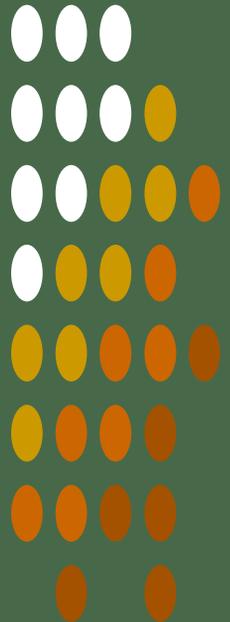


*Природа формулирует свои  
законы языком математики  
Галилео Галилей*

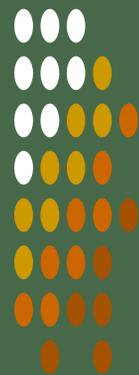
*Я мог бы их пересчитать,  
Но мне не дали дописать.*

# Снова учимся считать

(Знакомство с элементами комбинаторики)

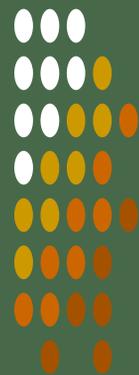


# Что такое комбинаторика?



- **Комбинаторика** – это раздел математики, в котором изучается сколько различных комбинаций, подчиняющихся тем или иным условиям, можно составить из заданных объектов.

# Что такое комбинаторика?

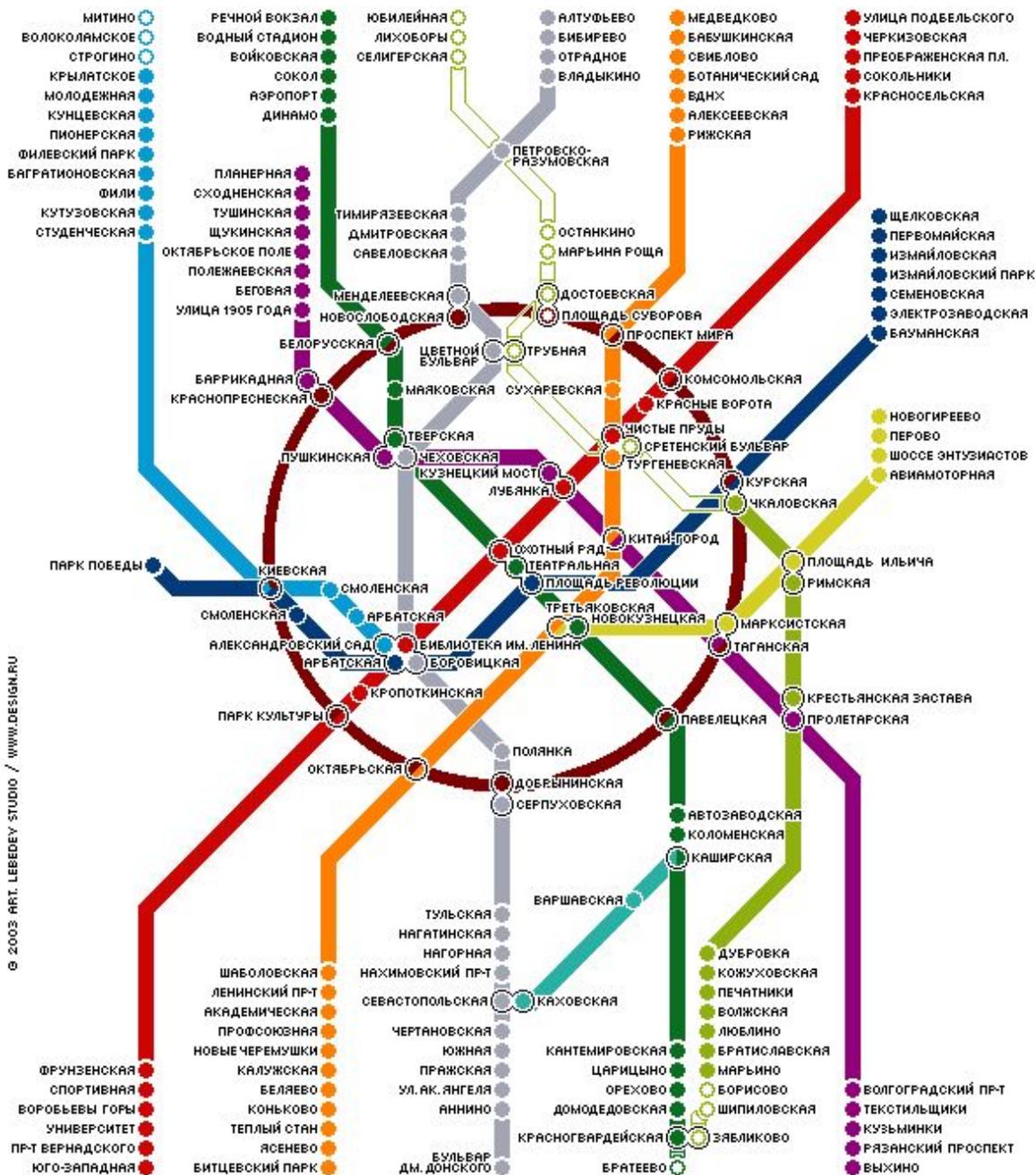


Комбинаторная задача из  
русской народной сказки

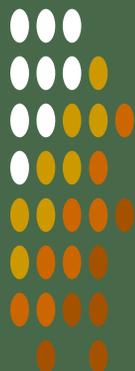
**Вперед пойдешь - голову сложишь,  
Направо пойдешь – коня потеряешь,  
Налево пойдешь – меча лишишься.**



# СХЕМА ЛИНИЙ МОСКОВСКОГО МЕТРОПОЛИТЕНА



- |                     |                  |                            |                  |
|---------------------|------------------|----------------------------|------------------|
| СОКОЛЬНИЧЕСКАЯ      | ФИЛЕВСКАЯ        | ТАГАНСКО-КРАСНОПРЕСНЕНСКАЯ | ЛЮБЛИНСКАЯ       |
| ЗАМОСКВОРЕЦКАЯ      | КОЛЬЦЕВАЯ        | КАЛИНИНСКАЯ                | КАХОВСКАЯ        |
| АРБАТСКО-ПОКРОВСКАЯ | КАЛУЖСКО-РИЖСКАЯ | СЕРПУХОВСКО-ТИМИРАЗЕВСКАЯ  | СТРОЯЩИЕСЯ ЛИНИИ |



# Что такое комбинаторика?



Имеем:



варенье



сыр



колбаса



хлеб черный



хлеб белый

**Сколько**  
различных  
бутербродов  
мы можем  
сделать?

Итак:



варенье



хлеб черный



хлеб белый

1

2



колбаса



сыр

хлеб черный



хлеб белый

3

4



хлеб белый



хлеб черный

5

6

Итого имеем шесть различных бутербродов.

А вы и не знали, что делая бутерброды,  
**вы используете комбинаторику!**



Это простейший пример на

# Правило умножения



- Если число предметов первого типа равно  $n$ , а число предметов второго типа равно  $m$ , то число их комбинаций равно  $nm$ .
- Было два типа хлеба и три «наполнителя», итого два на три равно шесть.

x 769 po

99  
RUS 



**Сколько всего можно составить регистрационных номеров для автомобилей в Москве?**

Можно использовать

12 букв: А, В, Е, К, М, Н, О, Р, С, Т, У, Х

10 цифр: 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9

3 номера московского региона: 77, 99, 97

**По правилу умножения получаем:**

$$12 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 12 \cdot 12 \cdot 3 = 5.184.000$$

первая буква

вторая цифра

вторая буква

номер региона

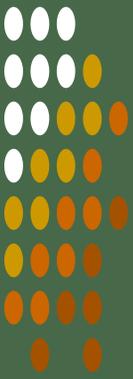
первая цифра

третья цифра

третья буква

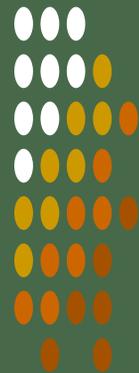
**Количество номеров**

# Перестановки

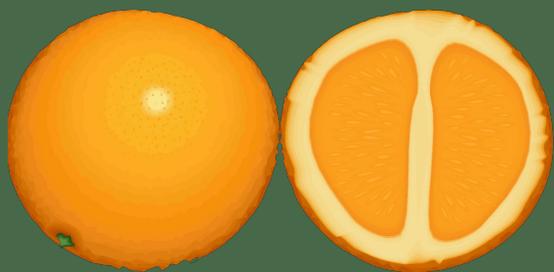


- **Перестановкой из  $n$**  предметов называется любой способ нумерации этих предметов (способ их расположения в ряд)
- **Число перестановок  $n$**  предметов равно
$$n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \dots \cdot (n-1) \cdot n.$$
- Такое произведение называется ***факториалом***

# Перестановки



Сложили из карточек с буквами слово **АПЕЛЬСИН**, потом буквы перемешали и сложили в случайном порядке не глядя. Какова вероятность того, что получится слово **СПАНИЕЛЬ**?



**АПЕЛЬСИН**

**СПАНИЕЛЬ**





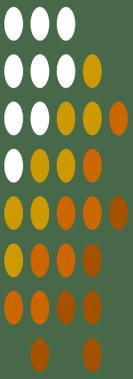
В слове апельсин всего 8 букв,  
т.е. мы должны подсчитать  
сколькими способами можно  
расположить 8 букв в ряд.  
Это число перестановок из 8  
букв и равняется это  
количество 8!

$$8! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 7 \cdot 8 = 40.320$$

Из 40 320 способов нам  
подойдет только один - слово  
**спаниель**

Значит вероятность  
получить это слово равна

$$\frac{1}{40320} = 0,000025 = 0,0025\%$$



Дрессировщик выводит на арену цирка трех львов и двух тигров и сажает их в ряд на тумбы. При этом **тигров нельзя помещать рядом**, иначе драка между ними неизбежна. **Сколько всего существует способов размещения зверей?**





Львы



Тигры



Сначала подсчитаем сколькими способами можно размесить тигров

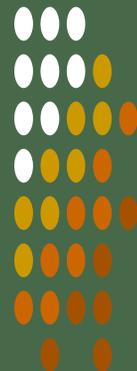


На оставшиеся 3 места посадим 3-х львов.  
Это перестановка 3 из 3, т.е.  $3!=6$  способов

По правилу умножения  $6 \cdot 12 = 72$

Всего 72 способа посадить зверей

# Сочетания



- Если есть  $n$  предметов, то число способов, которыми можно выбрать ровно  $k$  их них называется **числом сочетаний из  $n$  по  $k$** .
- Обозначение  $C_n^k$
- Формула

$$C_n^k = \frac{n!}{k!(n-k)!}$$



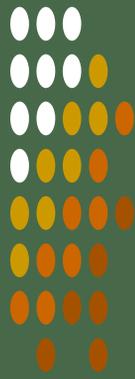
Расписание одного дня  
содержит 5 уроков. Сколько  
всего можно составить таких  
расписаний при выборе из 10  
различных предметов?

- Алгебра
- Геометрия
- Русский
- География
- Музыка
- Биология
- Английский
- История
- Физика
- Химия

1.  
2.  
3.  
4.  
5.



# Нужно выбрать 5 предметов из 10. Это число сочетаний из 10 по 5.



- Используем формулу
- $n=10$   $k=5$

$$C_n^k = \frac{n!}{k!(n-k)!}$$

$$C_{10}^5 = \frac{10!}{5!(10-5)!} = \frac{10!}{5! 5!} = 252$$

5 выбранных предметов еще надо распределить по 5 местам в расписании уроков. Это число перестановок  $5!=120$

Итого имеем  $252 \cdot 120 = 30240$   
способов составить расписание на  
один учебный день

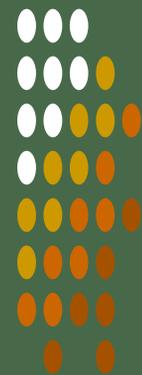


**Сколько существует  
шестизначных  
натуральных чисел, у  
каждого из которых цифры  
расположены в порядке  
возрастания?**

- Возьмем число 123456789
- Если вычеркнуть из этого числа любые 3 цифры, то получим искомое число.
- Так как порядок вычеркиваемых цифр не имеет значения, то это сочетание

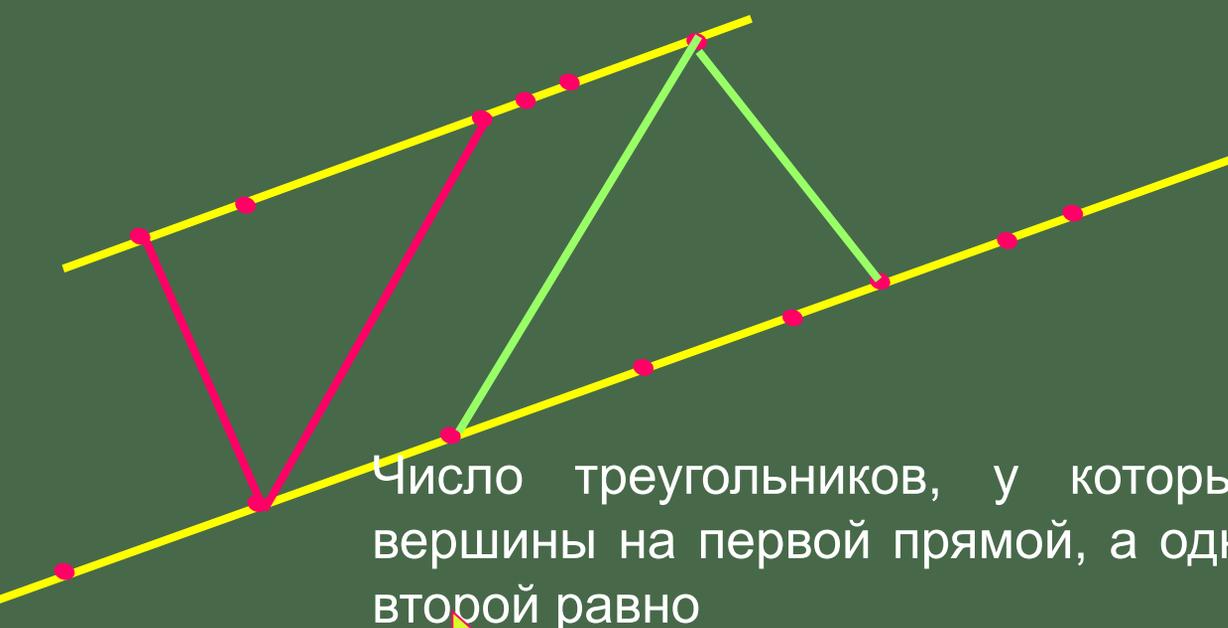
$$C_9^3 = \frac{9!}{3!(9-3)!} = \frac{9!}{3! 6!} = \frac{9 \cdot 8 \cdot 7}{1 \cdot 2 \cdot 3} = 84$$

Ответ: 84 числа



Даны две параллельные прямые.  
На одной отмечены 6 точек, на  
другой – 8.

Сколько существует треугольников  
с вершинами в данных точках?



Число треугольников, у которых две  
вершины на первой прямой, а одна – на  
второй равно

$$C_2^6 \cdot C_1^8 = 15 \cdot 8 = 120$$

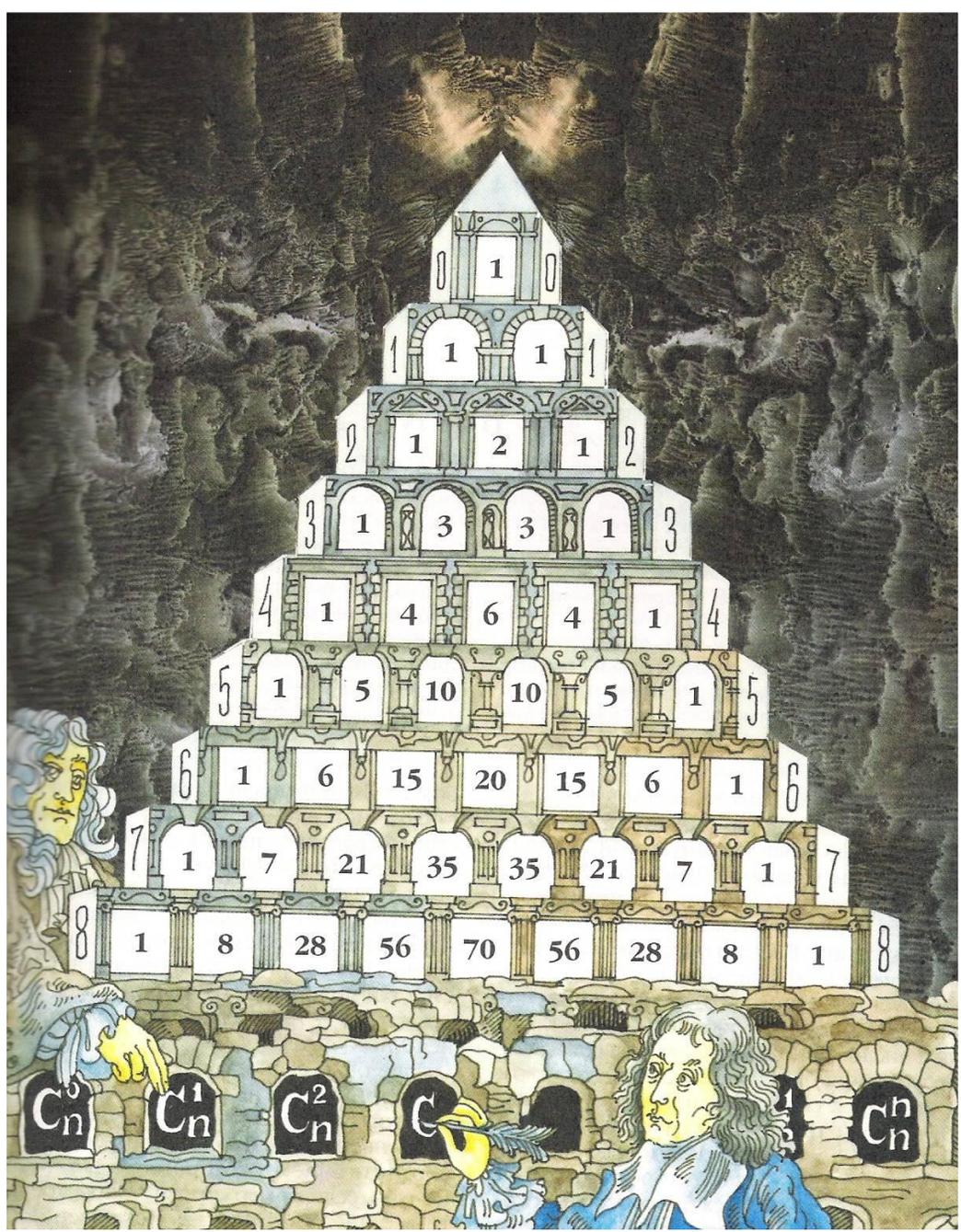
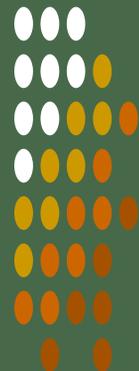
Аналогичн  
верь

которых одна  
орой равно

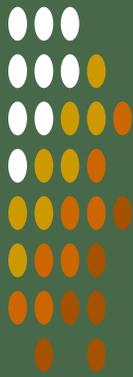
Ответ:

228 треугольников

# Треугольник Паскаля

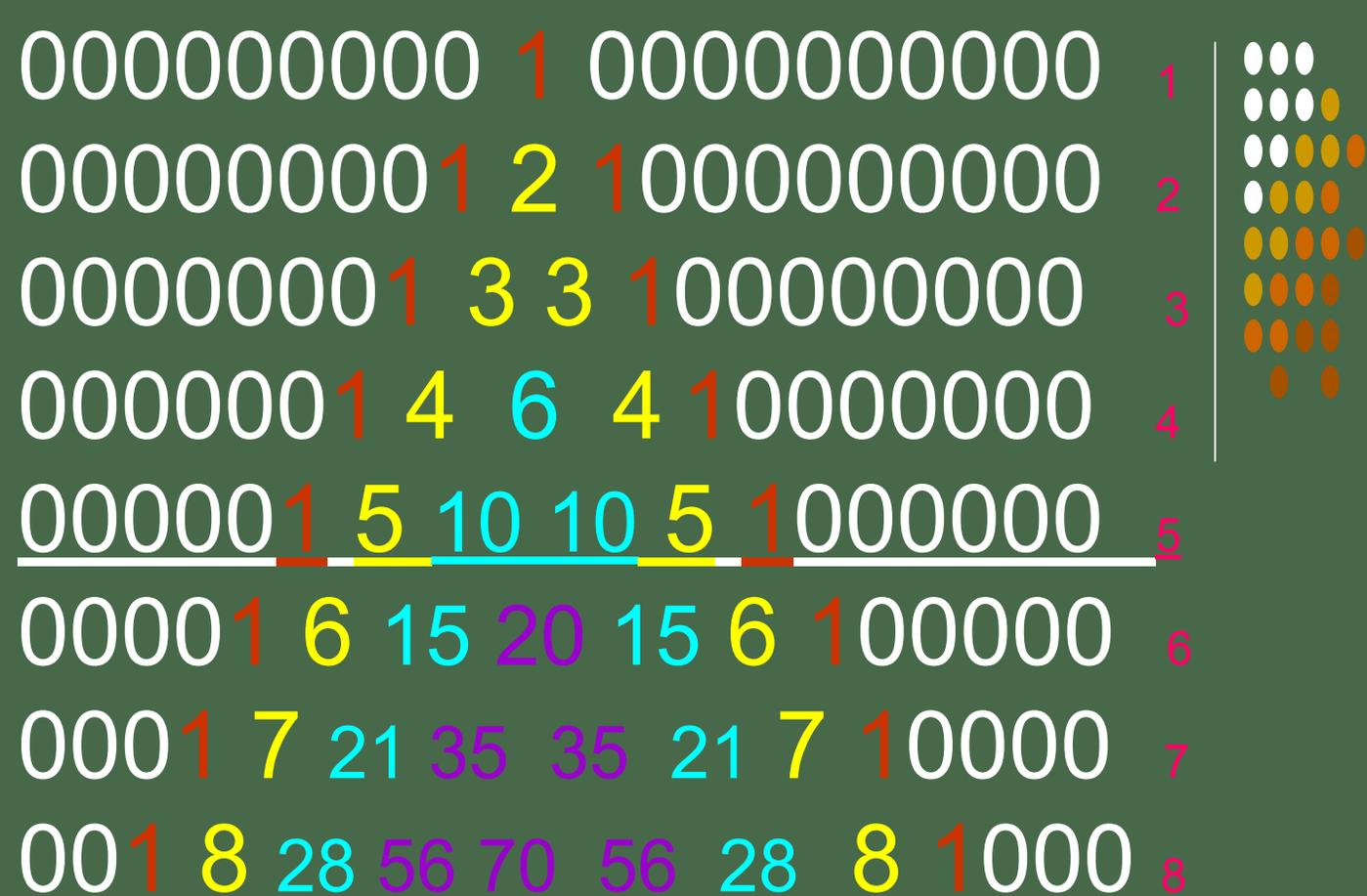


Находить биномиальные  
коэффициенты  $C^k_n$  по  
формуле не очень удобно



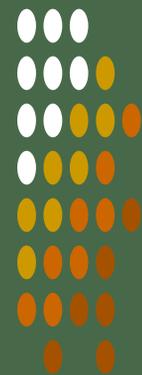
Французский математик Блез  
Паскаль подробно описал  
нахождение этих чисел

0000000000	1	0000000000								
000000000	1	2	1	0000000000						
00000000	1	3	3	1	000000000					
0000000	1	4	6	4	1	00000000				
000000	1	5	10	10	5	1	0000000			
00000	1	6	15	20	15	6	1	000000		
0000	1	7	21	35	35	21	7	1	00000	
000	1	8	28	56	70	56	28	8	1	0000



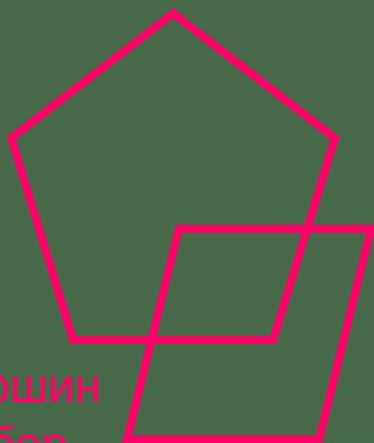
$$(a + b)^n = C_n^0 a^n b^0 + C_n^1 a^{n-1} b^1 + C_n^2 a^{n-2} b^2 + \dots + C_n^n a^0 b^n.$$

$$(a + b)^5 = a^5 b^0 + 5a^{5-1} b^1 + 10a^{5-2} b^2 + 10a^{5-3} b^3 + 5a^{5-4} b^4 + a^0 b^5 = a^5 + 5a^4 b + 10a^3 b^2 + 10a^2 b^3 + 5ab^4 + b^5.$$

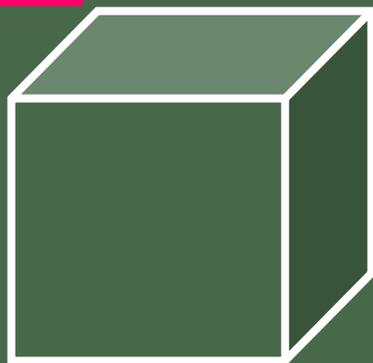


# Немного о графах

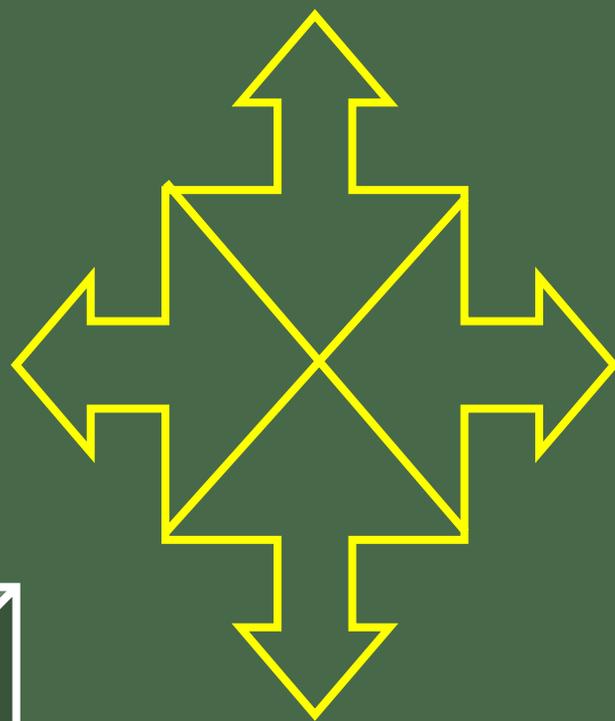
- **Графом** называют набор точек, некоторые из которых соединены линиями
- Точки называются **вершинами** графа, а линии - **ребрами**



11 вершин  
13 ребер



7 вершин  
9 ребер

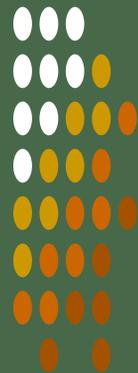


33 вершин  
36 ребер

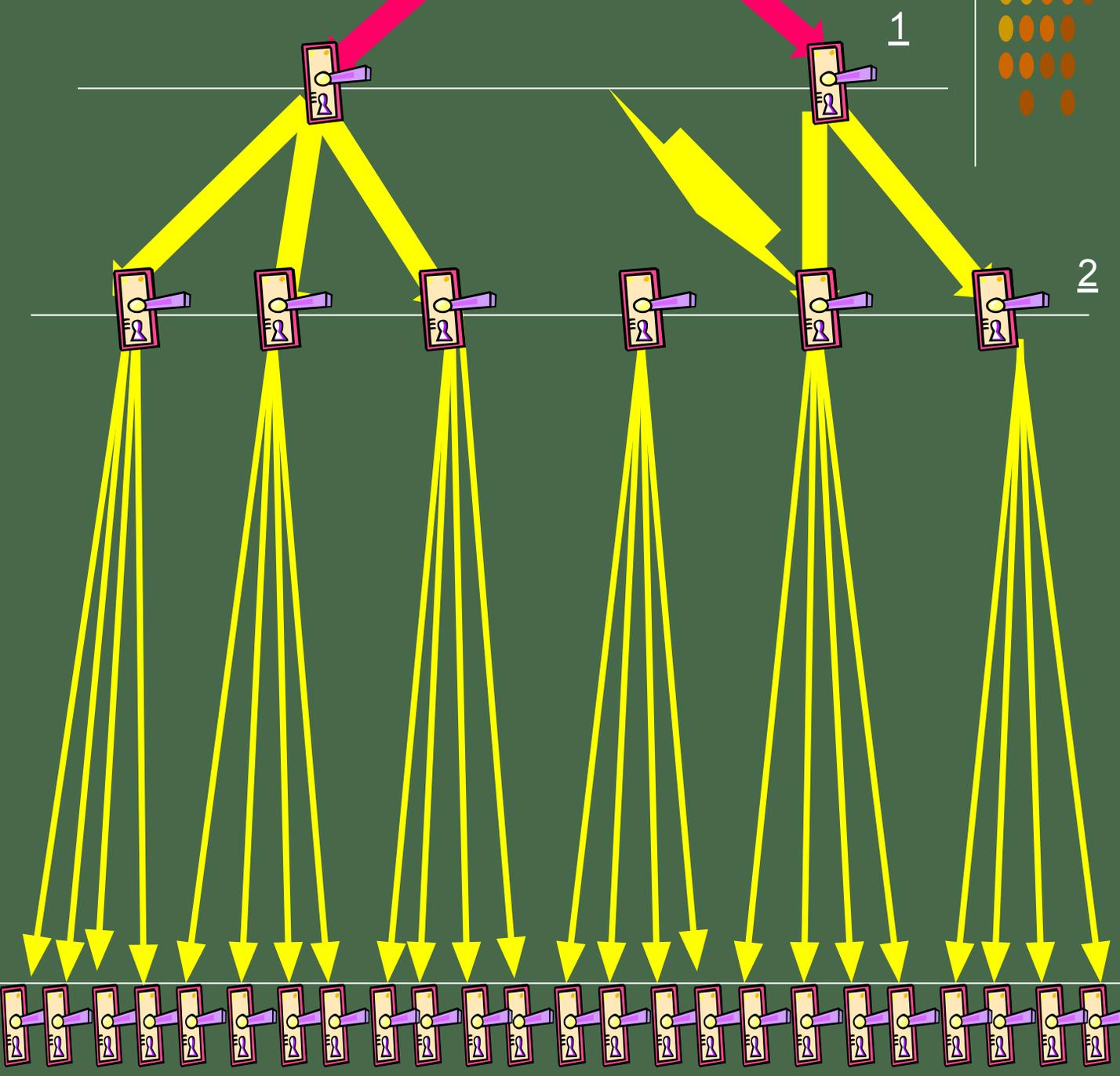
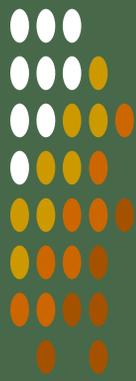
# Схема метро Петербурга







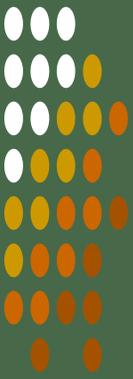
Крыса бежит по лабиринту, который устроен так, что сначала она должна выбрать одну из двух дверей, потом одну из трех, а за каждой из них ее ожидают четыре двери. Пройдя через какую-либо дверь, крыса не может вернуться через нее обратно. Сколькими путями крыса может пройти лабиринт от начала до конца?



1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11 12 13 14 15 16 17 18 19 20 21 22 23 24

Всего существует 24 различных пути

# Немного о графах

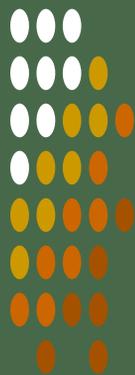


Ранним утром на рыбалку улыбающийся Игорь мчался босиком.

**Вопрос: Сколько осмысленных предложений можно составить, вычеркивая некоторые слова этого предложения?**



# Игорь мчался



утром

ранним утром

на  
рыбалку

на  
рыбалку

на  
рыбалку

босиком

босиком

босиком

босиком

босиком

босиком

у  
л  
ы  
б  
а  
ю  
щ  
и  
й  
с  
я

у  
л  
ы  
б  
а  
ю  
щ  
и  
й  
с  
я

у  
л  
ы  
б  
а  
ю  
щ  
и  
й  
с  
я

у  
л  
ы  
б  
а  
ю  
щ  
и  
й  
с  
я

у  
л  
ы  
б  
а  
ю  
щ  
и  
й  
с  
я

у  
л  
ы  
б  
а  
ю  
щ  
и  
й  
с  
я

у  
л  
ы  
б  
а  
ю  
щ  
и  
й  
с  
я

у  
л  
ы  
б  
а  
ю  
щ  
и  
й  
с  
я

у  
л  
ы  
б  
а  
ю  
щ  
и  
й  
с  
я

у  
л  
ы  
б  
а  
ю  
щ  
и  
й  
с  
я

у  
л  
ы  
б  
а  
ю  
щ  
и  
й  
с  
я

у  
л  
ы  
б  
а  
ю  
щ  
и  
й  
с  
я

1

2

3

4

5

6

7

8

9

10

11

12

13

14

15

16

17

18

19

20

21

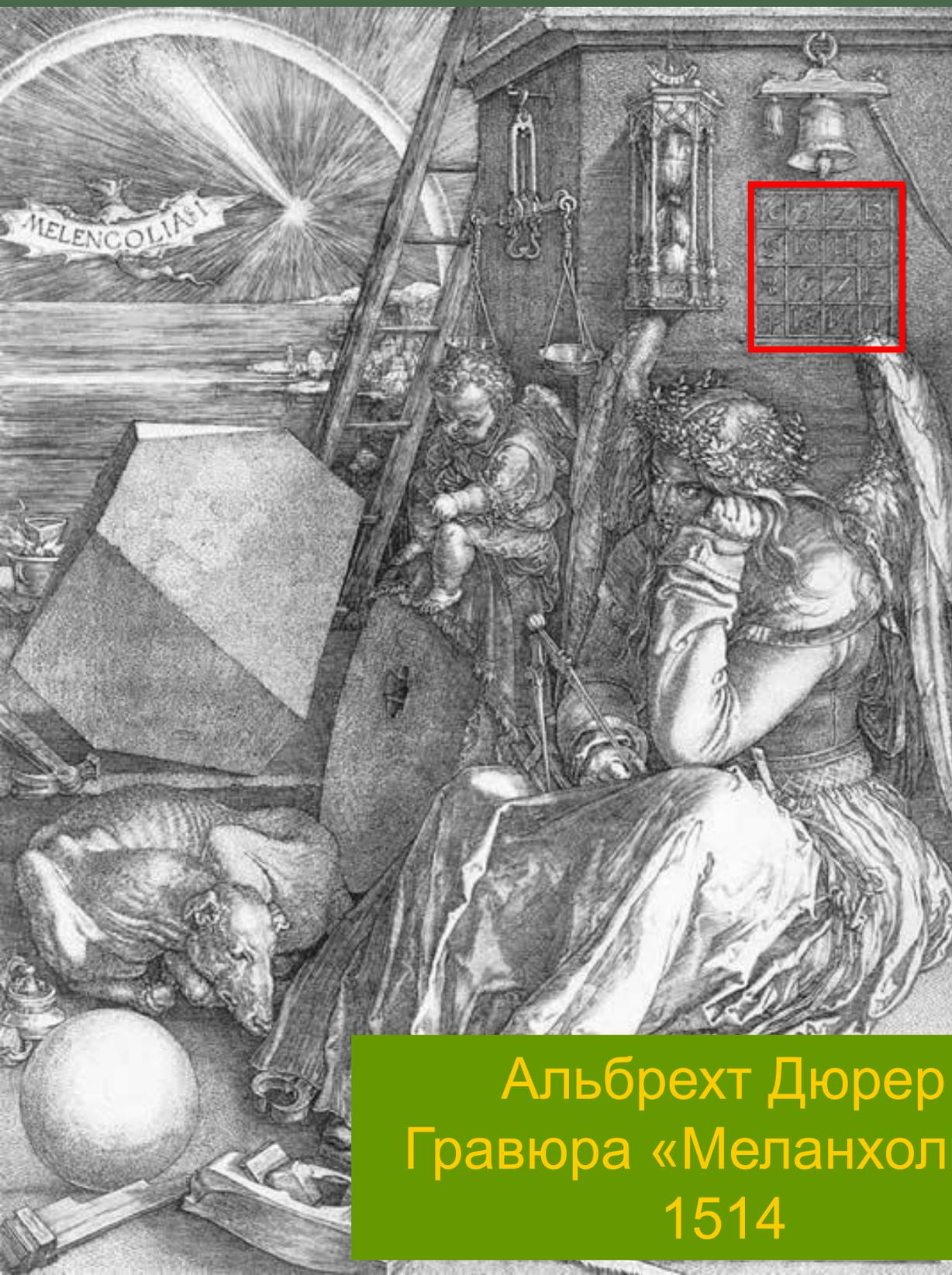
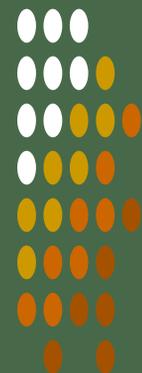
22

23

24

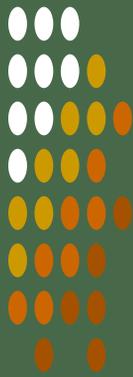
**24 предложения**

# Магические квадраты



Альбрехт Дюрер  
Гравюра «Меланхолия»  
1514

# Магические квадраты



- Магический квадрат – это квадрат, разбитый на клетки, в который вписаны числа
- Сумма чисел в каждой строке, в каждом столбце, и в каждой из диагоналей равны одному и тому же числу

$n = 3$

2	7	6
9	5	1
4	3	8

15

$$\frac{C_{n^2+1}^2}{n} = \frac{(n^2 + 1)n}{2}$$

$$\frac{C_{3^2+1}^2}{3} = \frac{(3^2 + 1)3}{2} = 15$$





