

Методика решения задач повышенной сложности. Механика



Этапы подготовки к ЕГЭ

1. Систематизация теоретического материала.
2. Решение задач базового уровня.
3. Решение задач повышенного уровня из части 1 ЕГЭ.
4. Решение задач повышенного уровня из части 2 ЕГЭ.
5. Решение задач высокого уровня.

Алгоритм решения задач по теме «Кинематика»

- Записать кратко условие задачи, выразив исходные данные в СИ.
- Выделить тела (тело), движение которых рассматривается. Заменить реальные тела материальными точками.
- Выбрать систему отсчета. В случае прямолинейного движения система координат содержит одну ось, с которой совпадает траектория движения. Если движение криволинейное – две (или даже три) оси.
- Схематически изобразить движение в выбранной системе координат, изобразив начальные, текущие и конечные векторы скорости и ускорения (желательно с соблюдением масштаба).
- Определить характер движения. Если движение криволинейное, желательно разложить его на два (или более) прямолинейных.
- Записать кинематическое уравнение движения точки в проекциях на координатных оси с учетом знаков проекции векторов скорости и ускорения.
- Из полученных уравнений выразить искомую величину и произвести вычисления.

Задача 1

Наклонная плоскость пересекается с горизонтальной плоскостью по прямой АВ. Угол между плоскостями $\alpha = 30^\circ$. Маленькая шайба начинает движение вверх по наклонной плоскости из точки А с начальной скоростью $v_0 = 2$ м/с под углом $\beta = 60^\circ$ к прямой АВ. В ходе движения шайба съезжает на прямую АВ в точке В. Пренебрегая трением между шайбой и наклонной плоскостью, найдите расстояние АВ.

Решение.

Выбор системы координат: ось x направлена по прямой АВ, ось y – вверх по наклонной плоскости перпендикулярно линии АВ.

Проекции вектора ускорения свободного падения: $g_x = 0$, $g_y = -g \sin \alpha$.

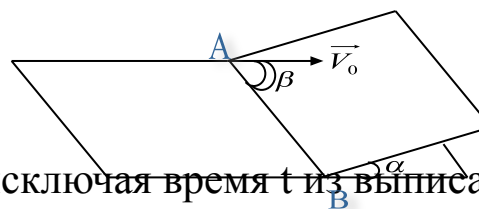
Кинематика движения по наклонной плоскости эквивалентна кинематике движения тела, брошенного под углом β к горизонту, в поле силы тяжести с ускорением $g \sin \alpha$ (в известных уравнениях кинематики для тела, брошенного под углом β к горизонту, делается замена g на $g \sin \alpha$):

$$X(t) = (v_0 \cos \beta) \cdot t$$

$$Y(t) = (v_0 \sin \beta) \cdot t - \frac{g \sin \alpha}{2} \cdot t^2.$$

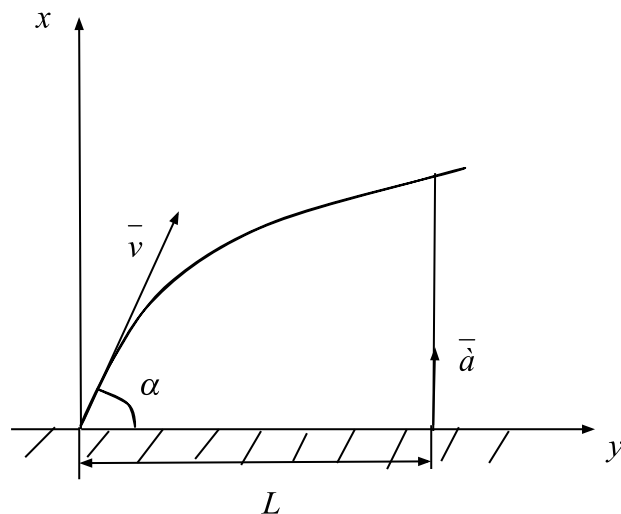
Условие $y = 0$ позволяет найти расстояние АВ, исключая время t из выписанных уравнений для x и y :

$$AB = 2v_0^2 \sin \beta \cos \beta / (g \sin \alpha) = 2/5 \approx 0,69 \text{ м.}$$



Задача 2

С какой скоростью в момент старта ракеты нужно выстрелить из пушки, чтобы поразить ракету, стартующую вертикально вверх с ускорением a ? Расстояние от пушки до места старта ракеты L , пушка стреляет под углом α к горизонту.



Решение.

В задаче идет речь о двух телах, поэтому уравнения движения следует записать для каждого из них. Обозначим через t_1 время, прошедшее с момента старта и выстрела до попадания снаряда в ракету. Координаты снаряда в момент времени t_1 :

$$X_c = v_0 \cos \alpha \cdot t_1 \quad (1)$$

$$y_c = v_0 \sin \alpha \cdot t_1 - g t_1^2 / 2 \quad (2).$$

Координаты ракеты в момент времени t_1 :

$$X_p = L \quad (3)$$

$$Y_p = a t_1^2 / 2 \quad (4).$$

Поскольку в момент времени t_1 снаряд коснулся ракеты, то есть координаты совпали, то

$$x_c = x_p \quad (5)$$

$$y_c = y_p \quad (6).$$

Из системы уравнений (1-6) получаем:

$$L = v_0 \cos \alpha \cdot t_1 \quad (7)$$

$$a t_1^2 / 2 = v_0 \sin \alpha \cdot t_1 - g t_1^2 / 2 \quad (8).$$

Два уравнения с двумя неизвестными v_0 и t_1 . Подставляя t_1 из (7) в (8), окончательно находим:

$$V_0 = \sqrt{\frac{(a + g)L}{\sin 2\alpha}}$$

Алгоритм решения задач по теме «Динамика»

- Кратко записать условие задачи. Все данные перевести в СИ.
- Сделать чертеж (схему, рисунок) к задаче.
- Выделить рассматриваемые тела, указать направление их движения. Определить, с какими другими телами взаимодействует каждое из них.
- Показать на рисунке все силы, действующие на рассматриваемые тела.
- Выбрать тело отсчета и связанную с ним систему координат, расположив ее так, чтобы одна из осей совпадала с направлением ускорения тела.
- Записать для каждого тела уравнение второго закона Ньютона в векторном виде.
- Записать каждое из уравнений в виде проекций на выбранные оси координат.
- Решить полученную систему уравнений в общем виде. Получить расчетную формулу. Произвести проверку размерности полученной величины. Вычислить значения искомых величин.

Задача 3

Деревянный брусок плавает на поверхности воды в миске. Миска покоится на поверхности Земли. Что произойдет с глубиной погружения бруска в воду, если миска будет стоять на полу лифта, который движется с ускорением, направленным вертикально вверх? Ответ поясните, указав, какие физические явления и закономерности вы при этом использовали.

Решение.

Когда брусок, воды и миска покоятся относительно Земли, сила Архимеда уравнивает силу тяжести плавающего бруска. Та же по величине и направлению сила Архимеда уравнивает силу тяжести вытесненной бруском воды. Поэтому масса бруска и масса вытесненной им воды одинаковы.

Когда брусок, вода и миска покоятся относительно друг друга, но движутся с ускорением относительно Земли, одна и та же сила Архимеда вместе с силой тяжести сообщает одно и то же ускорение как плавающему бруску, так и воде в объеме, вытесненном бруском, что приводит к соотношению:

$$F_A = m(a-g) = m_{\text{вытес. воды}}(a-g),$$

откуда следует, что и при движении относительно Земли с ускорением $a \neq g$ масса бруска и масса вытесненной воды одинаковы.

Поскольку масса бруска одна и та же, масса вытесненной им воды в обоих случаях одинакова. Вода практически не сжимаема, поэтому плотность воды в обоих случаях одинакова. Значит, объем вытесненной воды не изменяется, глубина погружения бруска в лифте остается прежней.

Задача 4

Два одинаковых бруска, связанные легкой пружиной, покоятся на гладкой горизонтальной поверхности стола. В момент $t=0$ правый брусок начинают двигать так, что за время τ он набирает конечную скорость и движется затем равномерно по прямой, совпадающей с осью пружины. За время τ левый брусок успевает сместиться значительно меньше, чем правый. Каков характер движения левого бруска относительно стола при $t > \tau$? Ответ поясните, указав, какие физические явления и закономерности вы при этом использовали.



Решение

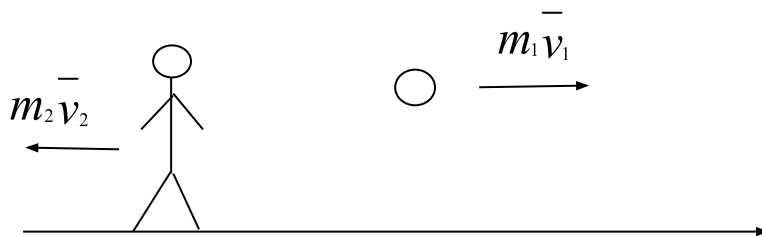
- Будем считать, как это обычно и делается, систему отсчета, связанную с Землей, инерциальной. Тогда при $t > \tau$ подвижная система отсчета, связанная с правым бруском, тоже инерциальная, поскольку движется относительно инерциальной системы отсчета равномерно и прямолинейно (без вращения).
- Из условия следует, что при $t = 0$ пружина была не напряжена, а при $t > \tau$ она растянута. Поэтому на левый брусок вдоль прямой, по которой движутся бруски, действует упругая сила пружины, и в инерциальной подвижной системе отсчета, связанной с правым бруском, левый брусок совершает колебания. (Если упругая сила пружины связана с ее деформацией соотношением $F_x = -kx$, то эти колебания гармонические.)
- Движение левого бруска относительно стола является суперпозицией равномерного прямолинейного движения и колебаний вдоль той же прямой.

Алгоритм решения задач по теме «Законы сохранения в механике»

- Выделить систему взаимодействующих тел, выбрать систему отсчета.
- Выбрать нулевой уровень потенциальной энергии.
- Установить характер взаимодействия тел и проанализировать возможность применения ЗСИ и ЗСМЭ. Для этого необходимо:
 - а) проверить, можно ли данную систему считать замкнутой;
 - б) провести анализ сил, действующих в системе, чтобы узнать наличие или отсутствие неконсервативных сил.
- Изобразить на чертеже импульсы (или скорости) тел системы до и после взаимодействия.
- Обосновать возможность применения закона сохранения импульса и закона сохранения механической энергии
- Записать закон сохранения импульса в векторном виде и спроектировать его на оси координат.

Задача 5

Космонавт, находясь в космическом пространстве в состоянии невесомости, бросил предмет массой $m_1 = 5$ кг со скоростью $v = 12$ м/с относительно корабля и, вследствие отдачи, отлетел в противоположную сторону. Определить работу, которую совершил космонавт при бросании, если его масса $m_2 = 70$ кг.



Решение

Рассмотрим систему «корабль-космонавт-предмет-Земля». Эта система подобна замкнутой, но неконсервативная, так как сила, с которой космонавт действует на предмет, неконсервативна. За малое время взаимодействия космонавта с предметом можно считать, что корабль имеет постоянную скорость, поэтому инерциальную систему можно связать с кораблем.

Работа, которую совершил космонавт при бросании, равна

$$A = W_2 - W_1,$$

где W_1 и W_2 – полная механическая энергия системы до и после броска.

Так как потенциальная энергия системы не изменяется (высота орбиты постоянна), то

$$W_1 = 0, \quad W_2 = m_1 v_1^2 / 2 + m_2 v_2^2 / 2, \quad A = W_2.$$

Неизвестную скорость v_2 космонавта можно определить из закона сохранения импульса для системы «космонавт - предмет»:

$$0 = m_1 \overline{v_1} + m_2 \overline{v_2} \quad (\text{импульс системы до взаимодействия равен нулю})$$

В проекциях на ось x :

$$m_1 v_1 - m_2 v_2 = 0, \text{ откуда } v_2 = m_1 v_1 / m_2$$

Тогда работа

$$A = (m_1 v_1^2 / 2) \cdot (1 + m_1 / m_2)$$

Подставим числовые значения величин:

$$A = 386 \text{ Дж.}$$

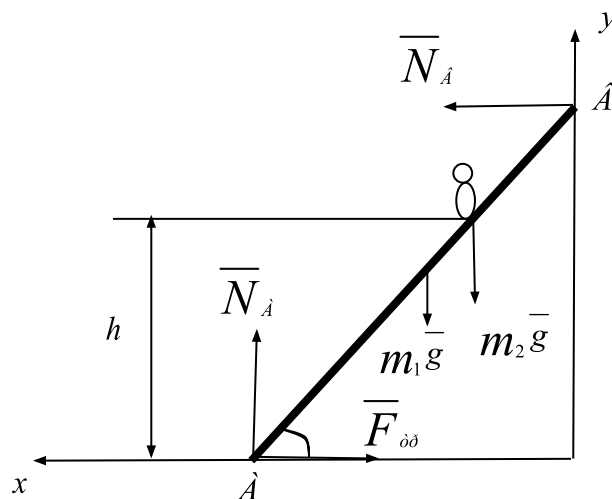
Алгоритм решения задач по теме «Статика»

- Изобразить на чертеже рассматриваемое тело и силы, действующие на него.
- Проанализировать возможное движение тела. Если приложенные силы исключают всякое ускоренное поступательное движение, то записывают уравнение:
$$\Sigma \quad = 0 \quad (1)$$
- 3. Если рассмотренные силы создают вращающий момент относительно какой-либо Оси , но тело не вращается, то записывают второе условие равновесия:
$$\Sigma M_i = 0 \quad (2)$$
- Для этого выбирают ось, относительно рассматривают моменты действующих сил. Ось удобно выбирать так, чтобы через нее проходило как можно больше линий действия сил. В этом случае моменты большинства сил относительно оси будут равны нулю и уравнение моментов будет достаточно простым.
- Находим плечи всех сил относительно оси. При записи уравнения моментов необходимо учитывать знаки моментов рассматриваемых сил.
- 4. Если в полученное уравнение моментов входили две или более неизвестные величины, то к нему необходимо добавить уравнение (1) или уравнение моментов, взятых относительно других осей.

Задача 6

Лестница длиной 4 м приставлена к идеально гладкой стене под углом к полу $\alpha = 60^\circ$.

Коэффициент трения скольжения между полом и лестницей $\mu = 0,4$, масса лестницы $m_1 = 10$ кг. На какую максимальную высоту над полом может подняться человек массой $m_2 = 80$ кг, прежде чем лестница начнет скользить?



Решение

Максимальная высота h человека над полом соответствует тому предельному состоянию, когда лестница еще находится в состоянии покоя (равновесия), но скольжение лестницы возникает. Решим задачу в системе отсчета, связанной с полом, система координат X, Y . На лестницу действуют силы реакции опоры стены N_B , пола N_A , силы тяжести лестницы $m_1 g$, вес человека $m_2 g$, сила трения лестницы о пол $F_{тр}$.

Запишем условия равновесия для лестницы:

$$\overline{N_B} + \overline{F_{тр}} + m_1 \overline{g} + m_2 \overline{g} + N_B = 0 \quad (1)$$

$$\sum M_i = 0 \quad (2)$$

Составим уравнение моментов сил (уравнение 2) относительно точки A , так как в ней действуют две неизвестные силы $F_{тр}$ и N_A . Укажем плечи сил d относительно оси, проходящей через точку A , перпендикулярно плоскости чертежа.

Для силы $m_1 g$: $d_1 = \cos \alpha$, для силы $m_2 g$: $d_2 = x \cdot \cos \alpha = h / \operatorname{tg} \alpha$, для силы N_B : $d_B = l \cdot \sin \alpha$. Тогда уравнение моментов относительно оси A :

$$m_1 g \cdot \frac{l}{2} \cdot \cos \alpha + m_2 g \cdot h \cdot \operatorname{ctg} \alpha - N_B l \cdot \sin \alpha = 0 \quad (3)$$

Так как неизвестны две величины: N_B и h , то составим дополнительные уравнения, записав уравнение (1) в проекциях на оси координат X, Y .

$$OX: N_B - F_{тр} = 0 \quad (4)$$

$$OY: N_A - m_1 g - m_2 g = 0 \quad (5)$$

В момент начала скольжения $F_{тр} = \mu N_A$, тогда из уравнения (5) $N_A = (m_1 + m_2) \cdot g$, и из уравнения (4)

$$N_B = F_{тр} = \mu(m_1 + m_2)g. \quad (6)$$

Подставим выражение (6) в уравнение (3) и выразим h :

$$m_1 g \cdot \frac{l}{2} \cdot \cos \alpha + m_2 g \cdot h \cdot \operatorname{ctg} \alpha - \mu(m_1 + m_2)g l \cdot \sin \alpha = 0.$$

Откуда

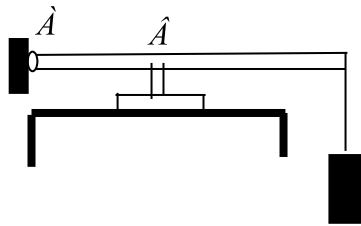
$$h = (\mu(m_1 + m_2) l \cdot \sin \alpha - m_1 \cdot \frac{l}{2} \cdot \cos \alpha) / m_2 \operatorname{ctg} \alpha.$$

Подставляя числовые значения величин, получим

$$h \approx 2,5 \text{ м.}$$

Задача 7

В цилиндр объемом $0,5 \text{ м}^3$ насосом закачивается воздух со скоростью $0,002 \text{ кг/с}$. В верхнем торце цилиндра есть отверстие, закрытое предохранительным клапаном. Клапан удерживается в закрытом состоянии стержнем, который может свободно поворачиваться вокруг оси в точке А. К свободному концу стержня подвешен груз массой 2 кг . Клапан открывается через 580 с работы насоса, если давление воздуха в цилиндре было равно атмосферному. Площадь закрытого клапаном отверстия $5 \cdot 10^{-4} \text{ м}^2$, расстояние АВ равно $0,1 \text{ м}$. Температура воздуха в цилиндре и снаружи не меняется и равно 300 К . Определите длину стержня, если его можно считать невесомым.



Решение

Клапан откроется, когда избыточная сила F давления воздуха на клапан изнутри цилиндра сравняется с силой давления стержня на этот клапан. Если превышение давления воздуха в цилиндре над атмосферным Δp , а площадь клапана s , то $F = s \cdot \Delta p$. Сила действия стержня на клапан равна mgL/l , где m , L , l соответственно масса груза, длина стержня и длина его участка АВ. Итак, должно выполняться условие:

$$S \cdot \Delta p \geq mgL/l.$$

Дополнительное давление воздуха определяется увеличением массы Δm воздуха в цилиндре. Согласно уравнению Менделеева – Клапейрона,

$\Delta p = \Delta m v R T / M V$, где M – молярная масса воздуха. Поэтому условие открытия клапана примет вид:

$$(s \Delta m v R T / M V) \geq mgL/l, \text{ или } L \leq l s R T \Delta m v / (m g M V).$$

Если насос закачивает каждую секунду ω кг воздуха, то массу Δm воздуха он закачает за время $t = \Delta m v / \omega$. Следовательно, клапан откроется в момент, когда выполнится равенство

$$L = \frac{t l s R T \omega}{m g M V}$$

Подставляя числовые значения величин, получим $L \approx 0,5$ м.