

# Логические основы компьютеров

## Вспомним известное...

---

**Логическое высказывание** — это повествовательное предложение, относительно которого можно однозначно сказать, истинно оно (0) или ложно (1).

**Алгебра логики** (булева алгебра) — это математический аппарат, с помощью которого записывают, вычисляют, упрощают и преобразуют логические высказывания.

## Вспомним известное...

**Логическое выражение** — это символическая запись высказывания, которая может содержать логические переменные и знаки логических операций.

**Логическая функция** — это правило преобразования входных логических значений в выходные. Логическая функция задаётся таблицей истинности.

Выражения:

$\dot{A}$	→	0	0	0
$A + A \cdot B$	→	0	1	0
$A \cdot$	→	1	0	1
$(A + B)$		1	1	1

функция

## Операция НЕ (инверсия)

Если высказывание **A** истинно, то «**не A**» ложно, и наоборот.

A	не A
0	1
1	0

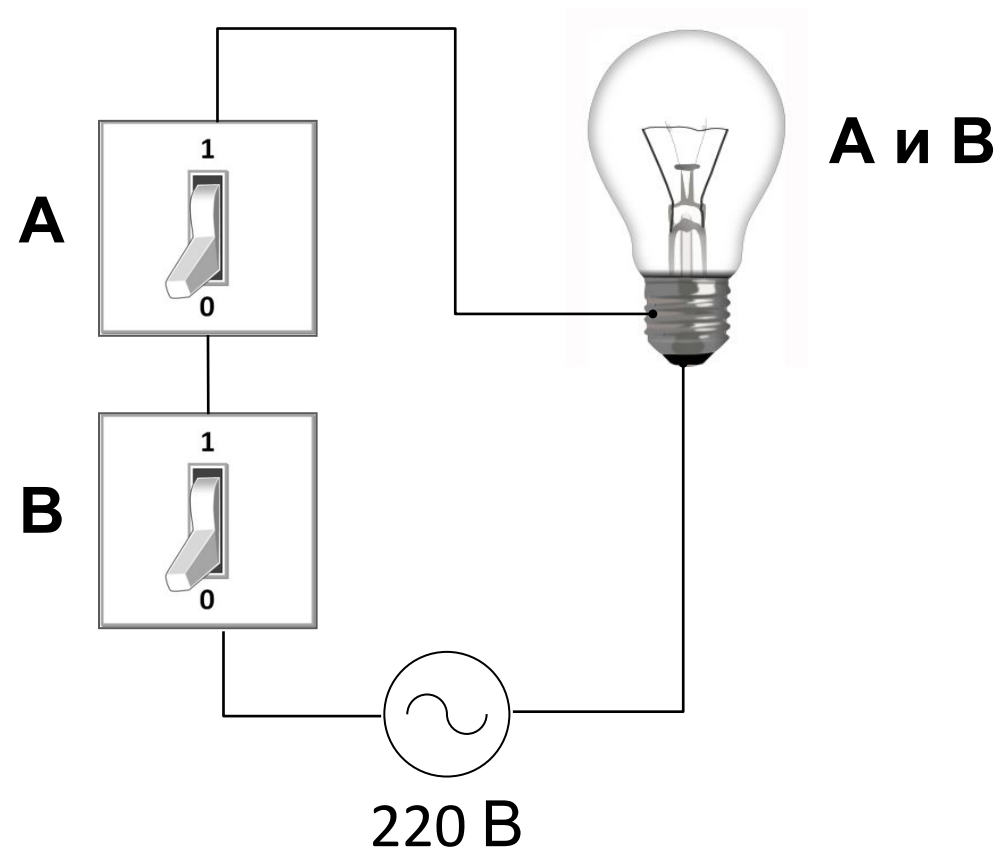
также  $\overline{A}$ ,  $\neg A$ ,  
**not A** (Паскаль),  
**! A** (Си)

таблица  
истинности  
операции НЕ

**Таблица истинности логического выражения X** — это таблица, где в левой части записываются все возможные комбинации значений исходных данных, а в правой — значение выражения X для каждой комбинации.

# Операция И

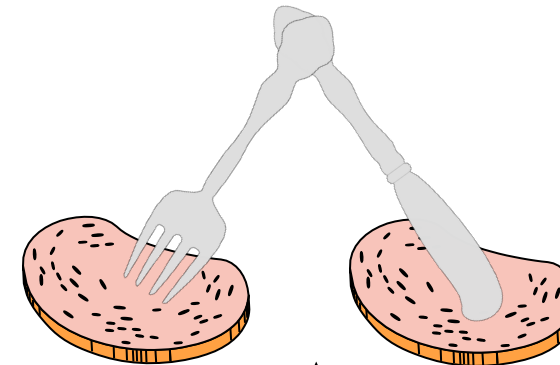
Высказывание «**A и B**» истинно тогда и только тогда, когда **A** и **B** истинны одновременно.



# Операция И (логическое умножение, конъюнкция)

	A	B	A и B
0	0	0	0
1	0	1	0
2	1	0	0
3	1	1	1

также:  $A \cdot B$ ,  $A \wedge B$ ,  
 $A \text{ and } B$  (Паскаль),  
 $A \&\& B$  (Си)

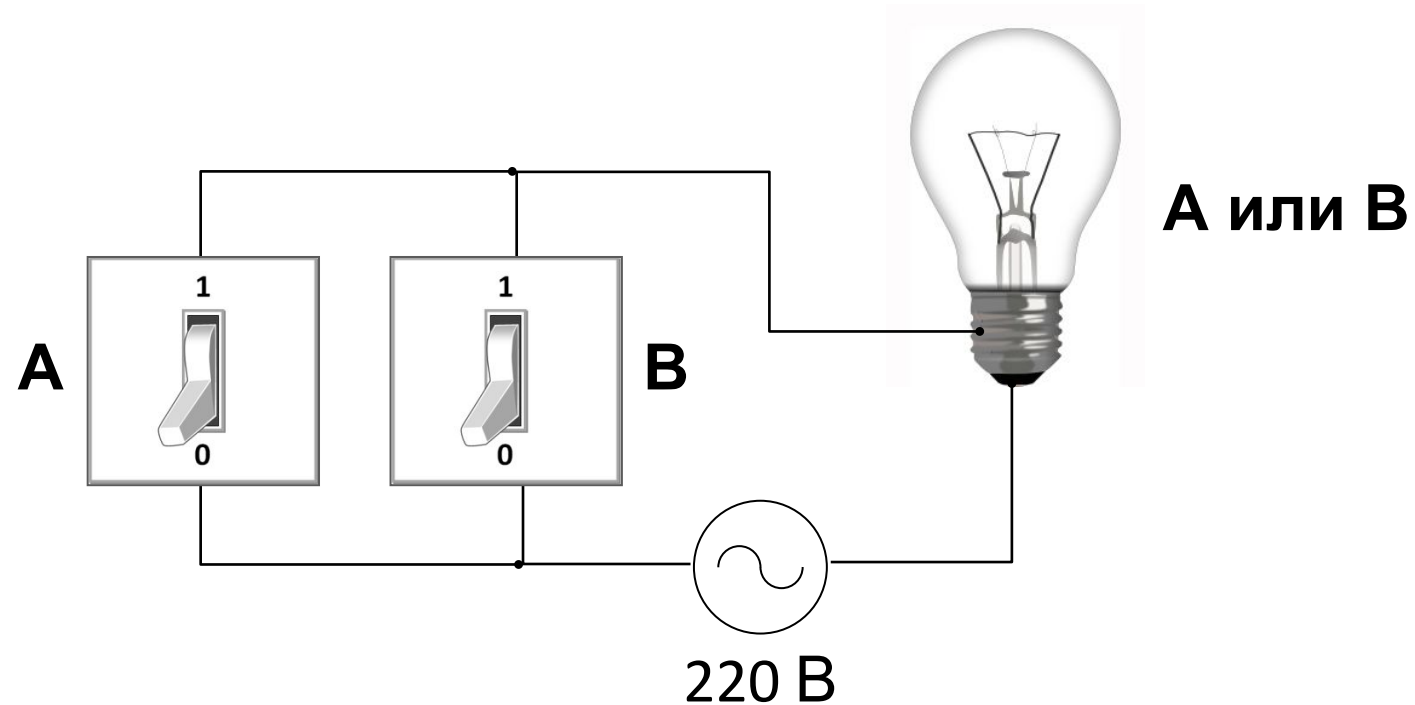


$A \wedge B$

**КОНЪЮНКЦИЯ** — от лат. *conjunctio* — соединение

## Операция ИЛИ (логическое сложение, дизъюнкция)

Высказывание «**A или B**» истинно тогда, когда истинно **A** или **B**, или оба вместе.



## Операция ИЛИ (логическое сложение, дизъюнкция)

A	B	A или B
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	1

также:  $A+B$ ,  $A \vee B$ ,  
 $A \text{ or } B$  (Паскаль),  
 $A || B$  (Си)

**ДИЗЪЮНКЦИЯ** – от лат. *disjunctio* — разъединение



## Операция «исключающее ИЛИ»

Высказывание « $A \oplus B$ » истинно тогда, когда истинно  $A$  или  $B$ , но **не оба одновременно** (то есть  $A \neq B$ ).

*«Либо пан, либо пропал».*

A	B	$A \oplus B$
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	0

также:  
 $A \text{ xor } B$  (Паскаль),  
 $A \wedge B$  (Си)

арифметическое  
сложение,  $1+1=2$

остаток

**сложение по модулю 2:**  $A \oplus B = (A + B) \bmod 2$

## Свойства операции «исключающее ИЛИ»

$$A \oplus 0 = A$$

$$A \oplus A = 0$$

$$A \oplus 1 = \bar{A}$$

$$(A \oplus B) \oplus B = ?$$

$$A \oplus B = A \cdot \bar{B} + \bar{A} \cdot B$$

A	B	$A \cdot \bar{B}$	$\bar{A} \cdot B$	$A \cdot \bar{B} + \bar{A} \cdot B$	$A \oplus B$
0	0	0	0	0	0
0	1	0	1	1	1
1	0	1	0	1	1
1	1	0	0	0	0

## Импликация («если ..., то ...»)

Высказывание « $A \rightarrow B$ » истинно, если не исключено, что из  $A$  следует  $B$ .

$A$  – «Работник хорошо работает».

$B$  – «У работника хорошая зарплата».

$A$	$B$	$A \rightarrow B$
0	0	1
0	1	1
1	0	0
1	1	1

$$A \rightarrow B = \bar{A} + B$$

## Импликация («если ..., то ...»)

«Если Вася идет гулять, то Маша сидит дома».

**A** – «Вася идет гулять».

**B** – «Маша сидит дома».

$$A \rightarrow B = 1$$



А если Вася не идет гулять?

Маша может пойти гулять (B=0), а может и не пойти (B=1)!

A	B	$A \rightarrow B$
0	0	1
0	1	1
1	0	0
1	1	1

## Эквиваленция («тогда и только тогда, ...»)

Высказывание « $A \leftrightarrow B$ » истинно тогда и только тогда, когда  $A$  и  $B$  равны.

A	B	$A \leftrightarrow B$
0	0	1
0	1	0
1	0	0
1	1	1

$$A \leftrightarrow B = \overline{A \oplus B} = A \cdot B + \overline{A} \cdot \overline{B}$$

## Базовый набор операций

---

С помощью операций **И**, **ИЛИ** и **НЕ** можно реализовать любую логическую операцию.



Сколько всего существует логических операций с двумя переменными?

## Штрих Шеффера, «И-НЕ»

$$A \mid B = \overline{A \cdot B}$$

A	B	$A \mid B$
0	0	1
0	1	1
1	0	1
1	1	0

Базовые операции через «И-НЕ»:

$$\overline{A} = A \mid A \quad A \cdot B = \overline{A \mid B} = (A \mid B) \mid (A \mid B)$$

$$A + B = \overline{A \mid B} = (A \mid A) \mid (B \mid B)$$

## Стрелка Пирса, «ИЛИ-НЕ»

$$A \downarrow B = \overline{A + B}$$

A	B	$A \downarrow B$
0	0	1
0	1	0
1	0	0
1	1	0

Базовые операции через «ИЛИ-НЕ»:



Самостоятельно...



# **Логические выражения**

## **Примеры и решение задач**

# Формализация

Прибор имеет три датчика и может работать, если два из них исправны. Записать в виде формулы ситуацию «авария».

**А** – «Датчик № 1 неисправен».

**В** – «Датчик № 2 неисправен».

**С** – «Датчик № 3 неисправен».

**Аварийный сигнал:**

**Х** – «Неисправны два датчика».

**Х** – «Неисправны датчики № 1 и № 2» **или**  
«Неисправны датчики № 1 и № 3» **или**  
«Неисправны датчики № 2 и № 3».



**Формализация** – это переход к записи на формальном языке!

$$X = A \cdot B + A \cdot C + B \cdot C$$

логическая  
формула

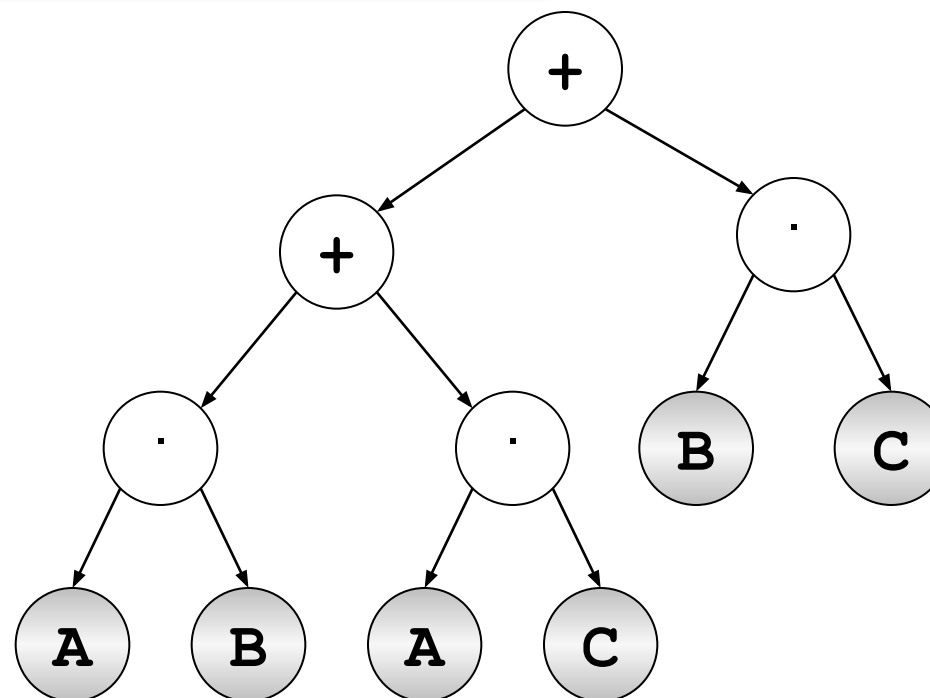
# Вычисление логических выражений

1 4 2 5 3

$$X = A \cdot B + A \cdot C + B \cdot C$$

**Порядок вычислений:**

- скобки
- НЕ
- И
- ИЛИ, исключающее ИЛИ
- импликация
- эквиваленция



## Составление таблиц истинности

$$X = A \cdot B + \bar{A} \cdot B + \bar{B}$$

	A	B	$A \cdot B$	$\bar{A} \cdot B$	$\bar{B}$	X
0	0	0	0	0	1	1
1	0	1	0	1	0	1
2	1	0	0	0	1	1
3	1	1	1	0	0	1

Логические выражения могут быть:

- **тождественно истинными** (всегда 1, тавтология)
- **тождественно ложными** (всегда 0, противоречие)
- **вычислимыми** (зависят от исходных данных)

## Составление таблиц истинности

$$X = A \cdot B + A \cdot C + B \cdot C$$

	A	B	C	$A \cdot B$	$A \cdot C$	$B \cdot C$	X
0	0	0	0	0	0	0	0
1	0	0	1	0	0	0	0
2	0	1	0	0	0	0	0
3	0	1	1	0	0	1	1
4	1	0	0	0	0	0	0
5	1	0	1	0	1	0	1
6	1	1	0	1	0	0	1
7	1	1	1	1	1	1	1

## Задачи

---

**Задача 1.** При каких значениях логических переменных истинно выражение:

$$X_1 \cdot \bar{X}_2 \cdot \bar{X}_3 \cdot X_4 \cdot \bar{X}_5$$

**Решение.** Все сомножители равны 1:

$$X_1 = X_4 = 1, \quad X_2 = X_3 = X_5 = 1$$

**Задача 2.** При каких значениях логических переменных ложно выражение:

$$X_1 + \bar{X}_2 + X_3 + \bar{X}_4 + X_5$$

**Решение.** Все слагаемые равны 0:

$$X_1 = X_3 = X_5 = 0, \quad X_2 = X_4 = 1$$

## Задачи

**Задача 3.** Запишите любое логическое выражение, соответствующее таблице истинности:

$X$	$Y$	$Z$	$F$
1	0	0	1
0	0	0	0
1	1	1	0



Полная таблица?

в полной  
 $2^3 = 8$  строк

истинно при  $X = 1, Y = Z = 0$

$$X = \bar{Y} = \bar{Z} = 1$$

$$F = X \cdot \bar{Y} \cdot \bar{Z}$$

## Задачи

**Задача 4.** Запишите любое логическое выражение, соответствующее таблице истинности:

$X$	$Y$	$Z$	$F$
1	0	0	0
0	0	0	1
1	1	1	1

ложно при  $X = 1, Y = Z = 0$

$$\bar{X} = Y = Z = 0$$

$$F = \bar{X} + Y + Z$$



## Задачи

**Задача 5.** Символом  $F$  обозначено одно из указанных ниже логических выражений от трёх аргументов:  $X$ ,  $Y$ ,  $Z$ . Дан фрагмент таблицы истинности выражения  $F$ . Какое выражение соответствует  $F$ ?

$X$	$Y$	$Z$	$F$
1	0	0	1
0	0	0	1
1	1	1	0

- 1)  $\neg X \wedge \neg Y \wedge \neg Z$
- 2)  $X \wedge Y \wedge Z$
- 3)  $X \vee Y \vee Z$
- 4)  $\neg X \vee \neg Y \vee \neg Z$

- 1)  $\bar{X} \cdot \bar{Y} \cdot \bar{Z}$
- 2)  $X \cdot Y \cdot Z$
- 3)  $X + Y + Z$
- 4)  $\bar{X} + \bar{Y} + \bar{Z}$

Быстрый способ:

$$F = \bar{X} + \bar{Y} + \bar{Z}$$

## Задачи

**Задача 6.** Запишите любое логическое выражение, соответствующее таблице истинности:

$x_1$	$x_2$	$x_3$	$x_4$	$x_5$	$x_6$	$x_7$	$x_8$	$F$
		0					1	1
0			0					0
	0						0	0

«И»

$$F = x_1 \cdot x_2 \cdot \bar{x}_3 \cdot x_4 \cdot x_5 \cdot x_6 \cdot x_7 \cdot x_8$$

могут быть и с инверсиями!

## Задачи

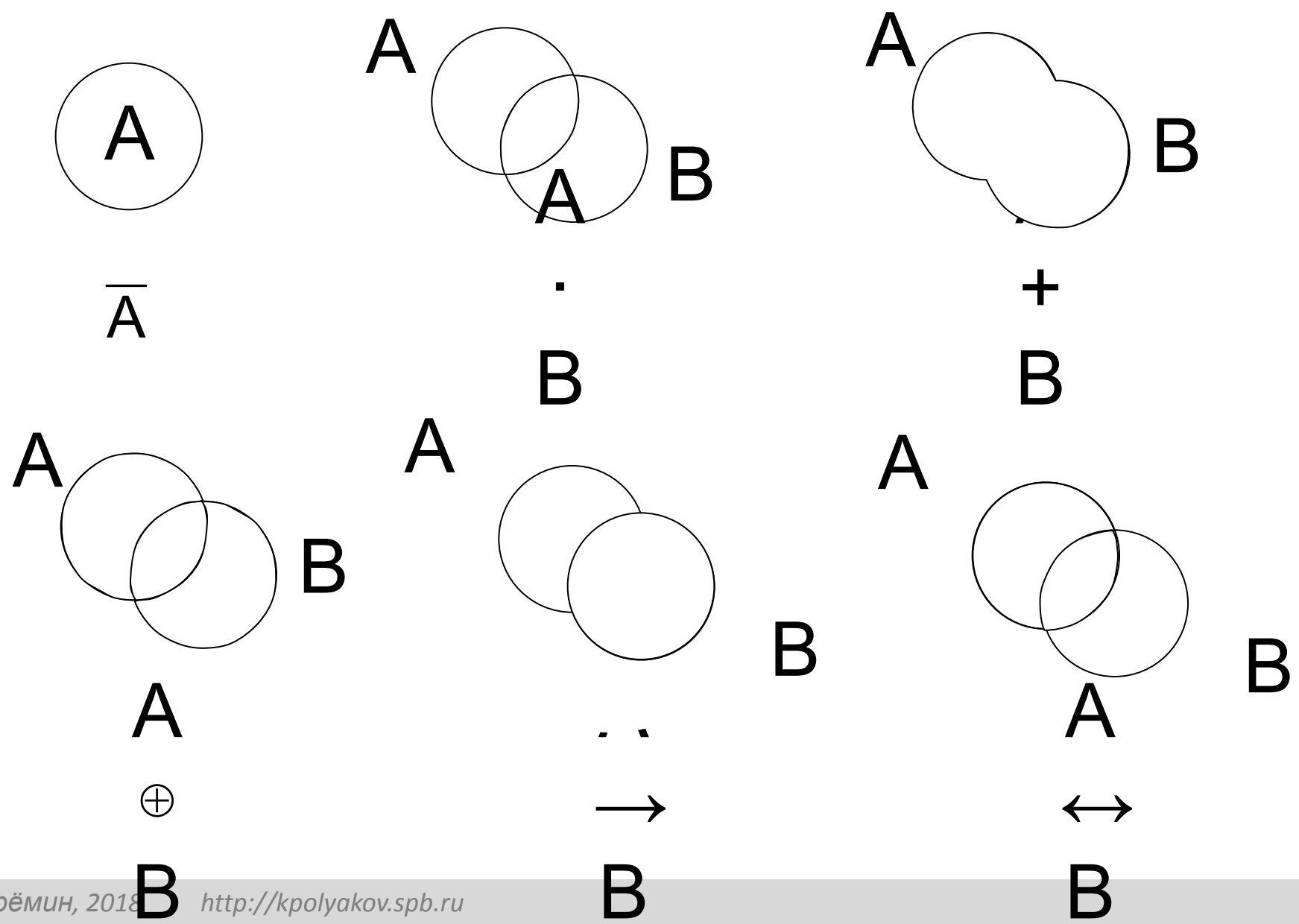
**Задача 7.** Задана таблица истинности логической функции  $F = \bar{Z} \cdot X + X \cdot Y$ . Определите, где какой столбец.

Z	Y	X	F
0	0	0	0
0	0	1	1
0	1	0	0
0	1	1	1
1	0	0	0
1	0	1	0
1	1	0	0
1	1	1	1

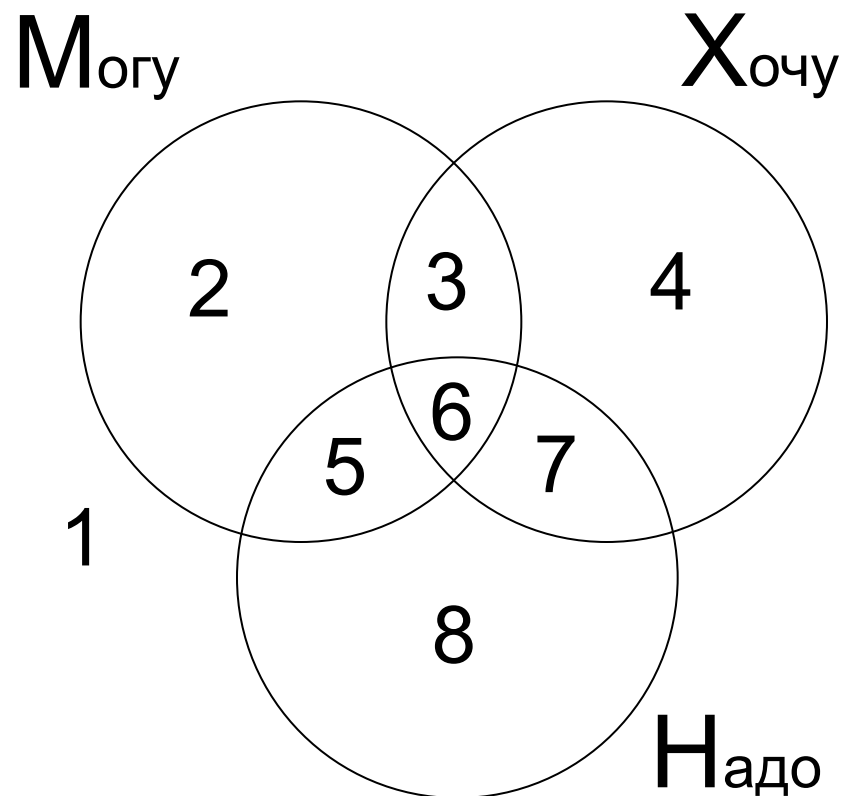
X	Y	Z	F
1	0	0	1
1	1	0	1
1	1	1	1

X	Y	Z	F
0	0	0	
0	0	1	
0	1	0	
0	1	1	
1	0	0	1
1	0	1	
1	1	0	1
1	1	1	1

# Диаграммы Венна (круги Эйлера)



## Диаграмма с тремя переменными



$$1 = \overline{M} \cdot \overline{X} \cdot \overline{N} \quad 5 = M \cdot \overline{X} \cdot N$$

$$2 = M \cdot \overline{X} \cdot \overline{N} \quad 6 = M \cdot X \cdot N$$

$$3 = M \cdot X \cdot \overline{N} \quad 7 = \overline{M} \cdot X \cdot N$$

$$4 = \overline{M} \cdot X \cdot \overline{N} \quad 8 = \overline{M} \cdot \overline{X} \cdot N$$

$$3 + 4 = M \cdot X \cdot \overline{N} + \overline{M} \cdot X \cdot \overline{N}$$

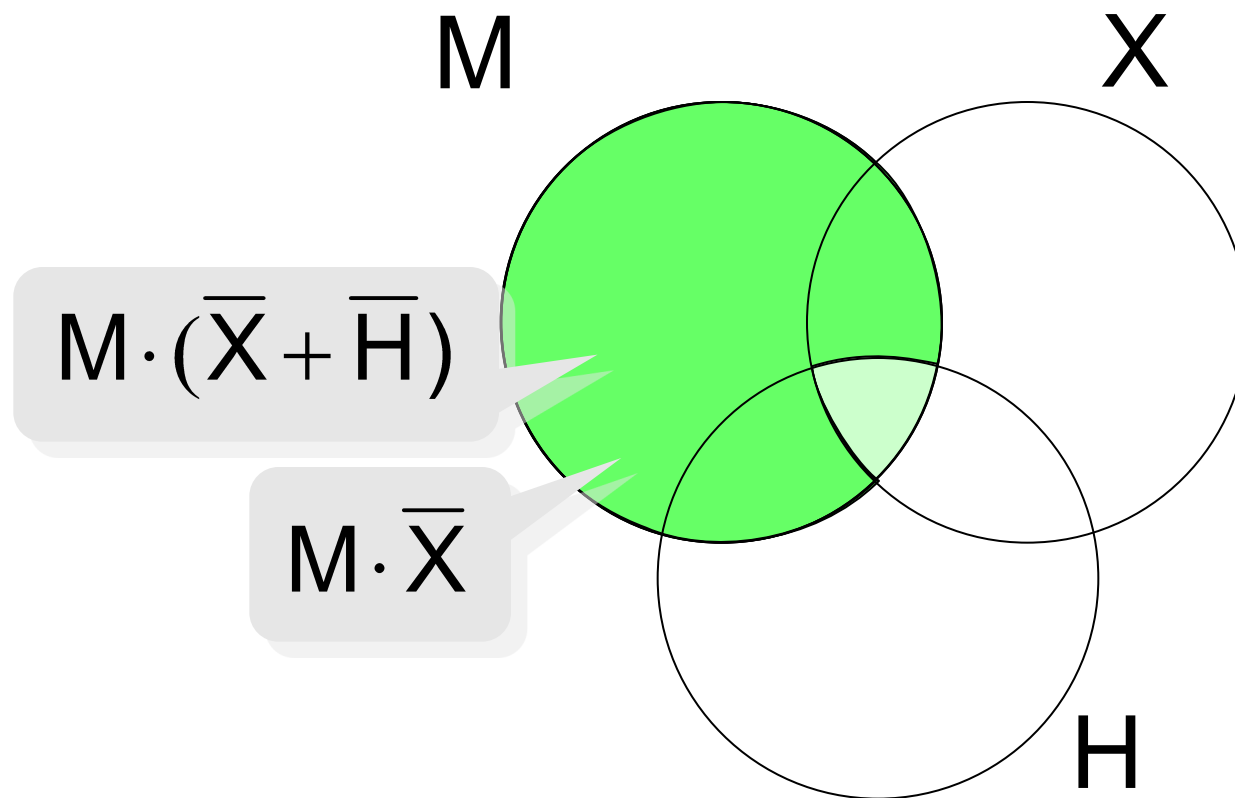
$$3 + 4 = X \cdot \overline{N}$$



**Логические выражения можно упрощать!**

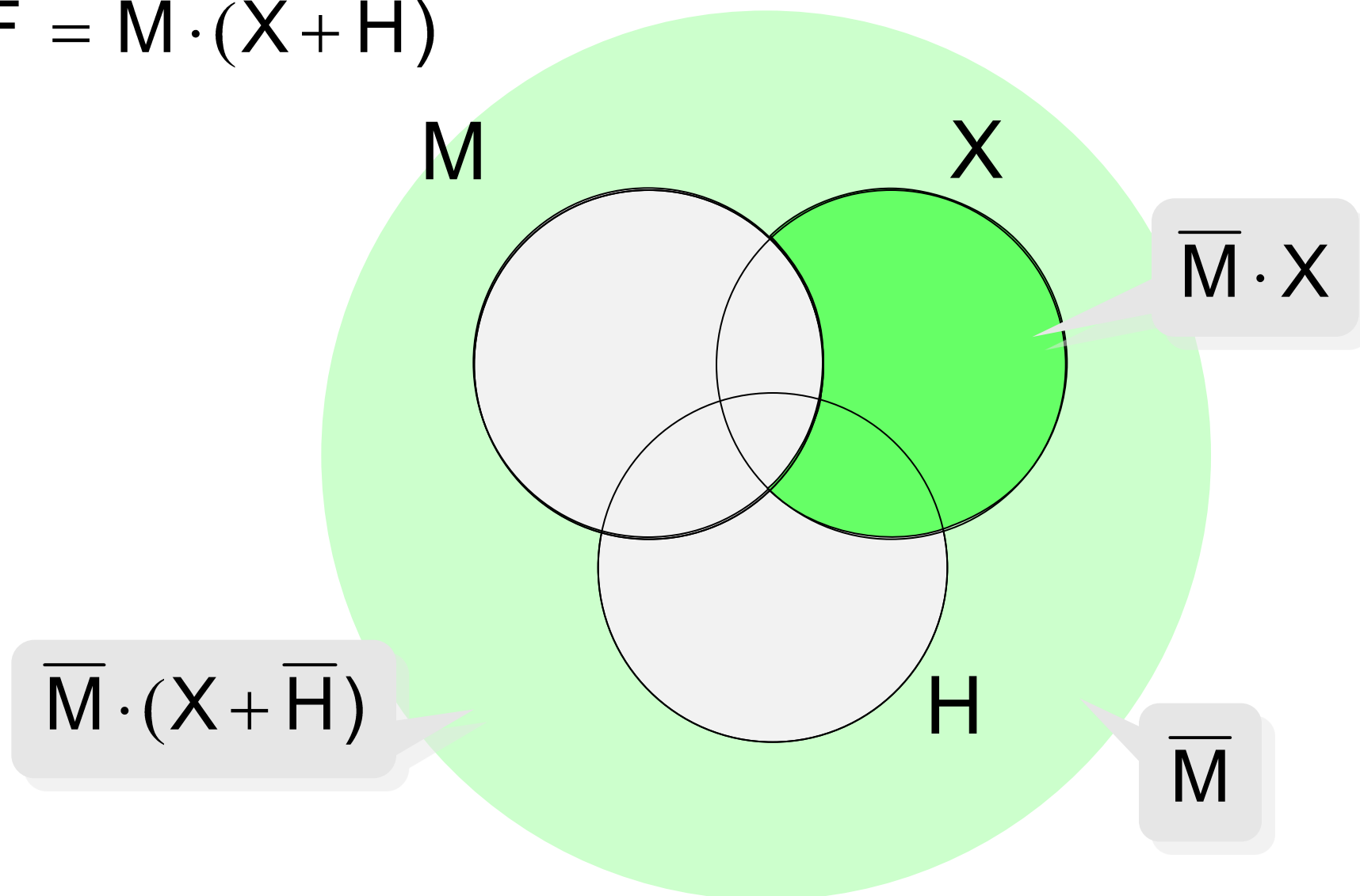
## Диаграмма с тремя переменными

$$F = M \cdot (\bar{X} + \bar{H})$$



## Диаграмма с тремя переменными

$$F = \overline{M} \cdot (X + \overline{H})$$



## Задачи

---

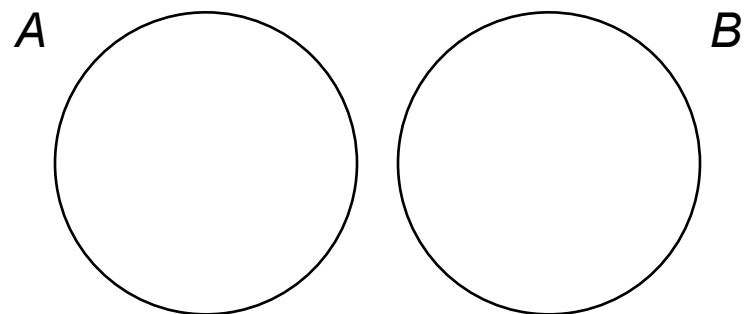
Известно количество сайтов, которых находит поисковый сервер по следующим запросам:

<i><b>Запрос</b></i>	<i><b>Количество сайтов</b></i>
<i>огурцы</i>	<i>100</i>
<i>помидоры</i>	<i>200</i>
<i>огурцы &amp; помидоры</i>	<i>50</i>

Сколько сайтов будет найдено по запросу  
**огурцы | помидоры**



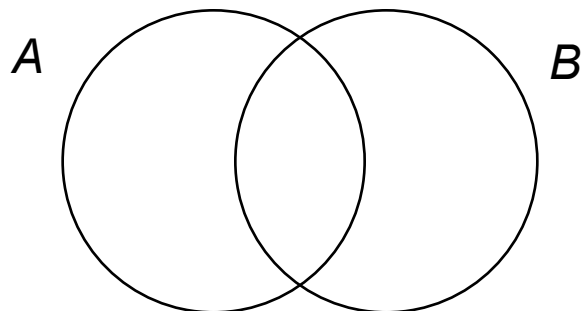
# Задачи



$$N_{A|B} =$$

50

огурцы &amp; помидоры



$$N_{A|B} = N_A + N_B - N_{A\&B}$$

огурцы | помидоры

250

огурцы

100

помидоры

200

## Задачи

Известно количество сайтов, которых находит поисковый сервер по следующим запросам:

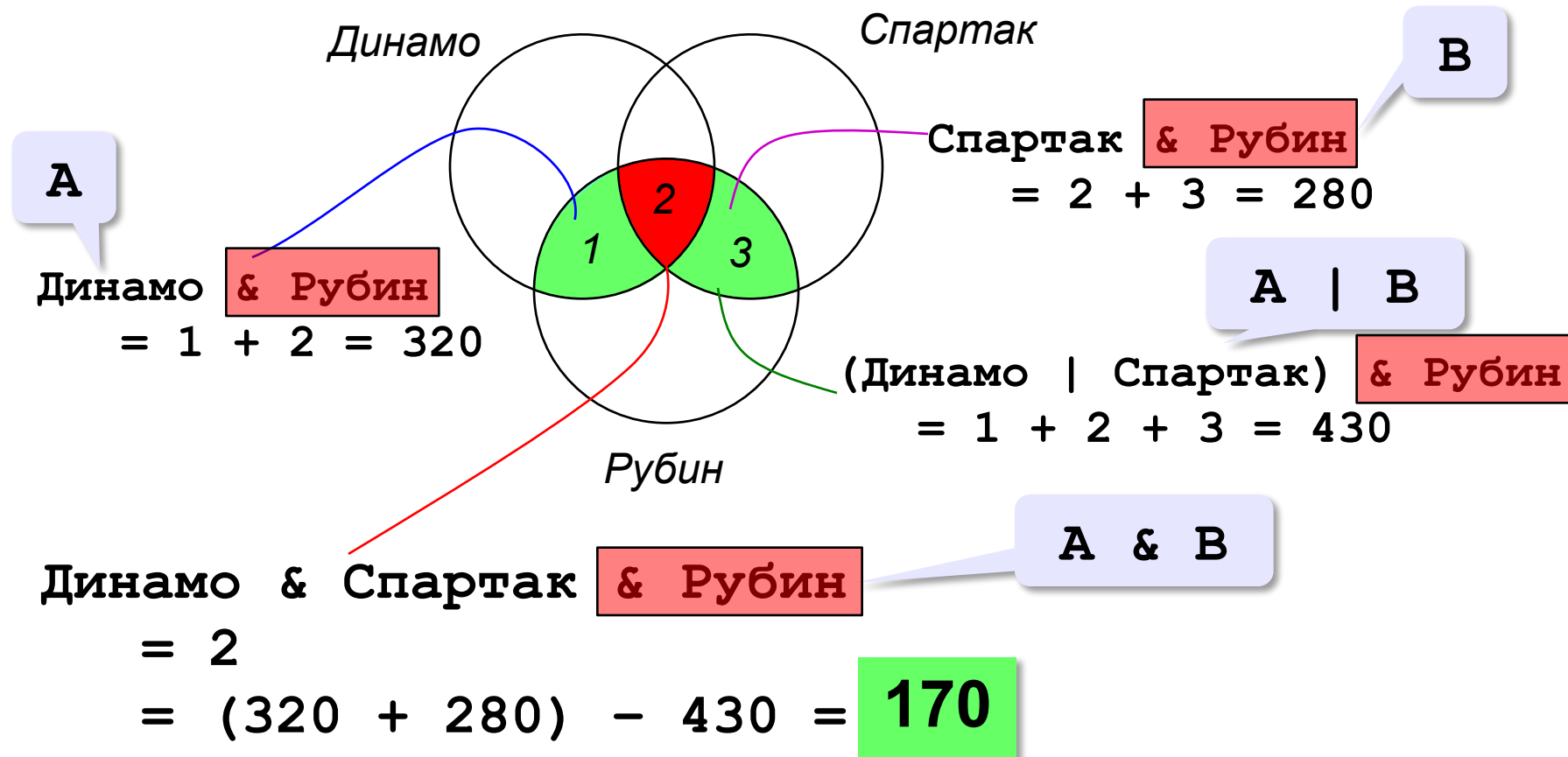
<b>Запрос</b>	<b>Количество сайтов</b>
<i>Динамо &amp; Рубин</i>	320
<i>Спартак &amp; Рубин</i>	280
<i>(Динамо   Спартак) &amp; Рубин</i>	430

Сколько сайтов будет найдено по запросу  
**Динамо & Спартак & Рубин**



Общее условие с & можно отбросить !

# Задачи



$$N_{A \& B} = N_A + N_B - N_{A|B}$$

## Задачи

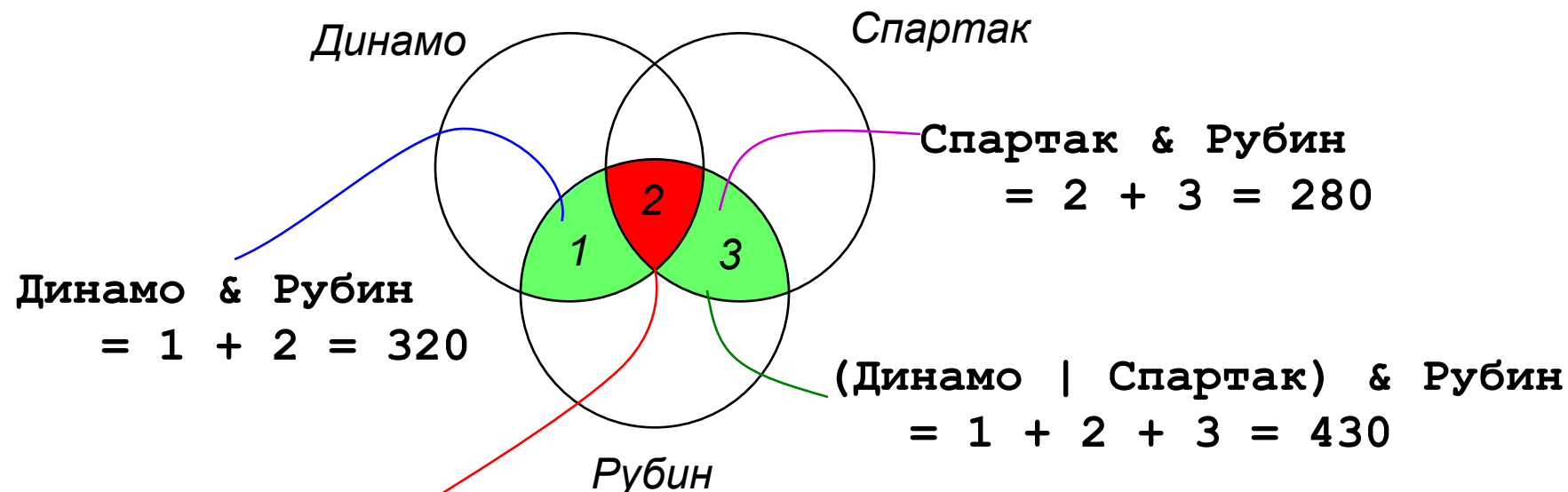
Известно количество сайтов, которых находит поисковый сервер по следующим запросам :

<b>Запрос</b>	<b>Количество сайтов</b>
<i>Динамо</i>	<i>320</i>
<i>Спартак</i>	<i>280</i>
<i>Динамо   Спартак</i>	<i>430</i>

Сколько сайтов будет найдено по запросу  
**Динамо & Спартак**

Ответ:  $320 + 280 - 430 =$  **170**

# Задачи



Динамо & Спартак & Рубин

$= 2$

$= (320 + 280) - 430 =$

**170**

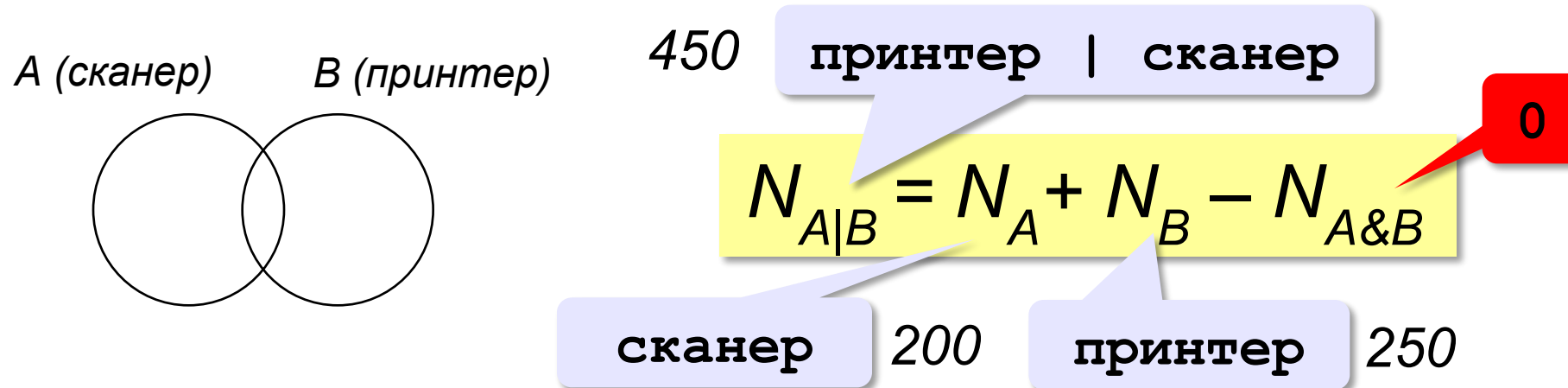
## Задачи

Поисковый сервер в автоматическом режиме составил таблицу ключевых слов для сайтов некоторого сегмента Интернета. Вот ее фрагмент:

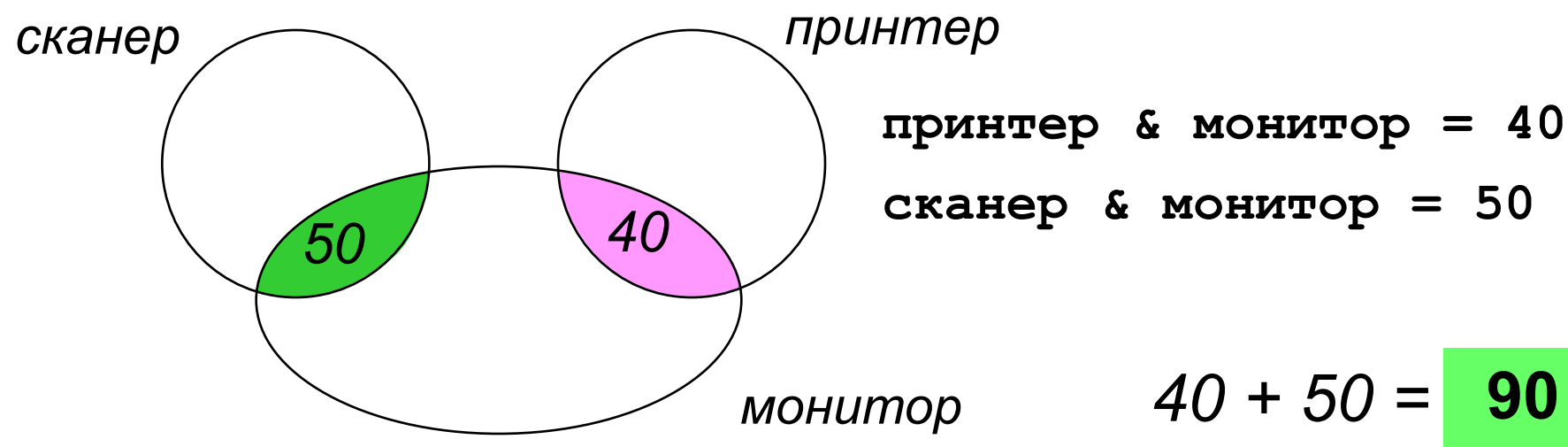
Ключевое слово	Количество сайтов, для которых данное слово является ключевым
сканер	200
принтер	250
монитор	450

Сколько сайтов будет найдено по запросу  
**(принтер | сканер) & монитор**  
если по трем следующим запросам найдено:  
**принтер | сканер** – 450 сайтов,  
**принтер & монитор** – 40 сайтов  
**сканер & монитор** – 50 сайтов.

# Задачи



**(принтер | сканер) & монитор = ?**



## Сложная задача

---

Ниже приведены запросы и количество страниц, которые нашел поисковый сервер по этим запросам в некотором сегменте Интернета:

<b>мезозой</b>	<b>500</b>
<b>кроманьонец</b>	<b>600</b>
<b>неандерталец</b>	<b>700</b>
<b>мезозой   кроманьонец</b>	<b>800</b>
<b>мезозой   неандерталец</b>	<b>1000</b>
<b>неандерталец &amp; (мезозой   кроманьонец)</b>	<b>200</b>

Сколько страниц будет найдено по запросу  
**кроманьонец & (мезозой | неандерталец)**