Лекция 3

Пределы последовательностей, содержащих факториалы

Летучка

(ПИШЕМ ТОЛЬКО ОТВЕТЫ НА ВОПРОСЫ!)

1) Последовательность, у которой ***существует КОНЕЧНЫЙ*** **предел**, наз. …

2) $\{\alpha_n\}$ наз. БЕСКОНЕЧНО МАЛОЙ (БМ), если …

3) $\{X_n\}$ наз. БЕСКОНЕЧНО БОЛЬШОЙ (ББ), если …

4) **СОПРЯЖЕННЫЙ МНОЖИТЕЛЬ** для $\left(\sqrt{x} - \sqrt{y}\right)$

5) Операции, которые не определены (в любом порядке):

Летучка(ответы)

1) Последовательность, у которой ***существует КОНЕЧНЫЙ* предел**, наз. ***СХОДЯЩЕЙСЯ***.

2) $\{\alpha_n\}$ наз. БМ, если $\lim\limits_{n\to\infty} \alpha_n = 0$

3) $\{X_n\}$ наз. ББ, если $\lim\limits_{n\to\infty} X_n = \infty$

4) $(\sqrt{x} + \sqrt{y})$

5) $(+\infty) + (-\infty)$; $\dfrac{\pm\infty}{\pm\infty}$; 1^∞; $\dfrac{0}{0}$; 0^0; ∞^0; $0 \cdot (\pm\infty)$

ВЫЧИСЛИТЬ ПРЕДЕЛЫ :

1) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{(n+1)^2-(n-1)^2}{4n} =$

2) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{(n+2)^3+(n-2)^3}{n^3+2n^2-1} =$

3) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{(n+1)^3+(n-1)^3}{59n^3-41n} =$

4) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{(n+2)^2-(n-2)^2}{(n+3)^2} =$

5) $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\sqrt{n^2-3n+2}-n\right) =$

6) $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\sqrt{n^2+n+1}-\sqrt{n^2-n+1}\right) =$

7) $\lim\limits_{n\to\infty} n^2 \cdot \left(\sqrt[3]{5+8n^3}-2n\right) =$

$$1)\ \lim_{n\to\infty}\frac{(n+1)^2-(n-1)^2}{4n}=$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{(n^2+2n+1)-(n^2-2n+1)}{4n}=$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{\cancel{n^2}+2n+\cancel{1}-\cancel{n^2}+2n-\cancel{1}}{4n}=\lim_{n\to\infty}\frac{4n}{4n}=\lim_{n\to\infty}1=\ 1$$

ОТВЕ
Т

$$2)\ \lim_{n\to\infty}\frac{(n+2)^3+(n-2)^3}{n^3+2n^2-1} =$$

$$\left\{\begin{matrix}(a+b)^3 = a^3+3a^2b+3ab^2+b^3 \\ a=n\,;b=2\,;\end{matrix}\right\} \qquad \left\{\begin{matrix}(a-b)^3 = a^3-3a^2b+3ab^2-b^3 \\ a=n\,;b=2\,;\end{matrix}\right\}$$

$$= \lim_{n\to\infty}\frac{n^3+3n^2\cdot 2+3n\cdot 2^2+2^3+n^3-3n^2\cdot 2+3n\cdot 2^2-2^3}{n^3+2n^2-1} =$$

$$= \lim_{n\to\infty}\frac{n^3+\cancel{6n^2}+12n+\cancel{8}+n^3-\cancel{6n^2}+12n-\cancel{8}}{n^3+2n^2-1} = \lim_{n\to\infty}\frac{2n^3+24n}{n^3+2n^2-1} = \left[\frac{\infty}{\infty}\right]$$

Вынесем в числителе и в знаменателе старшую степень n^3:

$$= \lim_{n\to\infty}\frac{\cancel{n^3}\left(2+\frac{24\cancel{n}}{\cancel{n^3}}\right)}{\cancel{n^3}\left(1+\frac{2\cancel{n^2}}{\cancel{n^3}}-\frac{1}{n^3}\right)} = \lim_{n\to\infty}\frac{\left(2+\frac{24}{n^2}\right)}{\left(1+\frac{2}{n}-\frac{1}{n^3}\right)} = \frac{2}{1} = 2$$

$$\frac{24}{n^2}\to 0,\quad \frac{2}{n}\to 0,\quad \frac{1}{n^3}\to 0$$

ОТВЕ Т

$$5)\ \lim_{n\to\infty}\left(\sqrt{n^2-3n+2}-n\right) =$$

Сопряженный множитель: $+$

$$= \lim_{n\to\infty}\frac{(\sqrt{n^2-3n+2}-n)\cdot(\sqrt{n^2-3n+2}+n)}{(\sqrt{n^2-3n+2}+n)} =$$

$$= \lim_{n\to\infty}\frac{\left(\sqrt{n^2-3n+2}\right)^2-n^2}{(\sqrt{n^2-3n+2}+n)} = \lim_{n\to\infty}\frac{n^2-3n+2-n^2}{(\sqrt{n^2-3n+2}+n)} =$$

$$= \lim_{n\to\infty}\frac{-3n+2}{(\sqrt{n^2-3n+2}+n)} =$$

$$= \lim_{n\to\infty}\frac{n\left(-3+\frac{2}{n}\right)}{\left(\sqrt{\boxed{n^2}\left(1-\frac{3n}{n^2}+\frac{2}{n^2}\right)}+n\right)} = \lim_{n\to\infty}\frac{n\left(-3+\frac{2}{n}\right)}{\left(\boxed{n}\cdot\sqrt{\left(1-\frac{3}{n}+\frac{2}{n^2}\right)}+\boxed{n}\right)} =$$

$$= \lim_{n\to\infty}\frac{\cancel{n}\left(-3+\frac{2}{n}\right)}{\boxed{\cancel{n}}\left(\sqrt{\left(1-\frac{3}{n}+\frac{2}{n^2}\right)}+1\right)} = \lim_{n\to\infty}\frac{\left(-3+\underset{\to 0}{\frac{2}{n}}\right)}{\left(\sqrt{\left(1-\underset{\to 0}{\frac{3}{n}}+\underset{\to 0}{\frac{2}{n^2}}\right)}+1\right)} = \frac{-3}{\sqrt{1}+1} = -\frac{3}{2}$$

ОТВЕТ: $-\frac{3}{2}$

5116, 5117

ПРЕДЕЛЫ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТЕЙ, СОДЕРЖАЩИХ ФАКТОРИАЛЫ.

Факториал $n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot \dots \cdot n$

Факториал $n!$ - это **произведение** всех натуральных чисел от 1 до n включительно.

Например:

$$\boxed{3!} = \boxed{1 \cdot 2 \cdot 3}$$

$$\boxed{4!} = \underbrace{\boxed{1 \cdot 2 \cdot 3}} \cdot 4 = \boxed{3!} \cdot 4;$$

$$5! = \underbrace{\boxed{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4}} \cdot 5 = \boxed{4!} \cdot 5 = 3! \cdot 4 \cdot 5;$$

$$6! = \underbrace{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5} \cdot 6 = 5! \cdot 6 = 4! \cdot 5 \cdot 6 = 3! \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6;$$

$\dots$

$$10! = \underbrace{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 7 \cdot 8 \cdot 9} \cdot 10 = 9! \cdot 10;$$

$$100! = \underbrace{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot \dots \cdot 99} \cdot 100 = 99! \cdot 100;$$

$$n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot \dots \cdot n = \underbrace{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot \dots \cdot (n-1)}_{(n-1)!} \cdot n$$

ПРОЦЕДУРА ОТЩЕПЛЕНИЯ ФАКТОРИАЛА

$$n! = 1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5\cdot \dots \cdot n = \underbrace{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5\cdot \dots \cdot (n-1)}\cdot n$$

$$n! = (n-1)!\cdot n$$

ПРОЦЕДУРА ОТЩЕПЛЕНИЯ ФАКТОРИАЛА

$$(n+1)! = 1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5\cdot \dots \cdot (n+1) = \underbrace{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5\cdot \dots \cdot n}_{n!}\cdot \boldsymbol{(n+1)}$$

$$(n+2)! =$$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{n^2+2n+1-n^2+2n-1}{4n} =$$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{4n}{4n} =$$

$$= \underbrace{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5\cdot \dots \cdot (n+1)}_{= \lim_{n\to\infty}\frac{(n^2+2n+1)-(n^2-2n+1)}{4n} =}\cdot \boldsymbol{(n+2)}$$

Предел последовательности, содержащей факториалы

$$1)\ \lim_{n\to\infty}\frac{(n+1)^2-(n-1)^2}{4n}$$

Вынесем в числителе и в знаменателе старшую степень n^3:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{n^3+6n^2+12n+8+n^3-6n^2+12n-8}{n^3+2n^2-1}=$$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{2n^3+24n}{n^3+2n^2-1}=$$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\left(2+\frac{24}{n^2}\right)}{\left(1+\frac{2}{n}-\frac{1}{n^3}\right)}=$$

$$\lim_{n\to\infty} 1 =$$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{n^3+3n^2\cdot2+3n\cdot2^2+2^3+n^3-3n^2\cdot2+3n\cdot2^2-2^3}{n^3+2n^2-1}=$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{n^3\left(2+\frac{24n}{n^3}\right)}{n^3\left(1+\frac{2n^2}{n^3}-\frac{1}{n^3}\right)}=$$

0

1

$$\begin{cases}(a+b)^3=a^3+3a^2b+3ab^2+b^3\\ a=n;b=2;\end{cases}$$

$$\begin{cases}(a-b)^3=a^3-3a^2b+3ab^2-b^3\\ a=n;b=2;\end{cases}$$

**ОТВ
ЕТ**

Вычислить

$$0$$

$$0$$

$$\frac{2}{1} =$$

$$2)\ \lim_{n\to\infty}\frac{(n+2)^3+(n-2)^3}{n^3+2n^2-1} =$$

ДОМАШНЯЯ РАБОТА: ВСЕ, ЧТО НЕ УСПЕЛИ РЕШИТЬ НА ЗАНЯТИИ!

$$1)\ \lim_{n\to\infty}\frac{(n+2)!+(n+1)!}{(n+2)!-(n+1)!}=$$

ПРОЦЕДУРА ОТЩЕПЛЕНИЯ ФАКТОРИАЛА:

$$(n+1)!$$

$$(n+2)!\ =\ (n+1)!\,(n+2)$$

$$\left[\frac{\infty}{\infty}\right] \qquad 2$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{[n+2+1]}{[n+2-1]}=\lim_{n\to\infty}\frac{[n+3]}{[n+1]}=\left[\frac{\infty}{\infty}\right]=\lim_{n\to\infty}\frac{\cancel{n}\left[1+\overset{\to 0}{\frac{3}{n}}\right]}{\cancel{n}\left[1+\underset{\to 0}{\frac{1}{n}}\right]}=\frac{1}{1}=\ 1$$

ОТВЕТ

2) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n!+(n+2)!}{(n-1)!+(n+2)!} =$

ПРОЦЕДУРА ОТЩЕПЛЕНИЯ ФАКТОРИАЛА :

$+$

$0 = (n-1)!\,n$

$\frac{-3}{\sqrt{1}+1} = \qquad \frac{3}{2}$

$\sqrt{n^2-3n+2}$

$$n\lim_{n\to\infty}\frac{(n-1)!\,n+(n-1)!\,n(n+1)(n+2)}{(n-1)!+(n-1)!\,n(n+1)(n+2)} =$$

$$= \lim_{n\to\infty}\frac{\cancel{(n-1)!}\,[n+n(n+1)(n+2)]}{\cancel{(n-1)!}\,[1+n(n+1)(n+2)]} =$$

$$= \lim_{n\to\infty}\frac{[n+n(n+1)(n+2)]}{[1+n(n+1)(n+2)]} = \lim_{n\to\infty}\frac{[n+n(n^2+2n+n+2)]}{[1+n(n^2+2n+n+2)]} =$$

$$= \lim_{n\to\infty}\frac{[n+n(n^2+3n+2)]}{[1+n(n^2+3n+2)]} = \lim_{n\to\infty}\frac{[n+n^3+3n^2+2n]}{[1+n^3+3n^2+2n]} = \lim_{n\to\infty}\frac{[n^3+3n^2+3n]}{[1+n^3+3n^2+2n]}$$

$$= \left[\frac{\infty}{\infty}\right] = \lim_{n\to\infty}\frac{\cancel{n^3}\left[1+\frac{3n^2}{n^3}+\frac{3n}{n^3}\right]}{\cancel{n^3}\left[\frac{1}{n^3}+1+\frac{3n^2}{n^3}+\frac{2n}{n^3}\right]} = \lim_{n\to\infty}\frac{\left[1+\overset{0}{\frac{3}{n}}+\overset{0}{\frac{3}{n^2}}\right]}{\left[\underset{0}{\frac{1}{n^3}}+1+\underset{0}{\frac{3}{n}}+\underset{0}{\frac{2}{n^2}}\right]} = \frac{1}{1} = 1$$ **ОТВЕТ**

$$3)\ \lim_{n\to\infty}\frac{(n+4)!-(n+2)!}{(n+3)!} =$$

ПРОЦЕДУРА ОТЩЕПЛЕНИЯ ФАКТОРИАЛА :

$$(n+2)!$$

$$(n+3)! = (n+2)!\,(n+3)$$

$$(n+4)! = (n+3)!\,(n+4) = (n+2)!\,(n+3)(n+4)$$

$$= \lim_{n\to\infty}\frac{(n+2)!\,(n+3)(n+4)-(n+2)!}{(n+2)!\,(n+3)} = \lim_{n\to\infty}\frac{\cancel{(n+2)!}\,[(n+3)(n+4)-1]}{\cancel{(n+2)!}\,(n+3)} =$$

$$= \lim_{n\to\infty}\frac{[(n+3)(n+4)-1]}{(n+3)} = \lim_{n\to\infty}\frac{[n^2+4n+3n+12-1]}{(n+3)} =$$

$$= \lim_{n\to\infty}\frac{[n^2+7n+11]}{(n+3)} = \left[\frac{\infty}{\infty}\right] = \lim_{n\to\infty}\frac{\cancel{n^2}\left[1+\frac{7\cancel{n}}{n^{\cancel{2}}}+\frac{11}{n^2}\right]}{\cancel{n^2}\left(\frac{\cancel{n}}{n^{\cancel{2}}}+\frac{3}{n^2}\right)} = \lim_{n\to\infty}\frac{\left[1+\underset{\to 0}{\frac{7}{n}}+\underset{\to 0}{\frac{11}{n^2}}\right]}{\left(\underset{\to 0}{\frac{1}{n}}+\underset{\to 0}{\frac{3}{n^2}}\right)} =$$

$$= \left[\frac{1}{0}\right] = \infty$$ **ОТВЕТ**

ПРОЦЕДУРА ОТЩЕПЛЕНИЯ ФАКТОРИАЛА :

$$(2n+1)!$$

$$(2n+2)! = (2n+1)!\,(2n+2)$$

$$(2n+3)! = (2n+2)!\,(2n+3) =$$

$$= (2n+1)!\,(2n+2)(2n+3)$$

$$4)\ \lim_{n\to\infty}\frac{(2n+1)!+(2n+2)!}{(2n+3)!} =$$

$$= \lim_{n\to\infty}\frac{(2n+1)!+(2n+1)!\,(2n+2)}{(2n+1)!\,(2n+2)(2n+3)} =$$

$$= \lim_{n\to\infty}\frac{\cancel{(2n+1)!}\,[1+2n+2]}{\cancel{(2n+1)!}\,(2n+2)(2n+3)} = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{1+2}{4}+\frac{1+4}{16}+\frac{1+8}{64}+\dots+\frac{1+2^n}{4^n}\right) =$$

$$= \lim_{n\to\infty}\frac{[2n+3]}{(4n^2+6n+4n+6)} = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{4}+\frac{1}{2}+\left(\frac{1}{4}\right)^2+\left(\frac{2}{4}\right)^2+\left(\frac{1}{4}\right)^3+\left(\frac{2}{4}\right)^3+\dots+\left(\frac{1}{4}\right)^n+\left(\frac{2}{4}\right)^n\right) = \left[\frac{\infty}{\infty}\right] =$$

$$= \lim_{n\to\infty}\frac{\cancel{n^2}\left[\frac{2n}{n^2}+\frac{3}{n^2}\right]}{\cancel{n^2}\left(4+\frac{10n}{n^2}+\frac{6}{n^2}\right)} = \lim_{n\to\infty}\frac{\left[\frac{2}{n}+\frac{3}{n^2}\right]}{\left(4+\frac{10}{n}+\frac{6}{n^2}\right)} = \frac{0}{4} = 0$$

ОТВЕТ

Домашняя работа: выполнить задачи, не решенные на занятии и РГР.