающему 9 литров воды за 4 минуты, подключили второй насос, перекачивающий тот же объем воды за 6 минуты. Сколько минут эти два насоса должны работать совместно, чтобы перекачать 30 литров воды?

**Сразу, исходя из условия, можно определить производительности насосов:**

**у первого  $9/4$  (литра в минуту), у второго  $9/6$  (литра в минуту).**

**Пусть совместно они будут работать  $x$  минут.**

$$\text{Тогда } \left( \frac{9}{4} + \frac{9}{6} \right) x = 30$$

$$x = 8$$

**Ответ: 8**

# Задача 7

- Петя и Ваня выполняют одинаковый тест. Петя отвечает за час на 12 вопросов теста, а Ваня — на 20. Они одновременно начали отвечать на вопросы теста, и Петя закончил свой тест позже Вани на 90 минут. Сколько вопросов содержит тест?

В данной задаче производительности даны:

у Пети 12 (вопросов в час), у Вани 20.

Количество вопросов это и есть работа, принимаем за её за  $x$ .

	$p$	$t$	$A$
Петя	12	$\frac{x}{12}$	$x$
Ваня	20	$\frac{x}{20}$	$x$

- Петя закончил свой тест на 90 минут позже Вани, то есть Петя затратил больше времени.
- Не забываем перевести минуты в часы: 90 минут это 1,5 часа.

$\frac{x}{12}$  больше, чем  $\frac{x}{20}$  на 1,5

$$\frac{x}{12} = \frac{x}{20} + 1,5$$

$$x = 45$$

**Ответ:45**

# Задача 8

- Через одну трубу бассейн наполняется за 7 часов, а через другую опустошается за 8 часов. За какое время бассейн будет наполнен, если открыть обе трубы?

	$p$	$t$	$A$
1 труба	$\frac{1}{7}$	7	1
2 труба	$\frac{1}{8}$	8	1
Вместе	?	?	1

- Сначала найдем производительность труда совместной работы обеих труб за один час. Поскольку одна труба бассейн наполняет, а другая — опустошает, производительность совместной работы равна разности производительности первой и второй труб:

$$1) \frac{1 \setminus 8}{7} - \frac{1 \setminus 7}{8} = \frac{8 - 7}{56} = \frac{1}{56}$$

Теперь найдем время, за которое бассейн будет наполнен при открытии обеих труб одновременно. Чтобы найти время работы, надо объем работы разделить на производительность труда:

$$2) 1 : \frac{1}{56} = 1 \cdot \frac{56}{1} = 56$$

**Ответ:56**

# Задача

Игорь и Паша красят забор за 9 часов. Паша и Володя красят этот же забор за 12 часов, а Володя и Игорь — за 18 часов. За сколько часов мальчики покрасят забор, работая втроем?

- Это задача также на работу и производительность. Отличие в том, что здесь работают трое, и переменных будет тоже три. Пусть  $x$  — производительность Игоря,  $y$  — производительность Паши, а  $z$  — производительность Володи. Забор, то есть величину работы, примем за 1 — ведь мы ничего не можем сказать о его объеме.

	Производительность $P$	Объем работы $A$
Игорь	$x$	1
Паша	$y$	1
Володя	$z$	1
вместе	$x + y + z$	1

Игорь и Паша покрасили забор за 9 часов. Мы помним, что при совместной работе производительности складываются. Запишем уравнение:  $(x+y) \cdot 9 = 1$

Паша и Володя красят этот же забор за 12 часов

$$(y+z) \cdot 12=1 \quad \text{Володя и Игорь — за 18 часов} \quad (x+z) \cdot 18=1$$

$$\begin{cases} x + y = \frac{1}{9} \\ y + z = \frac{1}{12} \\ x + z = \frac{1}{18} \end{cases}$$

Можно искать , и по отдельности, но лучше использовать такой приём - сложить все три уравнения. Получим, что

$$2(x + y + z) = \frac{1}{9} + \frac{1}{12} + \frac{1}{18}$$

$$(x + y + z) = \frac{1}{8}$$

Значит, работая втроем, Игорь, Паша и Володя красят за час одну восьмую часть забора. Весь забор они покрасят за 8 часов.  
Ответ: 8.

# Задача

10

Каждый из двух рабочих одинаковой квалификации может выполнить заказ за 15 часов. Через 3 часа после того, как один из них приступил к выполнению заказа, к нему присоединился второй рабочий, и работу над заказом они довели до конца уже вместе.

Сколько часов потребовалось на выполнение всего заказа?

Производительность каждого рабочего  $\frac{1}{15}$  (заказа в час). Заказ это работа, она равна 1. Пусть это время совместной работы  $t$ . Пусть  $x$  ч- время совместной работы, тогда один работал  $x$  часов, а второй  $x+3$ . Заполним графу «работа» для каждого:

	p	t	A
1 рабочий	$\frac{1}{15}$	$x + 3$	$\frac{x + 3}{15}$
2 рабочий	$\frac{1}{15}$	$x$	$\frac{x}{15}$

Сумма сделанных ими объёмов работы составляет всю работу, равную 1.

$$\frac{x + 3}{15} + \frac{x}{15} = 1$$

$$x = 6$$

Совместно рабочие работали 6 часов. На весь заказ ушло  $3+6=9$  часов.

Ответ: 9

Можно выстроить рассуждение таким образом:

В условии сказано, что рабочий может выполнить заказ за 15 часов, то есть его производительность  $\frac{1}{15}$  заказа в час. Значит, за первые три часа один рабочий выполнит  $\frac{3}{15}$  заказа,  $3 \cdot \frac{1}{15} = \frac{3}{15}$ . Получается, что на двоих останется  $1 - \frac{3}{15} = \frac{12}{15}$  заказа. Далее они работают вдвоём, значит, на каждого из рабочих придётся  $\frac{12}{15} : 2 = \frac{6}{15}$  заказа, так как их производительность одинаковая. Имеем: рабочий выполняет  $\frac{1}{15}$  заказа в час, значит,  $\frac{6}{15}$  заказа выполнит за 6 часов, то есть совместно они будут работать 6 часов. Итак, на выполнение всего заказа потребуется

$$6 + 3 = 9 \text{ часов.}$$

Ответ: 9.

**Спасибо за  
внимание!**