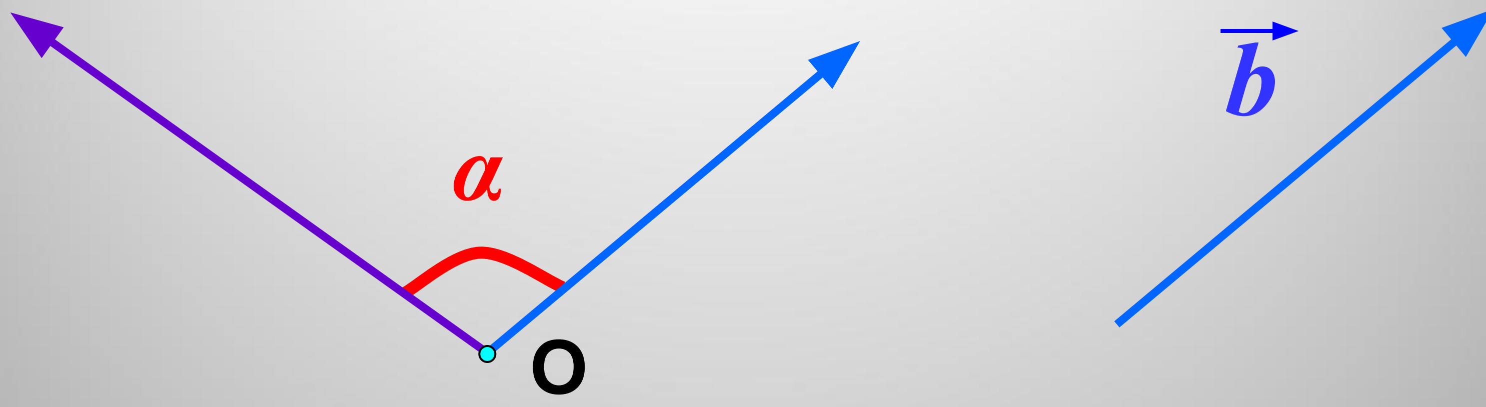
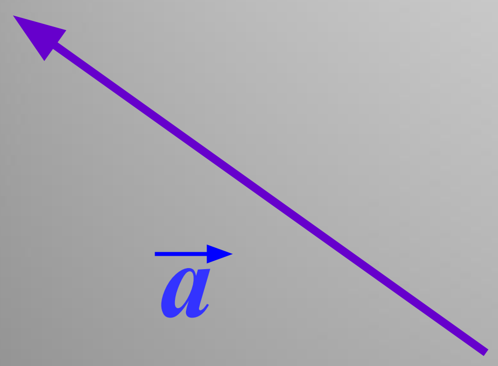
Скалярное произведение векторов

Угол между векторами

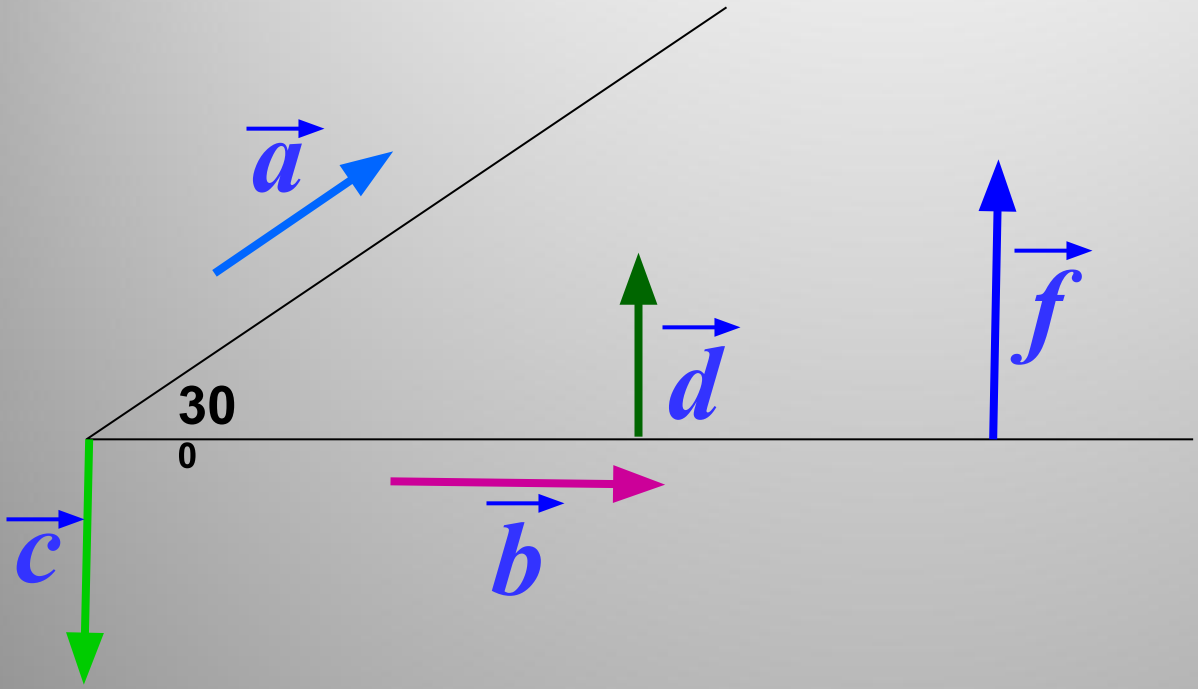




Угол между векторами $\vec{a}$ и $\vec{b}$ равен α .

$$\widehat{\vec{a}\ \vec{b}} = \alpha$$

Найдите угол между векторами



$\widehat{\vec{a}\,\vec{b}} = 30^0$

$\widehat{\vec{a}\,\vec{c}} = 120^0$

$\widehat{\vec{b}\,\vec{c}} = 90^0$

$\widehat{\vec{d}\,\vec{c}} = 180^0$

$\widehat{\vec{d}\,\vec{f}} = 0^0$

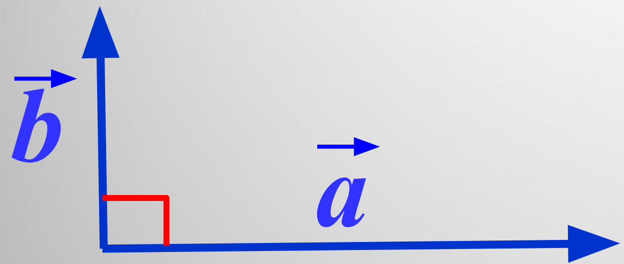
Определение

<u>Скалярным произведением</u> двух векторов называется произведение их длин на косинус угла между ними.

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cos(\widehat{\vec{a}\,\vec{b}})$$

Скалярное произведение векторов – число (скаляр).

Частный случай №1



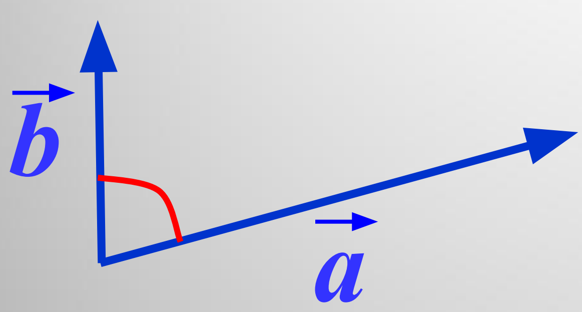
$$\widehat{\vec{a}\,\vec{b}} = 90^0$$

$$\vec{a}\cdot\vec{b} = |\vec{a}|\cdot|\vec{b}|\cos 90^0 = 0$$

Скалярное произведение ненулевых векторов равно нулю тогда и только тогда, когда эти векторы перпендикулярны.

$$\vec{a}\cdot\vec{b} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \vec{a}\perp\vec{b}$$

Частный случай №2



$$\widehat{\vec{a}\,\vec{b}} < 90^0$$

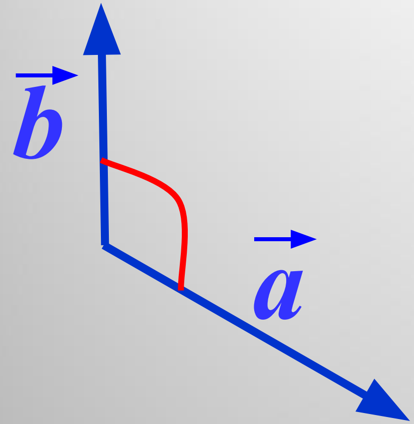
$$> 0$$

$$\vec{a}\cdot\vec{b} = |\vec{a}|\cdot|\vec{b}|\cos\alpha > 0$$

Скалярное произведение ненулевых векторов положительно тогда и только тогда, когда угол между векторами **острый.**

$$\vec{a}\cdot\vec{b} > 0 \quad \Leftrightarrow \quad \widehat{\vec{a}\,\vec{b}} < 90^0$$

Частный случай №3



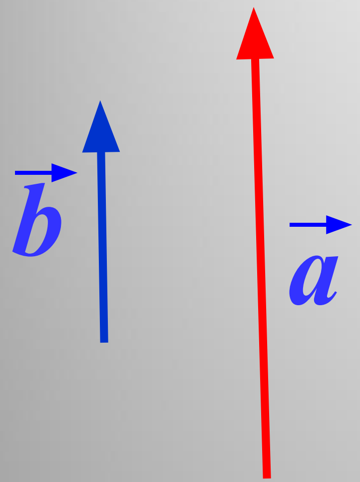
$$\widehat{\vec a\ \vec b} > 90^0$$

$$\vec a \cdot \vec b = |\vec a| \cdot |\vec b| \cos\alpha < 0 \qquad < 0$$

Скалярное произведение ненулевых векторов отрицательно тогда и только тогда, когда угол между векторами **тупой.**

$$\vec a \cdot \vec b < 0 \quad \Leftrightarrow \quad \widehat{\vec a\ \vec b} > 90^0$$

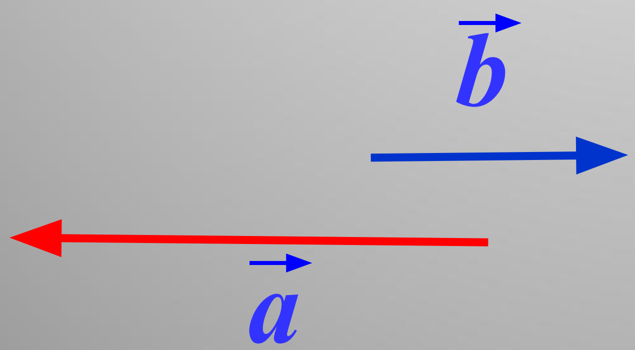
Частный случай №4



$$\widehat{\vec{a}\,\vec{b}} = 0^0$$

1

$$\vec{a}\cdot\vec{b} = |\vec{a}|\cdot|\vec{b}|\cos 0^0 = |\vec{a}|\cdot|\vec{b}|$$



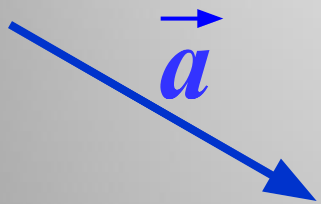
$$\widehat{\vec{a}\,\vec{b}} = 180^0$$

-1

$$\vec{a}\cdot\vec{b} = |\vec{a}|\cdot|\vec{b}|\cos 180^0 = -|\vec{a}|\cdot|\vec{b}|$$

Частный случай №5

$$\widehat{\vec{a}\,\vec{a}} = 0^0$$



$$\vec{a}\cdot\vec{a} = |\vec{a}|\cdot|\vec{a}|\underbrace{\cos 0^0}_{1} = |\vec{a}|\cdot|\vec{a}| = |\vec{a}|^2$$

Скалярное произведение $\vec{a}\cdot\vec{a}$ называется **скалярным квадратом** вектора $\vec{a}$ и обозначается $\vec{a}^{\,2}$

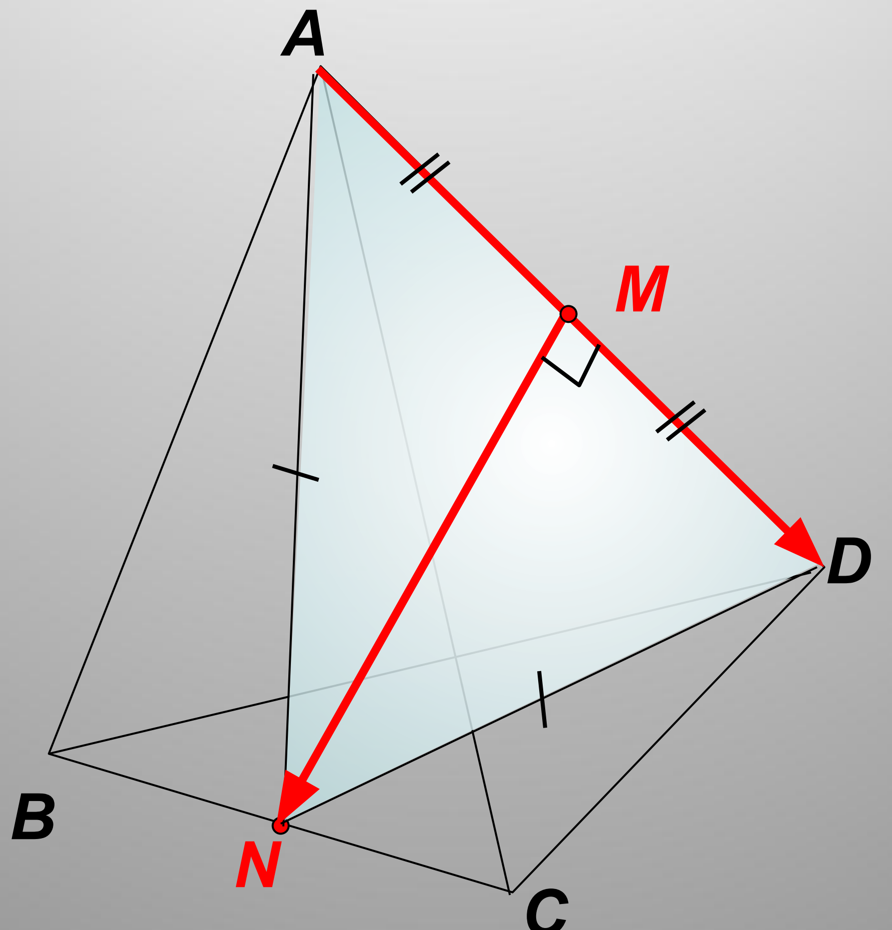
Таким образом,

скалярный квадрат вектора равен квадрату его длины.

$$\vec{a}^{\,2} = |\vec{a}|^2$$

Задача

Все ребра тетраэдра ABCD равны друг другу. Точки M и N – середины ребер AD и BC. Докажите, что $\overrightarrow{MN} \cdot \overrightarrow{AD} = 0$



Формула для нахождения скалярного произведения через координаты векторов

$\vec{a}\,(a_1; a_2; a_3)$

$\vec{a}\,(a_1; a_2; a_3)$

$\vec{a} \cdot \vec{b} = ?$

$$\boxed{\vec{a} \cdot \vec{b} = a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3}$$

$a\,(a_1; a_2; a_3)$

Пример №1

Найти скалярное произведение векторов:

$\vec{a}\{-6; 9; 5\}$ $\vec{b}\{-1; 0; 7\}$

$$\vec{a}\cdot\vec{b} = a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3$$

$$\vec{a}\cdot\vec{b} = -6\cdot(-1) + 9\cdot 0 + 5\cdot 7 = 41$$

Ответ: 41

Пример №2

Найти скалярное произведение векторов:

$\vec{a}\ \{0;\ 0;\ 4\}$ $\vec{b}\ \{22;\ 1;\ 8\}$

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3$$

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = 0 \cdot 22 + 0 \cdot 1 + 4 \cdot 8 = 32$$

Пример №3

Найти скалярное произведение векторов:

$a\,(a_1; a_2; a_3)$

$a\,(a_1; a_2; a_3)$

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cos(\widehat{\vec{a}\,\vec{b}})$$

$a\,(a_1; a_2; a_3)$

Пример 4

$$a\,(a_1; a_2; a_3)$$

$a\,(a_1; a_2; a_3)$ $a\,(a_1; a_2; a_3)$

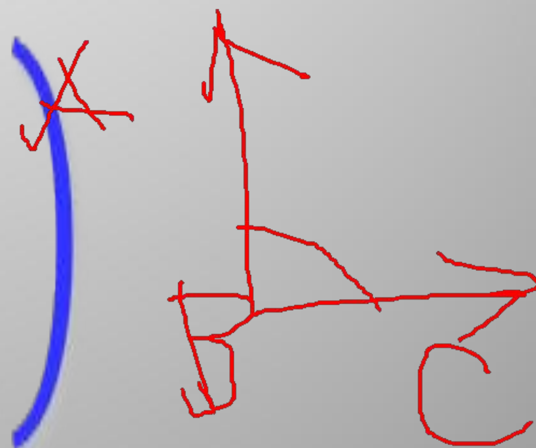
$a\,(a_1; a_2; a_3)$ $a\,(a_1; a_2; a_3)$

$a\,(a_1; a_2; a_3)$ $a\,(a_1; a_2; a_3)$

$a\,(a_1; a_2; a_3)$

$a\,(a_1; a_2; a_3)$

$a\,(a_1; a_2; a_3)$ $a\,(a_1; a_2; a_3)$ $a\,(a_1; a_2; a_3)$



Пример 5

$$a\,(a_1; a_2; a_3)$$

$$a\,(a_1; a_2; a_3)$$

Домашнее задание

п.36
скалярное произведение,
выучить формулы

№ 55(2,4), 56, 59.