

Логические основы компьютеров

Вспомним известное...

Логическое высказывание – это повествовательное предложение, относительно которого можно однозначно сказать, истинно оно (0) или ложно (1).

Алгебра логики (булева алгебра) — это математический аппарат, с помощью которого записывают, вычисляют, упрощают и преобразуют логические высказывания.

Вспомним известное...

Логическое выражение — это символическая запись высказывания, которая может содержать логические переменные и знаки логических операций.

Логическая функция — это правило преобразования входных логических значений в выходные. Логическая функция задаётся таблицей истинности.

Выражения:

A	\longrightarrow	A	B	F
$A + A \cdot B$	\longrightarrow	0	0	0
$A \cdot$	\longrightarrow	0	1	0
$(A + B)$	\longrightarrow	1	0	1
		1	1	1

функция

Операция НЕ (инверсия)

Если высказывание **A** истинно, то «**не A**» ложно, и наоборот.

A	не A
0	1
1	0

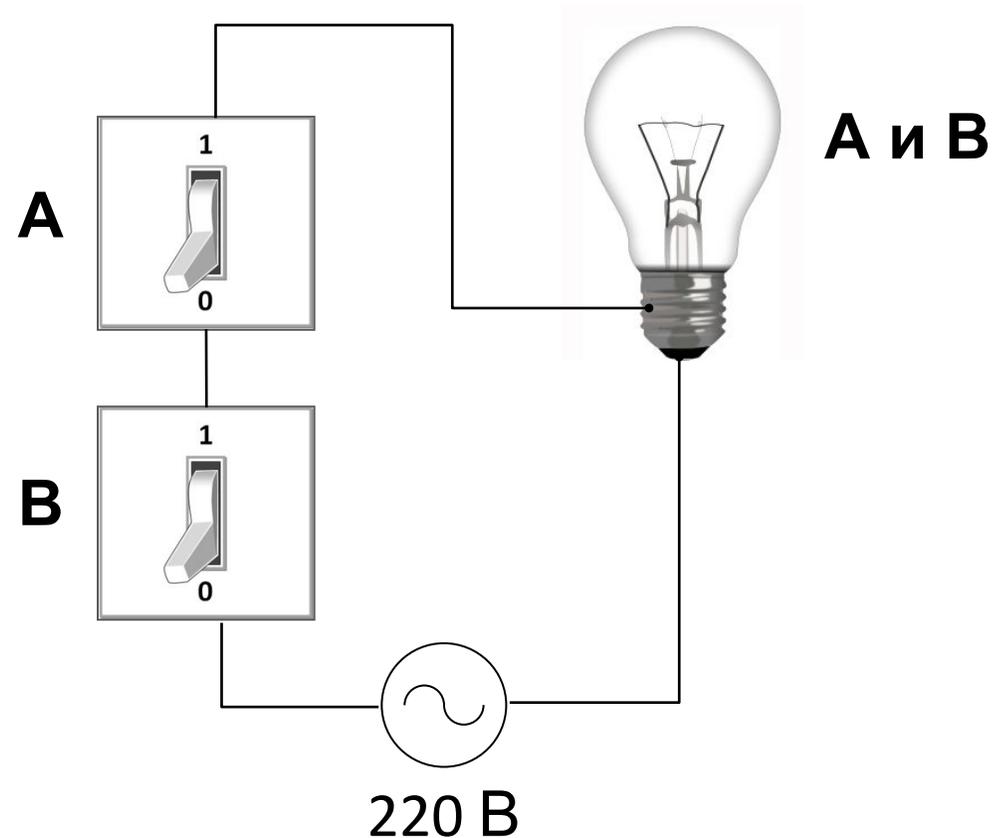
также \bar{A} , $\neg A$,
not A (Паскаль),
! A (Си)

таблица
истинности
операции НЕ

Таблица истинности логического выражения X – это таблица, где в левой части записываются все возможные комбинации значений исходных данных, а в правой – значение выражения X для каждой комбинации.

Операция И

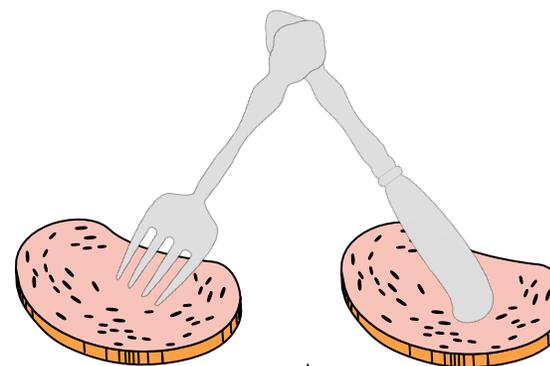
Высказывание «**A** и **B**» истинно тогда и только тогда, когда **A** и **B** истинны одновременно.



Операция И (логическое умножение, конъюнкция)

	A	B	A и B
0	0	0	0
1	0	1	0
2	1	0	0
3	1	1	1

также: $A \cdot B$, $A \wedge B$,
A and B (Паскаль),
 $A \&\& B$ (Си)

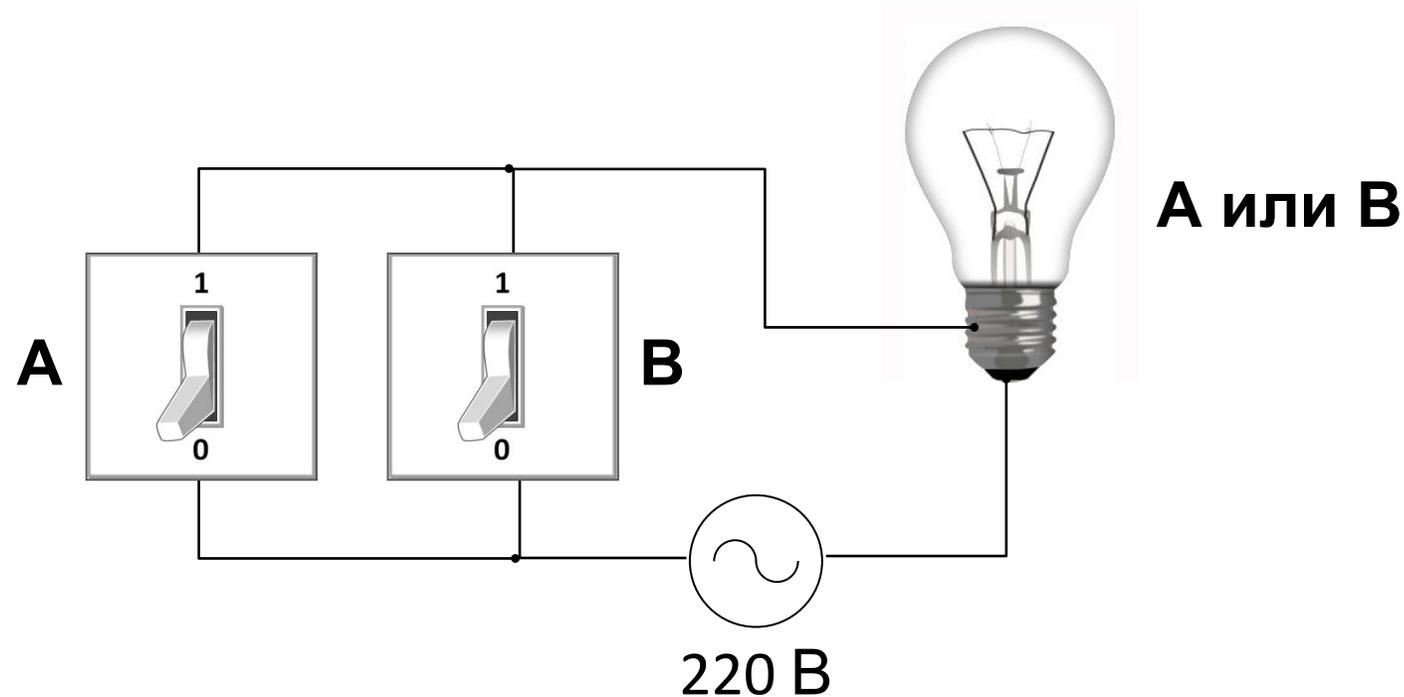


A \wedge
B

КОНЪЮНКЦИЯ – от лат. *conjunctio* — соединение

Операция ИЛИ (логическое сложение, дизъюнкция)

Высказывание «**A или B**» истинно тогда, когда истинно **A** или **B**, или оба вместе.



Операция ИЛИ (логическое сложение, дизъюнкция)

A	B	A или B
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	1

также: $A+B$, $A \vee B$,
 $A \text{ or } B$ (Паскаль),
 $A \parallel B$ (Си)

ДИЗЪЮНКЦИЯ – от лат. *disjunctio* — разъединение

Операция «исключающее ИЛИ»

Высказывание « $A \oplus B$ » истинно тогда, когда истинно A или B , но **не оба одновременно** (то есть $A \neq B$).

«Либо пан, либо пропал».

A	B	$A \oplus B$
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	0

также:
 $A \text{ xor } B$ (Паскаль),
 $A \wedge B$ (Си)

арифметическое
сложение, $1+1=2$

остаток

сложение по модулю 2: $A \oplus B = (A + B) \bmod 2$

Свойства операции «исключающее ИЛИ»

$$A \oplus 0 = A$$

$$A \oplus A = 0$$

$$A \oplus 1 = \bar{A}$$

$$(A \oplus B) \oplus B = ?$$

$$A \oplus B = A \cdot \bar{B} + \bar{A} \cdot B$$

A	B	$A \cdot \bar{B}$	$\bar{A} \cdot B$	$A \cdot \bar{B} + \bar{A} \cdot B$	$A \oplus B$
0	0	0	0	0	0
0	1	0	1	1	1
1	0	1	0	1	1
1	1	0	0	0	0

Импликация («если ..., то ...»)

Высказывание « $A \rightarrow B$ » истинно, если не исключено, что из A следует B .

A – «Работник хорошо работает».

B – «У работника хорошая зарплата».

A	B	$A \rightarrow B$
0	0	1
0	1	1
1	0	0
1	1	1

$$A \rightarrow B = \bar{A} + B$$

Импликация («если ..., то ...»)

«Если Вася идет гулять, то Маша сидит дома».

A – «Вася идет гулять».

B – «Маша сидит дома».

$$A \rightarrow B = 1$$



А если Вася не идет гулять?

Маша может пойти гулять (B=0), а может и не пойти (B=1)!

A	B	$A \rightarrow B$
0	0	1
0	1	1
1	0	0
1	1	1

Эквиваленция («тогда и только тогда, ...»)

Высказывание « $A \leftrightarrow B$ » истинно тогда и только тогда, когда A и B равны.

A	B	$A \leftrightarrow B$
0	0	1
0	1	0
1	0	0
1	1	1

$$A \leftrightarrow B = \overline{A \oplus B} = A \cdot B + \overline{A} \cdot \overline{B}$$

Базовый набор операций

С помощью операций **И**, **ИЛИ** и **НЕ** можно реализовать любую логическую операцию.



Сколько всего существует логических операций с двумя переменными?

Штрих Шеффера, «И-НЕ»

$$A | B = \overline{A \cdot B}$$

A	B	A B
0	0	1
0	1	1
1	0	1
1	1	0

Базовые операции через «И-НЕ»:

$$\overline{A} = A | A \quad A \cdot B = \overline{A | B} = (A | B) | (A | B)$$

$$A + B = \overline{\overline{A} | \overline{B}} = (A | A) | (B | B)$$

Стрелка Пирса, «ИЛИ-НЕ»

$$A \downarrow B = \overline{A + B}$$

A	B	$A \downarrow B$
0	0	1
0	1	0
1	0	0
1	1	0

Базовые операции через «ИЛИ-НЕ»:



Логические выражения

Примеры и решение задач

Формализация

Прибор имеет три датчика и может работать, если два из них исправны. Записать в виде формулы ситуацию «авария».

A – «Датчик № 1 неисправен».

B – «Датчик № 2 неисправен».

C – «Датчик № 3 неисправен».

Аварийный сигнал:

X – «Неисправны два датчика».

X – «Неисправны датчики № 1 и № 2» **или**
«Неисправны датчики № 1 и № 3» **или**
«Неисправны датчики № 2 и № 3».



Формализация – это переход к записи на формальном языке!

$$X = A \cdot B + A \cdot C + B \cdot C$$

логическая
формула

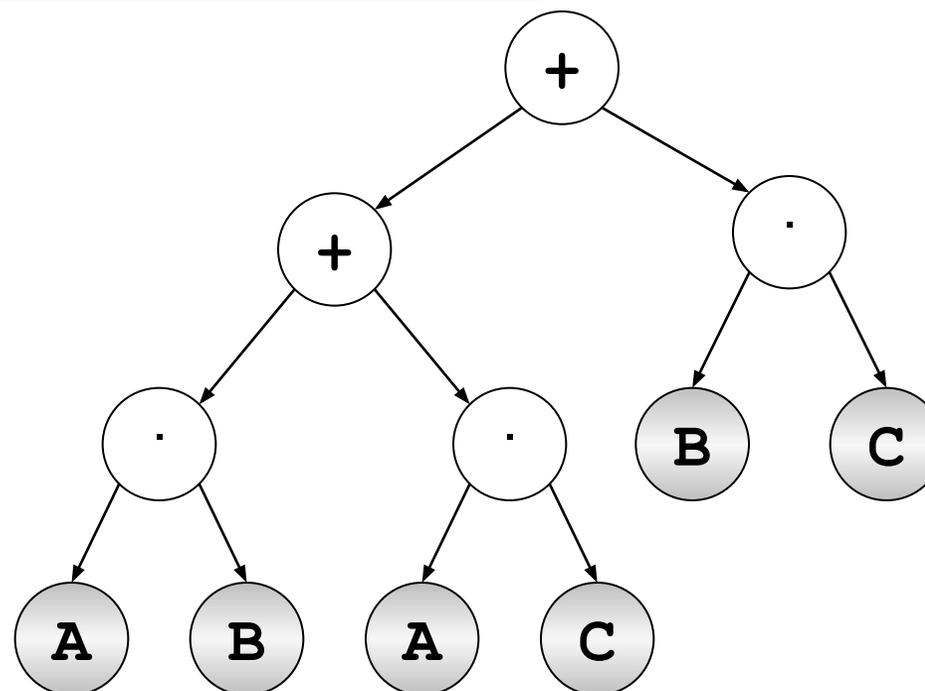
Вычисление логических выражений

1 4 2 5 3

$$X = A \cdot B + A \cdot C + B \cdot C$$

Порядок вычислений:

- скобки
- НЕ
- И
- ИЛИ, исключаящее ИЛИ
- импликация
- эквиваленция



Составление таблиц истинности

$$X = A \cdot B + \bar{A} \cdot B + \bar{B}$$

	A	B	A·B	$\bar{A} \cdot B$	\bar{B}	X
0	0	0	0	0	1	1
1	0	1	0	1	0	1
2	1	0	0	0	1	1
3	1	1	1	0	0	1

Логические выражения могут быть:

- **тождественно истинными** (всегда 1, тавтология)
- **тождественно ложными** (всегда 0, противоречие)
- **вычислимыми** (зависят от исходных данных)

Составление таблиц истинности

$$X = A \cdot B + A \cdot C + B \cdot C$$

	A	B	C	A·B	A·C	B·C	X
0	0	0	0	0	0	0	0
1	0	0	1	0	0	0	0
2	0	1	0	0	0	0	0
3	0	1	1	0	0	1	1
4	1	0	0	0	0	0	0
5	1	0	1	0	1	0	1
6	1	1	0	1	0	0	1
7	1	1	1	1	1	1	1

Задачи

Задача 1. При каких значениях логических переменных истинно выражение:

$$X_1 \cdot \bar{X}_2 \cdot \bar{X}_3 \cdot X_4 \cdot \bar{X}_5$$

Решение. Все сомножители равны 1:

$$X_1 = X_4 = 1, \quad X_2 = X_3 = X_5 = 1$$

Задача 2. При каких значениях логических переменных ложно выражение:

$$X_1 + \bar{X}_2 + X_3 + \bar{X}_4 + X_5$$

Решение. Все слагаемые равны 0:

$$X_1 = X_3 = X_5 = 0, \quad X_2 = X_4 = 1$$

Задачи

Задача 3. Запишите любое логическое выражение, соответствующее таблице истинности:

X	Y	Z	F
1	0	0	1
0	0	0	0
1	1	1	0



Полная таблица?

В полной
 $2^3 = 8$ строк

истинно при $X = 1, Y = Z = 0$

$$X = \bar{Y} = \bar{Z} = 1$$

$$F = X \cdot \bar{Y} \cdot \bar{Z}$$

Задачи

Задача 4. Запишите любое логическое выражение, соответствующее таблице истинности:

X	Y	Z	F
1	0	0	0
0	0	0	1
1	1	1	1

ложно при $X = 1, Y = Z = 0$

$$\bar{X} = Y = Z = 0$$

$$F = \bar{X} + Y + Z$$

Задачи

Задача 5. Символом F обозначено одно из указанных ниже логических выражений от трёх аргументов: X , Y , Z . Дан фрагмент таблицы истинности выражения F . Какое выражение соответствует F ?

X	Y	Z	F
1	0	0	1
0	0	0	1
1	1	1	0

- 1) $\neg X \wedge \neg Y \wedge \neg Z$
- 2) $X \wedge Y \wedge Z$
- 3) $X \vee Y \vee Z$
- 4) $\neg X \vee \neg Y \vee \neg Z$

- 1) $\bar{X} \cdot \bar{Y} \cdot \bar{Z}$
- 2) $X \cdot Y \cdot Z$
- 3) $X + Y + Z$
- 4) $\bar{X} + \bar{Y} + \bar{Z}$

Быстрый способ:

$$F = \bar{X} + \bar{Y} + \bar{Z}$$

Задачи

Задача 6. Запишите любое логическое выражение, соответствующее таблице истинности:

x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	x_8	F
		0					1	1
0			0					0
	0						0	0

«И»

$$F = x_1 \cdot x_2 \cdot \bar{x}_3 \cdot x_4 \cdot x_5 \cdot x_6 \cdot x_7 \cdot x_8$$

могут быть и с инверсиями!

Задачи

Задача 7. Задана таблица истинности логической функции $F = \bar{Z} \cdot X + X \cdot Y$. Определите, где какой столбец.

Z	Y	X	F
0	0	0	0
0	0	1	1
0	1	0	0
0	1	1	1
1	0	0	0
1	0	1	0
1	1	0	0
1	1	1	1

X	Y	Z	F
1	0	0	1
1	1	0	1
1	1	1	1

X	Y	Z	F
0	0	0	
0	0	1	
0	1	0	
0	1	1	
1	0	0	1
1	0	1	
1	1	0	1
1	1	1	1

Диаграммы Венна (круги Эйлера)

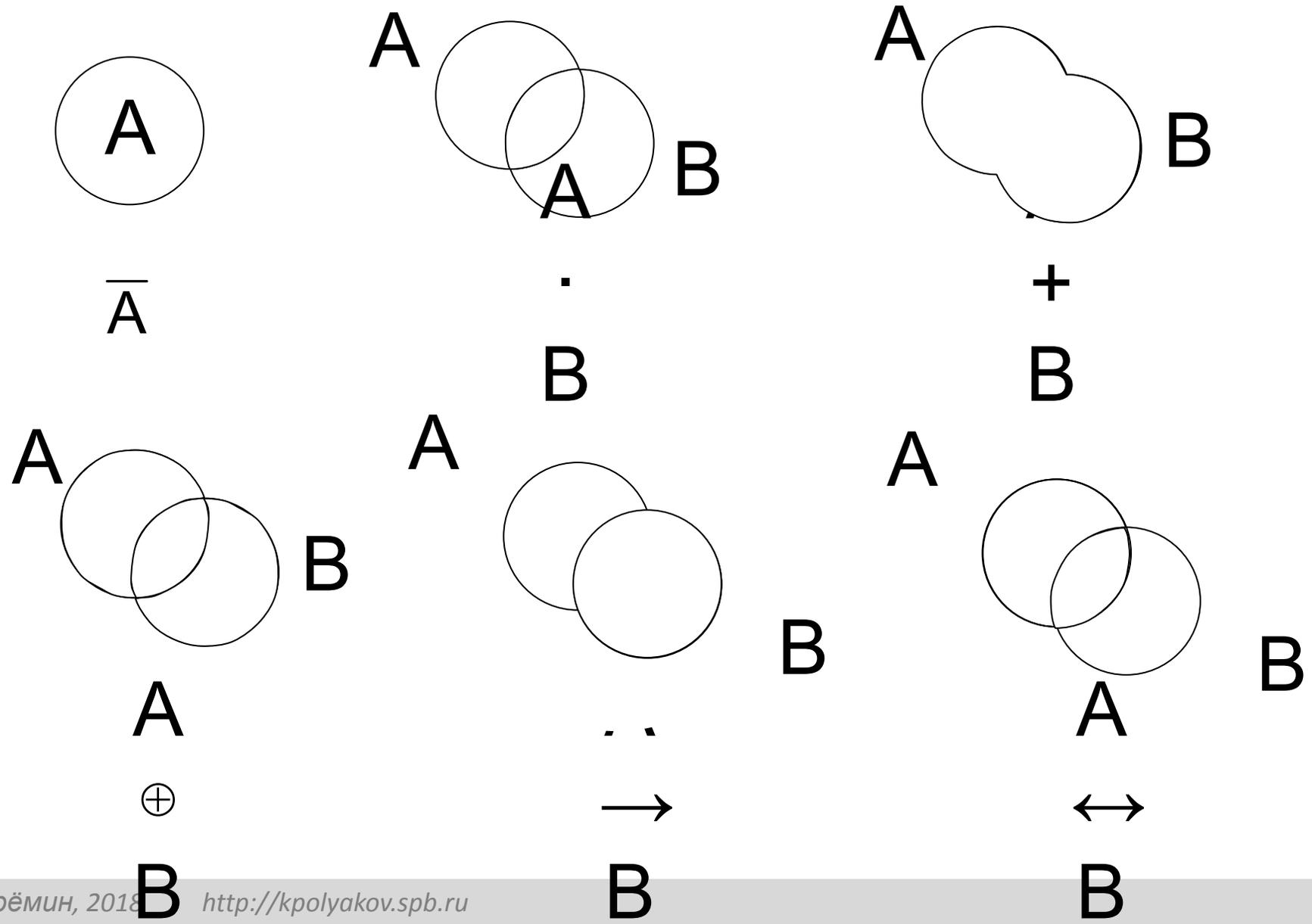
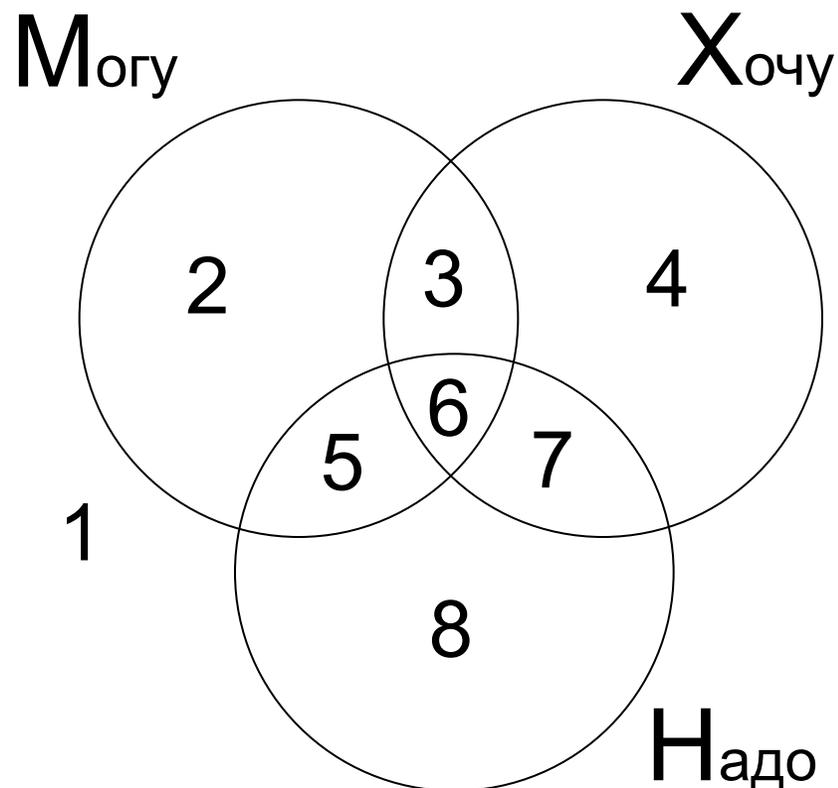


Диаграмма с тремя переменными



$$\begin{array}{ll}
 1 = \bar{M} \cdot \bar{X} \cdot \bar{H} & 5 = M \cdot \bar{X} \cdot H \\
 2 = M \cdot \bar{X} \cdot \bar{H} & 6 = M \cdot X \cdot H \\
 3 = M \cdot X \cdot \bar{H} & 7 = \bar{M} \cdot X \cdot H \\
 4 = \bar{M} \cdot X \cdot \bar{H} & 8 = \bar{M} \cdot \bar{X} \cdot H
 \end{array}$$

$$3 + 4 = M \cdot X \cdot \bar{H} + \bar{M} \cdot X \cdot \bar{H}$$

$$3 + 4 = X \cdot \bar{H}$$



Логические выражения можно упрощать!

Диаграмма с тремя переменными

$$F = M \cdot (\bar{X} + \bar{H})$$

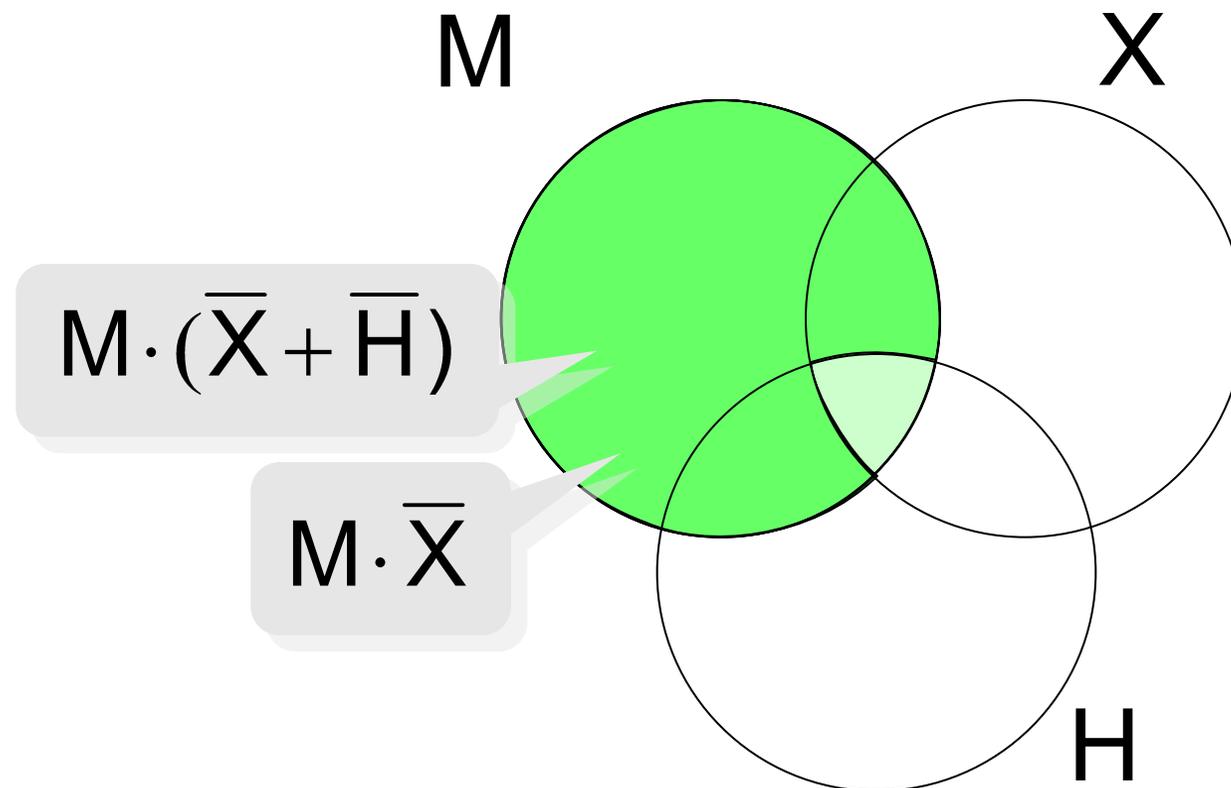
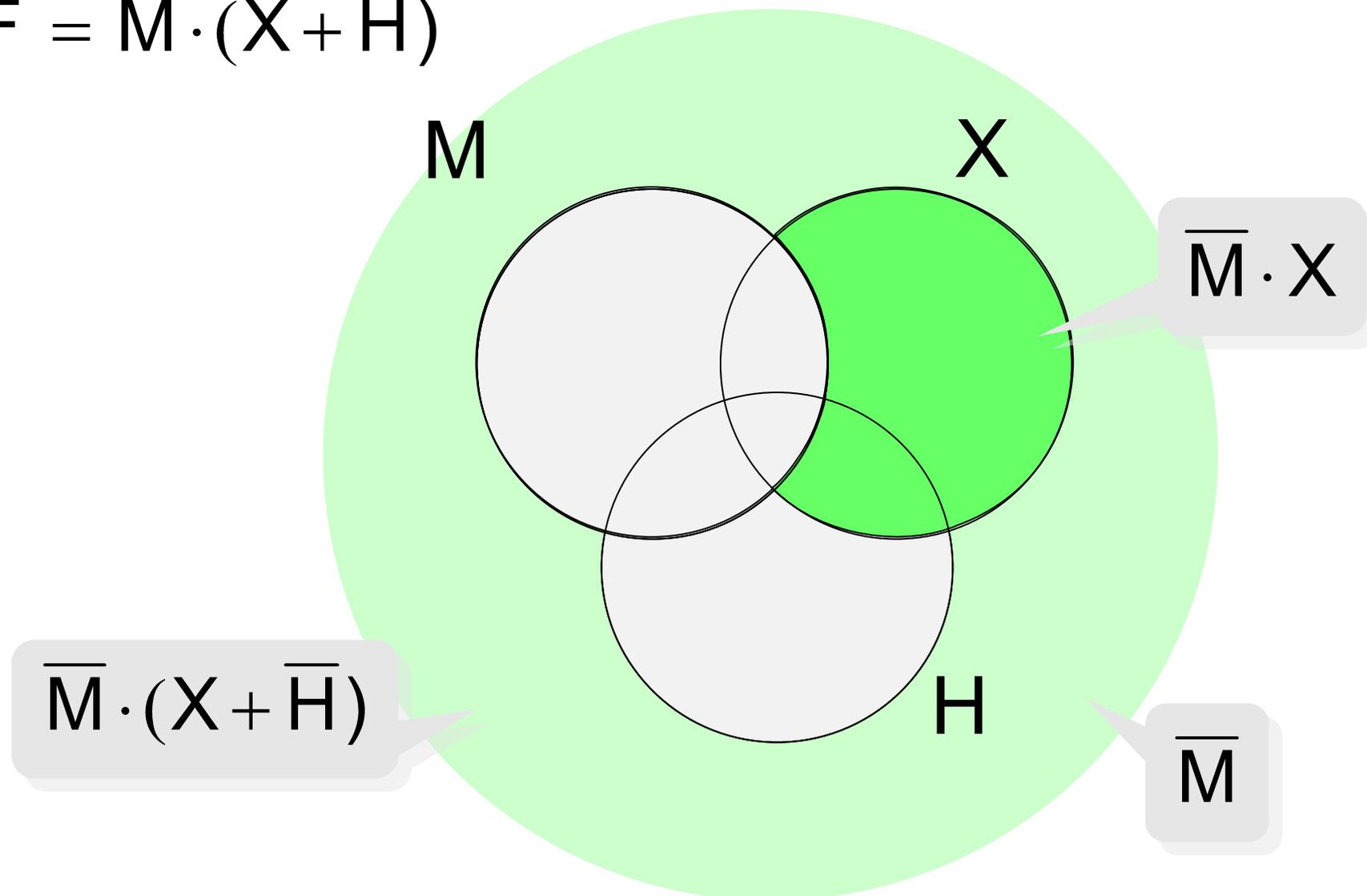


Диаграмма с тремя переменными

$$F = \bar{M} \cdot (X + \bar{H})$$



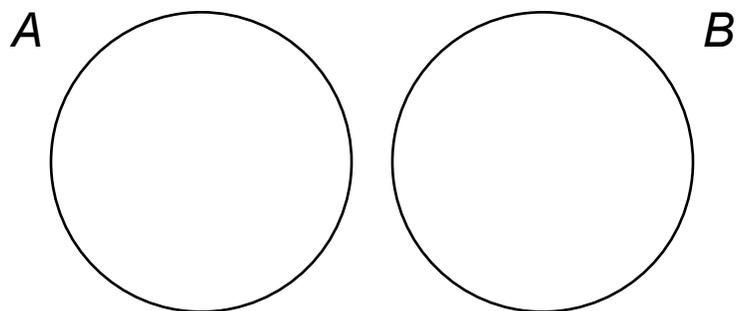
Задачи

Известно количество сайтов, которых находит поисковый сервер по следующим запросам:

<i>Запрос</i>	<i>Количество сайтов</i>
<i>огурцы</i>	<i>100</i>
<i>помидоры</i>	<i>200</i>
<i>огурцы & помидоры</i>	<i>50</i>

Сколько сайтов будет найдено по запросу
огурцы | помидоры

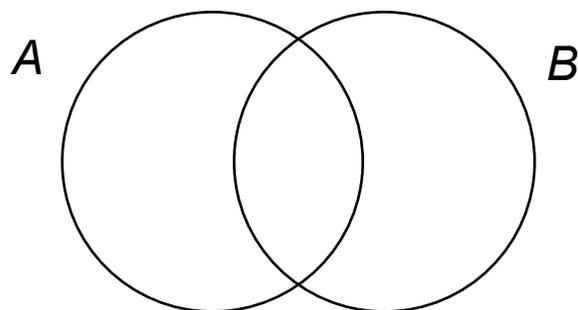
Задачи



$$N_{A|B} =$$

50

огурцы & помидоры



$$N_{A|B} = N_A + N_B - N_{A\&B}$$

огурцы | помидоры

250

огурцы

100

помидоры

200

Задачи

Известно количество сайтов, которых находит поисковый сервер по следующим запросам:

Запрос	Количество сайтов
<i>Динамо & Рубин</i>	320
<i>Спартак & Рубин</i>	280
<i>(Динамо Спартак) & Рубин</i>	430

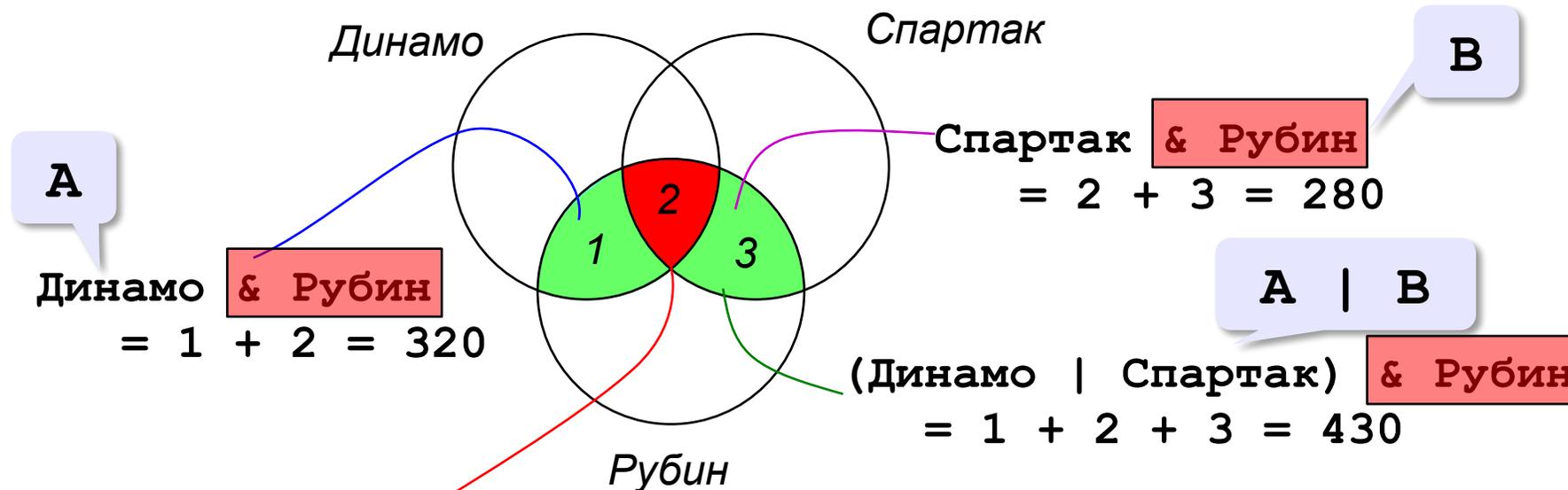
Сколько сайтов будет найдено по запросу

Динамо & Спартак & Рубин



Общее условие с & можно отбросить !

Задачи



Динамо & Спартак & Рубин

А & В

$$= 2$$

$$= (320 + 280) - 430 = 170$$

$$N_{A \& B} = N_A + N_B - N_{A|B}$$

Задачи

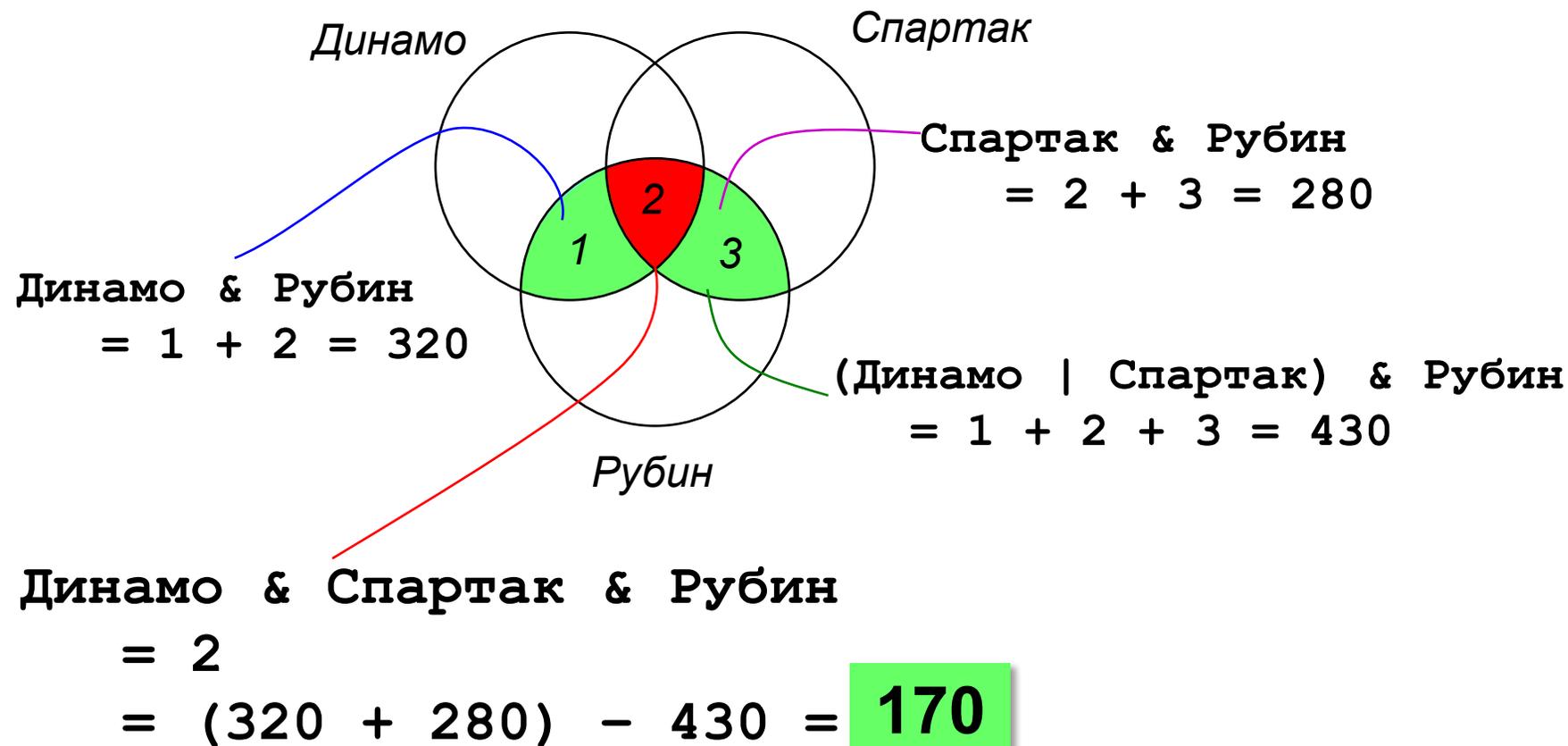
Известно количество сайтов, которых находит поисковый сервер по следующим запросам :

Запрос	Количество сайтов
<i>Динамо</i>	320
<i>Спартак</i>	280
<i>Динамо Спартак</i>	430

Сколько сайтов будет найдено по запросу
Динамо & Спартак

Ответ: $320 + 280 - 430 =$ **170**

Задачи



Задачи

Поисковый сервер в автоматическом режиме составил таблицу ключевых слов для сайтов некоторого сегмента Интернета. Вот ее фрагмент:

Ключевое слово	Количество сайтов, для которых данное слово является ключевым
сканер	200
принтер	250
монитор	450

Сколько сайтов будет найдено по запросу
(принтер | сканер) & монитор
если по трем следующим запросам найдено:
принтер | сканер – 450 сайтов,
принтер & монитор – 40 сайтов
сканер & монитор – 50 сайтов.

Задачи

A (сканер) B (принтер) 450 **принтер | сканер**

$N_{A|B} = N_A + N_B - N_{A\&B}$

сканер 200 **принтер** 250

0

(принтер | сканер) & монитор = ?

сканер принтер

50 40

монитор

принтер & монитор = 40
сканер & монитор = 50

$40 + 50 =$ **90**

Сложная задача

Ниже приведены запросы и количество страниц, которые нашел поисковый сервер по этим запросам в некотором сегменте Интернета:

мезозой	500
кроманьонец	600
неандерталец	700
мезозой кроманьонец	800
мезозой неандерталец	1000
неандерталец & (мезозой кроманьонец)	200

Сколько страниц будет найдено по запросу
кроманьонец & (мезозой | неандерталец)