Розв’язування систем рівнянь з двома змінними

Алгебра і початки аналізу 11 клас. Рівень стандарту

Губарєва Ганна Яківна – вчитель математики Білоцерківської загальноосвітньої школи I-III ступенів Комиш-Зорянської селищної ради Більмацького району Запорізької області.

Категорія вища, звання "Старший вчитель", педагогічний стаж – 39 років.

Систему рівнянь другого степеня з двома змінними можуть утворювати два рівняння, кожне з яких є рівнянням другого степеня, або одне з них є рівнянням другого степеня а інше – рівнянням першого степеня.

Розв'язок такої системи – це пара значень змінних, яка задовольняє обидва рівняння системи.

Способи розв'язування систем:

підстановки,
додавання,
графічний,
деякі штучні прийоми.

Аналітичні способи

Пр з'язати нянь:

$$\begin{cases} x + y = 6, \\ xy = -16. \end{cases}$$

І спосіб. Таку ~~систему зручно~~ розв'язувати способом підстановки.

З першого рівняння виразимо змінну у через х і підставимо отриманий вираз у друге рівняння.

$$\begin{cases} x + y = 6, \\ xy = -16, \end{cases}$$

$$\begin{cases} y = 6 - x, \\ x(6 - x) = -16; \end{cases}$$

$$\begin{cases} y = 6 - x, \\ 6x - x^2 + 16 = 0; \end{cases}$$

$$\begin{cases} y = 6 - x, \\ x^2 - 6x - 16 = 0; \end{cases}$$

$$x_1 = -2;$$
$$x_2 = 8;$$

$$x_1 = -2;$$
$$y_1 = 6 + 2 = 8;$$
$$x_2 = 8$$
$$y_2 = 6 - 8 = -2.$$

Відповідь. (-2; 8) і (8; -2)

Аналітичні способи

Приклад 1.

$$\begin{cases} x + y = 6, \\ xy = -16. \end{cases}$$

II спосіб.

Рівняння системи $\begin{cases} x + y = 6, \\ xy = -16, \end{cases}$ **є, по суті, сумою і добутком двох невідомих чисел. Тому, за теоремою, оберненою до теореми Вієта, можемо утворити квадратне рівняння, коренями якого є ці числа.**

$Z^2 - 6Z - 16 = 0.$

Знаходимо його корені:

$Z_1 = -2$; $z_2 = 8.$

Отже, або $x_1 = -2;$ **і** $y_1 = 8$

або $x_2 = 8;$ $y_2 = -2$

Відповідь. (-2; 8) і (8; -2)

Спосіб підстановки:

1. Виразити в рівнянні першого степеня одну змінну через іншу.
2. Підставити отриманий вираз у друге рівняння системи замість відповідної змінної.
3. Розв’язати отримане рівняння з однією змінною.
4. Знайти відповідні значення другої змінної.
5. Записати відповідь.

Аналітичні способи

Приклад 2.

...стему

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 20, \\ xy = 8. \end{cases}$$

Помножимо обидві частини другого рівняння на 2 і додамо почленно рівняння нової системи.

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 20, \\ xy = 8, \end{cases}$$

$$+\begin{cases} x^2 + y^2 = 20, \\ 2xy = 16, \end{cases}$$

$$x^2 + 2xy + y^2 = 36$$

$$(x + y)^2 = 36$$

$$|x + y| = 6$$

$$x + y = 6, \text{або } x + y = -6.$$

Отже, дана система рівносильна сукупності таких двох систем:

$$\begin{cases} x + y = 6; \\ xy = 8; \end{cases} \quad \text{і} \quad \begin{cases} x + y = -6 \\ xy = 8. \end{cases}$$

Розв'язуючи кожну з них отримаємо розв'язки першої системи:
(4; 2) і (2; 4);
розв'язки другої системи:
(-4; -2) і (-2; -4).
Відповідь. (-4; -2), (-2; -4), (4; 2), (2; 4).

Спосіб додавання використовують тоді, коли в результаті почленного додавання рівнянь системи отримують рівняння з однією змінною.

Аналітичні способи

$$\begin{cases} x^2 + 3xy = 18, \\ 3y^2 + xy = 6. \end{cases}$$

Розкладемо ліві частини обох рівнянь на множники.

$$\begin{cases} x^2 + 3xy = 18, \\ 3y^2 + xy = 6. \end{cases} \qquad \begin{cases} x(x + 3y) = 18, \\ y(3y + x) = 6, \end{cases}$$

Оскільки $x + 3y \neq 0$ (інакше праві частини обох рівнянь дорівнювали б нулю), то поділимо відповідні частини рівняння одна на одну.

$$\frac{x}{y} = 3 \qquad x = 3y$$

Підставимо це значення х у друге рівняння останньої системи

$$y(3y + x) = 6$$

$$6y^2 = 6$$

$$y^2 = 1 \qquad y_1 = 1,\ y_2 = -1$$

$$x_1 = 3,\ x_2 = -3$$

(3; 1), (-3; -1).

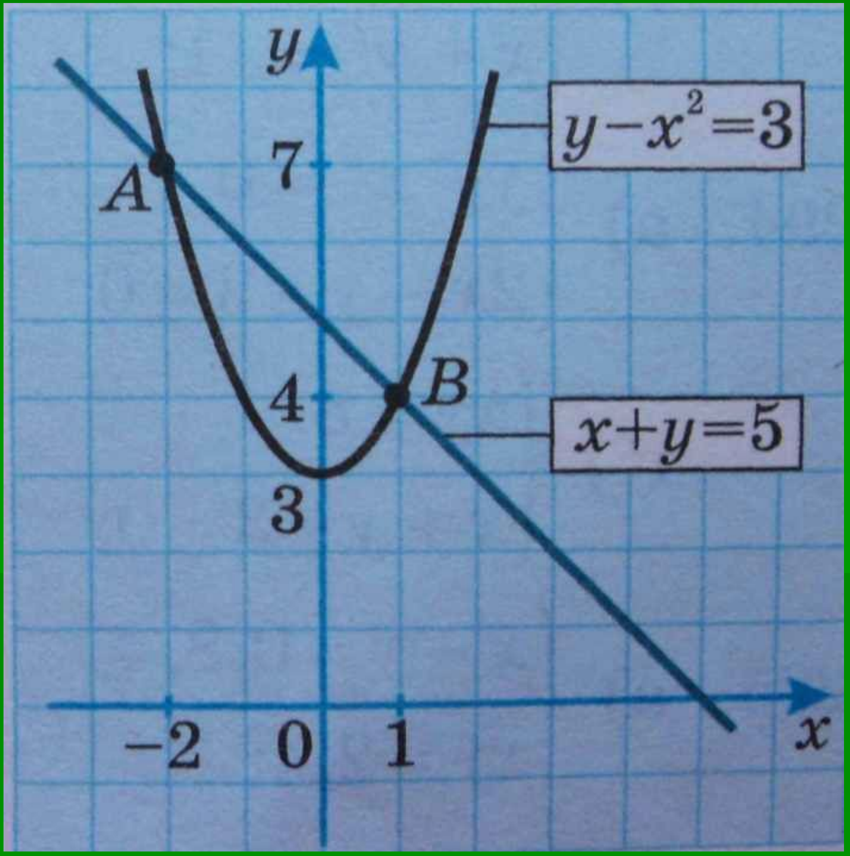
Відповідь: (3; 1), (-3; -1).

Графічний спосіб

Точки А (-2; 7) і В (1; 4) належать як прямій, так і параболі, тобто є спільними для них.
Тому координати точок А і В є розв'язками даної системи.

Приклад 1. Розв'язати систему рівнянь:

$$\begin{cases} y - x^2 = 3, \\ x + y = 5. \end{cases}$$



Розв'яжемо дану систему рівнянь графічним способом.
Побудуємо графіки рівнянь системи, тобто графіки функцій
$y = x^2 + 3$ і $y = -x+5$.

$y = x^2 + 3$ - парабола $y = x^2$ піднята на 3 одиниці по осі оу.

$y = -x+5$ -пряма

x	1	-2
y	4	7

Відповідь: (-2; 7) і (1; 4).

Графічний спосіб:

1. Побудувати графіки рівнянь в одній координатній площині.
2. Знайти координати їх точок перетину, або впевнитись, що графіки рівнянь спільних точок не мають.
3. Якщо координати точок перетину є цілими числами, то виконати перевірку; якщо ні, то розв’язки системи знайти наближено.
4. Записати відповідь.

Приклад 2

Розв'язати систему рівнянь $\begin{cases} x^2+y^2=5 \\ x+y=3 \end{cases}$.

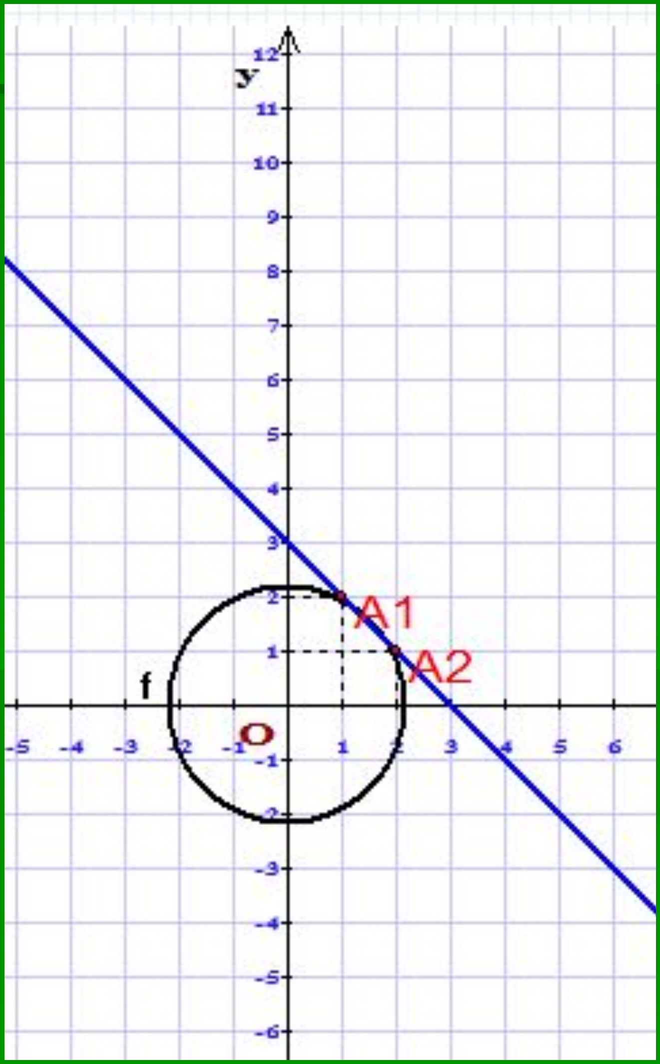
Будуємо коло $x^2+y^2=5$.

Будуємо пряму $x+y=3$.

Знаходимо точки перетину

кола $x^2+y^2=5$ та прямої $x+y=3$.

A1(1; 2) , $A2(2;1)$ є розв'язками системи.



Вірповідь: (1; 2), (2; 1).

Приклад 3

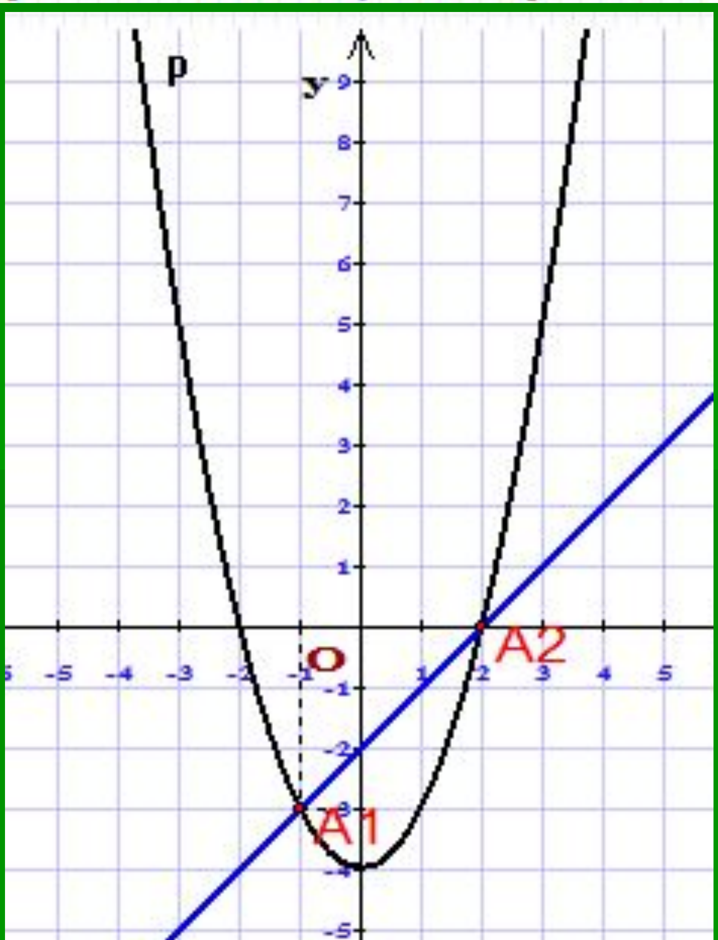
Розв’язати систему рівнянь $\begin{cases} y=x^2-4 \\ x-y=2 \end{cases}$.

Будуємо параболу $y=x^2-4$. Будуємо пряму $y-x=2$.

Знаходимо точки перетину параболи $y=x^2-4$ та прямої $y-x=2$.

Точка $A1(-1;-3)$ та точка

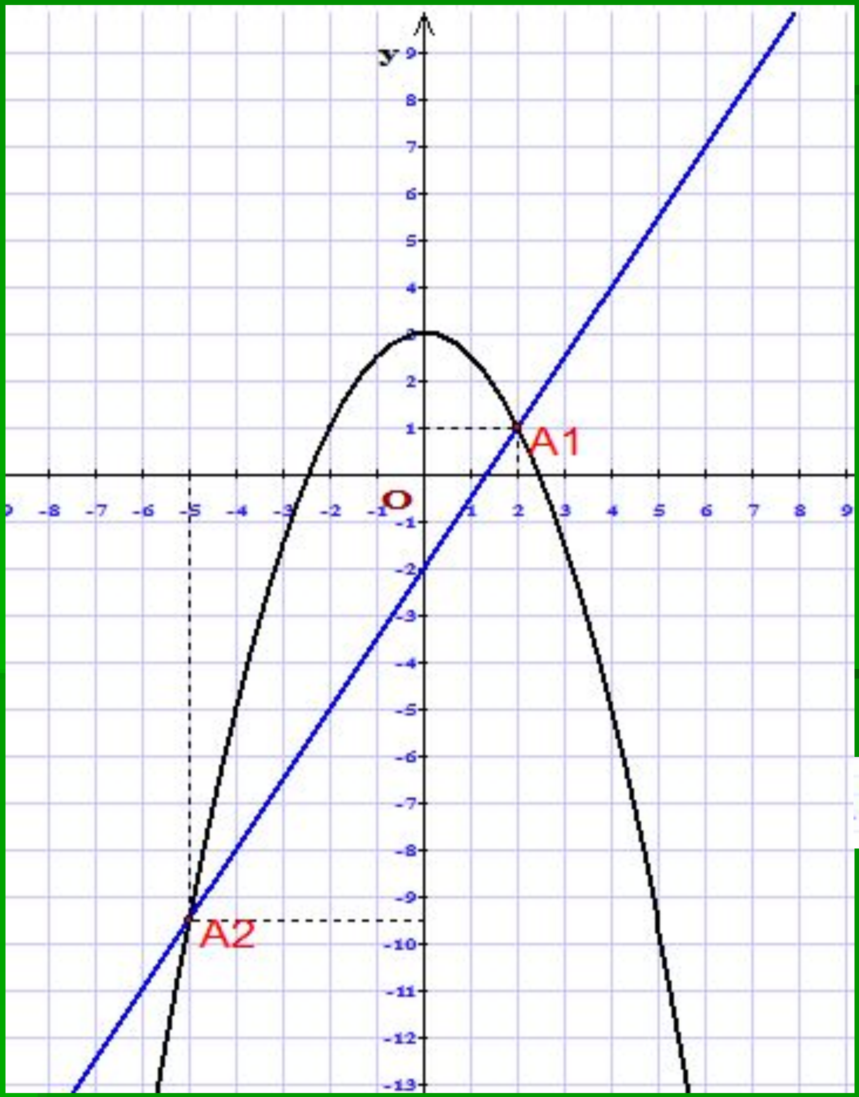
$A2(2;0)$ є розв'язками системи.



Відповідь: (-1; -3); (2; 0).

Приклад 4

Розв’язати систему рівнянь $\begin{cases} x^2+2\cdot y=6 \\ 3\cdot x-2\cdot y=4 \end{cases}$.

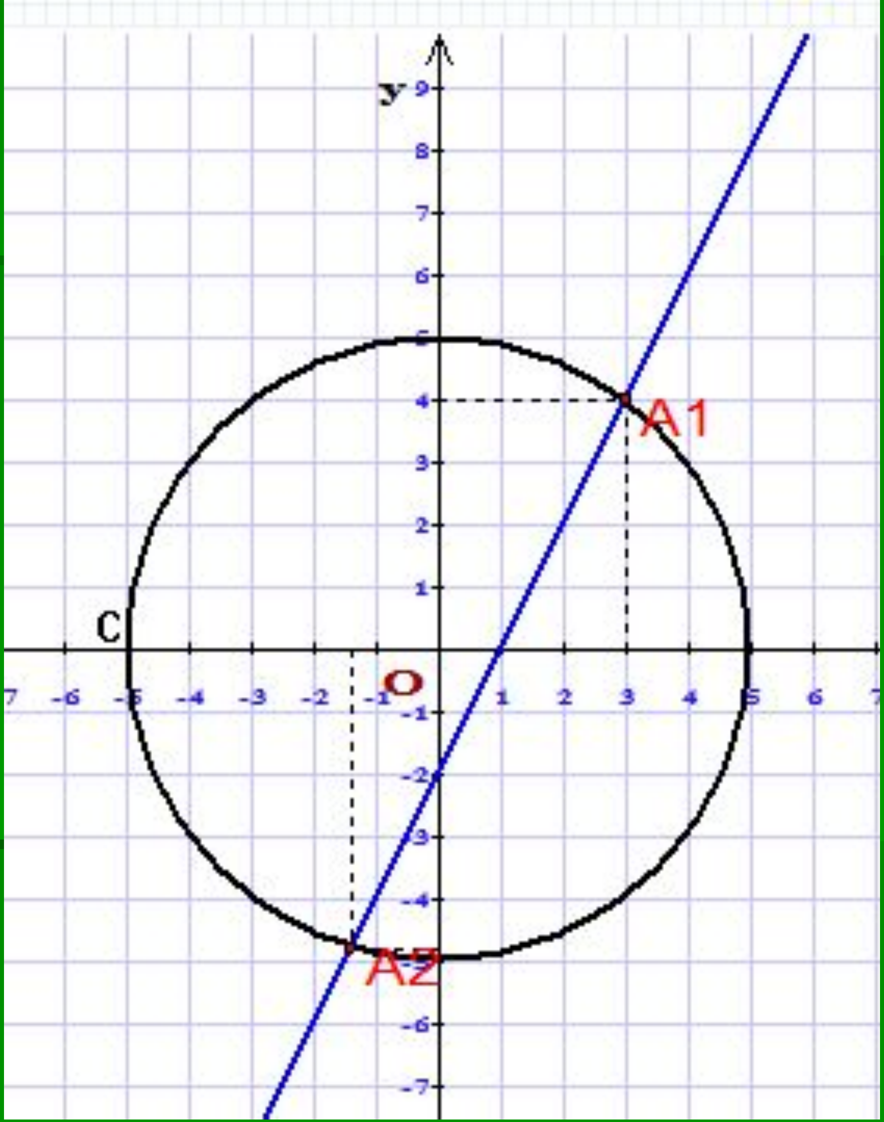


Точка $A1(2;1)$ та точка $A2(-5;-9,5)$ є розв'язками системи.

Приклад 5

Розв’язати систему рівнянь

$$\begin{cases} x^2+y^2=25 \\ 2\cdot x-y=2 \end{cases}.$$

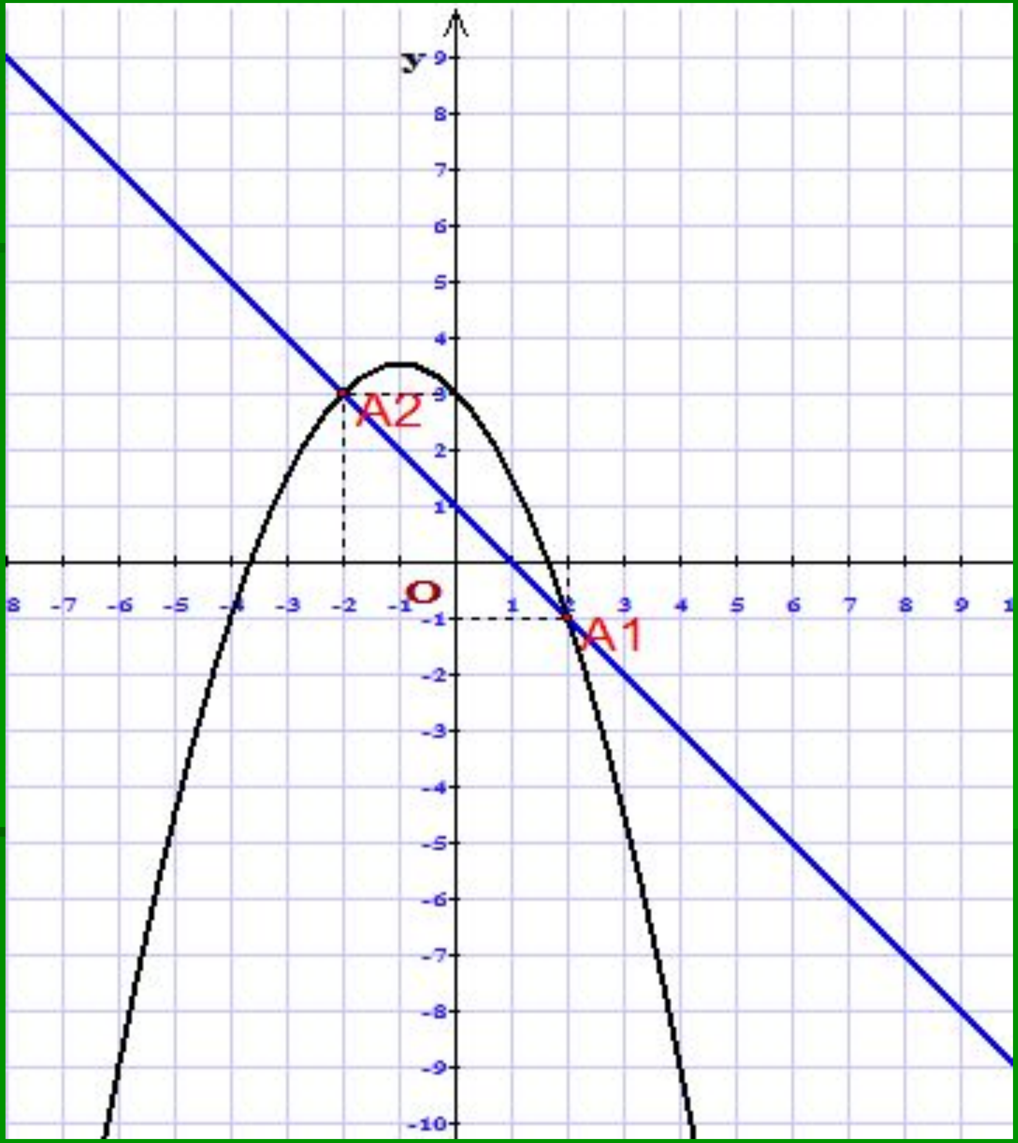


Точка *A1(3;4)* та точка *A2(-1,4;-4,8)* є розв'язками системи.

Приклад 6

Розв'язати систему рівнянь

$$\begin{cases} (x+1)^2+2\cdot y=7 \\ x+y=1 \end{cases}.$$



Точка *A1(2;-1)* та точка *A2(-2;3)* є розв'язками системи.

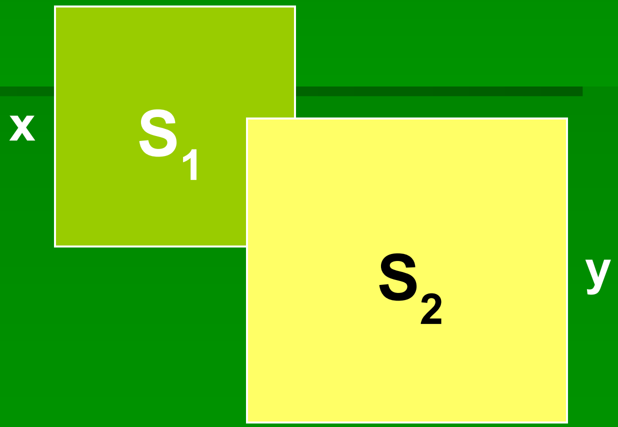
Запитання для самоперевірки

1. Які рівняння можуть утворювати систему двох рівнянь другого степеня з двома змінними?
2. Як встановити,чи є дана пара чисел розв'язком системи двох рівнянь другого степеня з двома змінними?
3. Які ви можете назвати способи розв'язування систем двох рівнянь другого степеня з двома змінними? Поясніть їх суть на прикладах.

А ще раніше…

Ще в давньовавилонських текстах які датуються III-II тисячоліттями до н. е. траплялось чимало задач, що зводились до системи рівнянь другого степеня.

Задача. Площі двох своїх квадратів я склав і отримав $25\frac{5}{12}$. Сторона другого складає $\frac{2}{3}$ від сторони першого і ще 5. Знайти сторони цих квадратів.



1).Система рівнянь до задачі в сучасних записах матиме такий вигляд:

$$x^2 + y^2 = 25\frac{5}{12},$$

$$y = \frac{2}{3}x + 5.$$

2). Для її розв'язування автор підносить до квадрата ліву і праву частини другого рівняння:

$$y^2 = \frac{4}{9}x^2 + \frac{20}{3}x + 25.$$

3). Підставляє знайдене y^2 у перше рівняння:

$$1\frac{4}{9}x^2 + 6\frac{2}{3}x = \frac{5}{12}$$

4). Далі автор розв'язує це рівняння, знаходить x, потім y.

А ще раніше…

Задача. Записати два числа, коли відомо, що їх сума дорівнює 20, а сума їх квадратів дорівнює 208.

1). Сучасні математики звели б цю задачу до системи:

$$x + y = 20,$$
$$x^2 + y^2 = 208.$$

2). Проте Діофант обирав невідомою величиною половину різниці шуканих чисел та отримував (в сучасних позначеннях) систему:

$$\frac{1}{2}(x - y) = z,$$
$$\frac{1}{2}(x + y) = 10.$$

У XVII – XVIII ст. прийоми розв’язування систем лінійних рівнянь у загальному вигляді за допомогою методу виключення невідомих розглядали математики Ферма, Ньютон, Лейбніц, Ейлер, Безу, Лагранж та інші.

Завдяки методу координат, який запропонували в XVII ст. Ферма і Декарт, стало можливим розв’язувати системи рівнянь графічно.

Пьер де Ферма́ (фр. Pierre de Fermat, 1601 — 1665) — французький математик-самоучка, один із основоположників аналітичної геометрії, математичного аналізу, теорії ймовірностей і теорії чисел. — Найбільш відомий формулюванням Великої теореми Ферма, «найбільш знаменитої математичної загадки всіх часів».

Рене́ Дека́рт (лат. Renatus Cartesius — Ренат Картезій;1596 — Ренат Картезій;1596, Ла-Е-ан-Турен 1650 — Ренат Картезій;1596, Ла-Е-ан-Турен 1650, Стокгольм — Ренат Картезій;1596, Ла-Е-ан-Турен 1650, Стокгольм) — французький філософ — Ренат Картезій;1596, Ла-Е-ан-Турен 1650, Стокгольм) — французький філософ, фізик — Ренат Картезій;1596, Ла-Е-ан-Турен 1650, Стокгольм) — французький філософ, фізик, фізіолог, математикматематик, основоположник аналітичної геометріїматематик, основоположник аналітичної геометрії. У математиці Декарт запровадив Декартову систему координатматематик,

Підручник О.С. Істер “Алгебра 9”, Київ, “Генеза”, 2017.

ДЯКУЮ ЗА УВАГУ