КОМП’ЮТЕРНІ ЧИСЛЕННЯ

МОДУЛЬ 1. ЕЛЕМЕНТИ ЛІНІЙНОЇ АЛГЕБРИ

CHERNIHIV POLYTECHNIC
NATIONAL UNIVERSITY

ЛЕКЦІЯ 1. МАТРИЦІ ТА ВИЗНАЧНИКИ

Трунова Олена Василівна

доцент, к. пед. н.

- **Звітність в семестрі** до 80 балів:
- ТЕСТИ - 5 балів (5*4=20)
- ЛР - 5 балів (5*4=20)
- РГР - 5 балів (5*4=20)
- МКР - 10 балів (10*2=20)
- Додкові бали конспект лекцій – до 3
- Допуск до іспиту не менше 19 балів
- Іспит 20 балів
- Задавайте питання по ходу лекцій і на ЛЗ.
- Підготовка до ЛЗ, іспитів.
- Робота з підручниками.
- Консультації в семестрі.
- Консультації в сесію.
- Відповіді на лабораторних заняттях.
- Участь в олімпіадах.

Література

- Вища математика: навч. посіб. для студ. вищ. навч. зак. / В.П Дубовик., І.І. Юрик. – 4-те вид. – К.: Ігнатекс-Україна., 2013. – 648 с:
- Вища математика: Підручник. У 2 ч. Ч. 1: Лінійна і векторна алгебра: Аналітична геометрія: Вступ до математичного аналізу: Диференціальне і інтегральне числення /П.П. Овчинников, Ф.П. Яремчук, В.М. Михайленко; За заг. ред. П.П. Овчинникова; Пер. з рос. П.М. Юрченка. — 3-тє вид., випр. – К.: Техніка, 2007. – 600 с.
- Вища математика: Підручник. У 2. Ч. 2: диференціальні рівняння. Операційне числення. Ряди та їх застосування. Стійкість за Ляпуновим. Рівняння математичної фізики. Оптимізація та керування. Теорія ймовірностей. Числові методи; за заг. ред. П.П. Овчинникова; пер. з рос. Є.В. Бондарук, Ю.Ю. костриці, Л.П. Оніщенко. – 3-тє вид., випр. – К.: Техніка, 2004 . – 792 с.
- Дубовик В.П. Вища математика: навч. посібн. / Дубовик В.П., Юрик І.І. – К.: Ігнатекс-Україна, 2013. – 648 с. – Режим доступу: https://opac.kpi.ua/F/ER5L2BH454XJ2XCGY41CV6FJ28CCXQY8UFDTQ4GS83UY8GRPYB-62054?func=full-set-set&set_number=514442&set_entry=000010&format=999
- Дороговцев, А.А. Математичний аналіз : підручник : у 2-х ч. Ч. 1 / А.А. Дороговцев. – К. : Либідь, 1993. – 320 С.
- Дороговцев, А.Я. Математичний аналіз : у 2-х ч. Ч. 2 / А.Я. Дороговцев. – К.: Либідь, 1994. – 304 С.
- Математика в технічному університеті: Підручник / І. В. Алєксєєва, В. О. Гайдей. О.О. Диховичний, Л. Б. Федорова; за ред. О.І. Клесова; КПІ ім. Ігоря Сікорського. – Київ: Видавничий дім «Кондор», 2018.–Т.1. – 496 с. – Режим доступу: https://ela.kpi.ua/handle/123456789/24338
- Математика в технічному університеті [Електронний ресурс]: підручник / І. В. Алєксєєва, В. О. Гайдей, О. О. Диховичний, Л. Б. Федорова; за ред. О. І. Клесова ; КПІ ім. Ігоря Сікорського. – Київ: Видавничий дім «Кондор», 2019. – Т.2. – 504 с. – Режим доступу: https://ela.kpi.ua/handle/123456789/30396
- Паранчук Я. С., Мороз В. І. Алгоритмізація та програмування. MathCAD. Навчальний посібник. Друге видання. Львів: Видавництво Львівської політехніки, 2012. – 312 с.
- **Додаткова література**
- Dennis G. Zill. (2016) Advanced Engineering Mathematics. Jones & Bartlett Publishers –1024 p. – Режим доступу: https://elasticbeanstalk-us-east-2-344375731421.s3.us-east-2.amazonaws.com/StudyChat/Dennis-G.-Zill-Advanced-Engineering-Mathematics-2016-Jones-Bartlett.pdf
- Introduction to Mathcad 15 Larsen, Ronald W. [Prentice Hall, 2010] (Paperback) 3rd Edition
- Kreyszig, E. Kreyszig, H. and Norminton, E. J. (2011) Advanced Engineering Mathematics. 10th edition, Wiley, NY. – 1152 p. – Режим доступу: https://soaneemrana.org/onewebmedia/ADVANCED%20ENGINEERING%20MATHEMATICS%20BY%20ERWIN%20ERESZIG1.pdf

КВАНТОРИ, ПОЗНАЧЕННЯ І СКОРОЧЕННЯ

-] – нехай;
- **& (∧)** – і;
- ∨ – або;
- ⌉ – не;
  ∀ – для довільного, для в
- : – такій, що;
  ∃ – існує;
- **!** – єдиний;
- → – наближається;
- ⇒ – випливає, отже;
- – тоді і тільки тоді;
- Σ – сума;
- Π – добуток;
- ∪ – знак об'єднання;
- ∩ – знак перетину;

R – мн-на дійсних чисел;

Z – мн-на цілих чисел

N – мн-на натуральних чисел

Т1 – теорема 1

Л1 – лема 1

‖ – знак паралельності

⊥ – знак перпендикулярності

~ – знак еквівалентності

≈ – наближено дорівнює

≡ – тотожно дорівнює

∈ – знак належності

∉ – знак не належності

⊂ – знак включення;

Зміст

1. Матриці та їх властивості
2. Лінійні операції над матрицями
3. Визначники та їх властивості

1814–1
897

Термін «матриця»

започаткував англійський

математик

Джеймс Джозеф Сильвестр.

«Математика – музика розуму».
Джеймс Джозеф Сильвестр

§1 МАТРИЦІ ТА ВИЗНАЧНИКИ

1.1 Матриці та їх властивості

Матрицею розміру $m \times n$ називається сукупність чисел, розташованих у вигляді таблиці з m рядків і n стовпчиків:

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ . & . & . & . \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix}.$$

Числа a_{ij} , що складають матрицю, називаються ***елементами*** матриці, до того ж i – *номер рядка*, а j – *номер стовпчика*. Якщо $m \neq n$, то матриця називається ***прямокутною***. Якщо $m = n$, то матриця называється ***квадратною порядку n.***

Приклади

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 4 \\ -1 & 7 \end{pmatrix}$$

2×2

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 3 & 3 & 3 \\ 5 & 5 & 5 \end{pmatrix}$$

3×3

$$C = \begin{pmatrix} 9 & 2 \\ 2 & 0 \\ 3 & 0 \end{pmatrix}$$

3×2

Матриця розміру $m \times 1$ виду $\begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_m \end{bmatrix}$, що складається з одного стовпця

називається ***вектор-стовпець,*** а матриця $A=[a_1\ \ a_2 \ldots a_n]$ розміру $1 \times n$, що складається з одного рядка – ***вектор-рядок.***

У випадку квадратної матриці $A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ . & . & . & . \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nn} \end{bmatrix}$

елементи $a_{11}, a_{22}, \ldots a_{nn}$ утворюють ***головну діагональ,*** а елементи $a_{n1}, a_{n-1\,2}, \ldots a_{1n}$ – ***побічну діагональ*** матриці.

Квадратна матриця, в якої всі елементи a_{ij} дорівнюють 0 називається ***нульовою*** матрицею.

$$O_{m\times n} = \begin{bmatrix} 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots \\ 0 & \dots & 0 \end{bmatrix}$$

Матриця $$E = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ . & . & . & . \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$ називається ***одиничною***.

$$E_2 = diag(1,\ 1) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$E_n = diag(\overbrace{1, 1, \dots, 1}^{n})$$

$$E_3 = diag(1,\ 1,\ 1) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Квадратна матриця називається **трикутною**, якщо всі елементи, розташовані по один бік від головної діагоналі, дорівнюють нулю.

Приклади.

верхньотрикутна

$$A=\begin{pmatrix}1&1&1\\0&3&3\\0&0&5\end{pmatrix}$$

нижньотрикутна

$$B=\begin{pmatrix}7&0\\1&5\end{pmatrix}$$

Матриця A^T, отримана з даної матриці A шляхом заміни рядків на стовпчики, і навпаки, називається ***транспонованою***.

Позначається $\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}$.

Приклад

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 3 \\ 1 & 4 \\ 2 & 5 \end{pmatrix} \Rightarrow A^{\mathrm{T}} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 3 & 4 & 5 \end{pmatrix}$$

$$\boldsymbol{(A^{\mathrm{T}})^{\mathrm{T}}=A}$$

- Якщо $\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}} = \boldsymbol{A}$ то матриця $\boldsymbol{A}$ називається **симетричною**.
- Приклад

$$C=\begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 2 & 3 & 0 \\ -3 & 0 & 5 \end{pmatrix} \Rightarrow C^{\mathrm{T}}=\begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 2 & 3 & 0 \\ -3 & 0 & 5 \end{pmatrix}=C$$

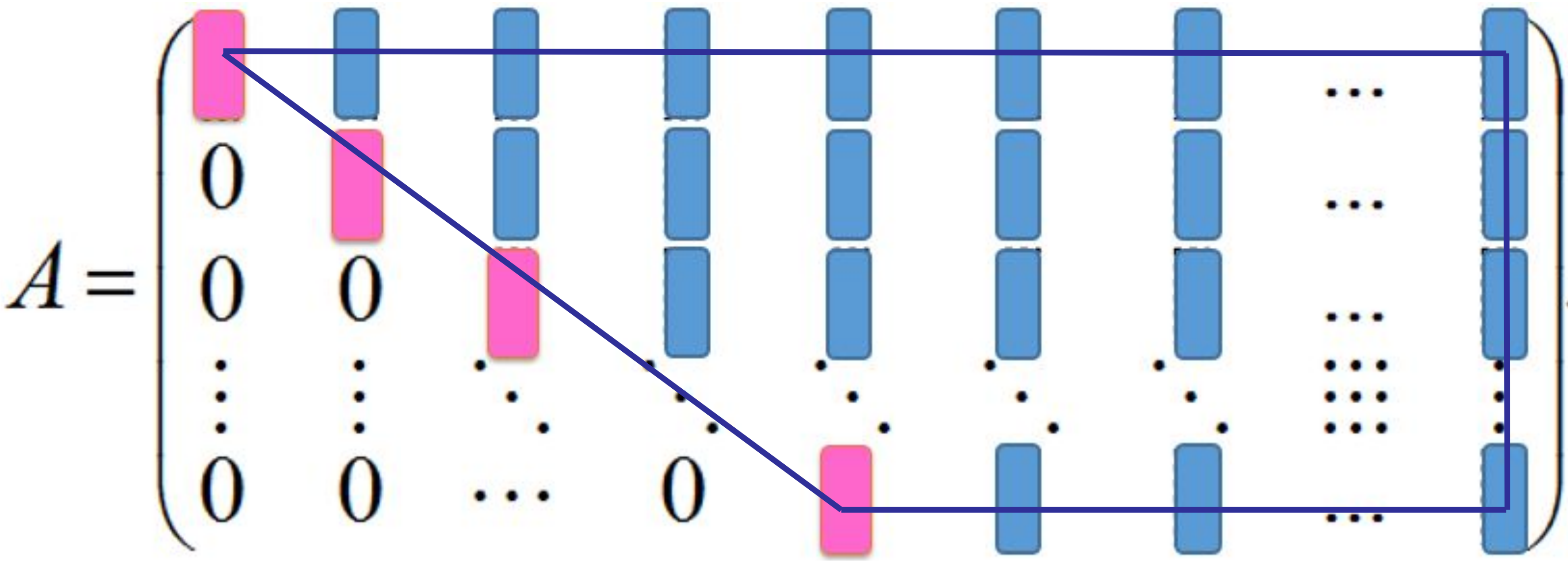
Кососиметрична матриця

$$K^T = -K$$

Приклад

$$K = \begin{pmatrix} 0 & -2 & -3 \\ 2 & 0 & 1 \\ 3 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

Трапецієподібна форма матриці



- $a_{ii} \neq 0.$ - a_{ij} - *довільне, $j>i$.*

Рівні матриці

Дві матриці

$$A = (a_{ij}) \ i \ B = (b_{ij})$$

називаються

рівними,

якщо

1) Розмірність матриць співпадає

2) Відповідні елементи матриць рівні:

$$a_{ij} = b_{ij},$$

$$i = 1, \ldots, m; \ j = 1, \ldots, n.$$

1.2. Лінійні операції над матрицями Додавання

Для того, чтоб додать дві матриці A і B (одинакової розмірності) необхідно додать їх відповідні елементи.

Для того, чтобы знайти ***різницю матриць*** A i B (одинакової розмірності) необхідно від кожного елемента матриці A відняти відповідний елемент матриці B.

Матриця -A (мінус A)називається матрицею ***протилежною*** A.

Приклад: Нехай $A = \begin{bmatrix} 2 & 5 & -6 \\ 0 & 4 & -1 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} -3 & 2 & -4 \\ 0 & 5 & 7 \end{bmatrix}$.

Тоді $A + B = \begin{bmatrix} -1 & 7 & -10 \\ 0 & 9 & 6 \end{bmatrix}$, $A - B = \begin{bmatrix} 5 & 3 & -2 \\ 0 & -1 & -8 \end{bmatrix}$,

$-A = \begin{bmatrix} -2 & -5 & 6 \\ 0 & -4 & 1 \end{bmatrix}$.

Множення на число

Для того, чтоб помножити матрицю A на число $\alpha \in R$ необхідно кажен элемент матриці помножить на число α.

Приклад: Нехай $A = \begin{bmatrix} 2 & 5 & -6 \\ 0 & 4 & -1 \end{bmatrix}$,

тоді $$2 \cdot A = \begin{bmatrix} 4 & 10 & -12 \\ 0 & 8 & -2 \end{bmatrix}.$$

Множення на вектор-стовпчик

Для множення матриці $A(m\times n)$ на вектор-стовпчик $X(n\times 1)$ необхідно, щоб число стовпців n матриці A дорівнювало числу елементів вектора-стовпчика x $(n\times 1)$. Тоді ***добуток матриці А на вектор-стовпець Х*** позначається AX і дорівнює

$$AX=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ . & . & . & . \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} a_{11}x_1+a_{12}x_2+\dots+a_{1n}x_n \\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+\dots+a_{2n}x_n \\ \dots \\ a_{m1}x_1+a_{m2}x_2+\dots+a_{mn}x_n \end{pmatrix}.$$

Множення матриці на стовпчик

Кожен рядок матриці скалярно множиться на стовпець

$$\begin{pmatrix} 3 & -1 & 2 \\ 4 & 2 & 0 \\ -5 & 6 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 8 \\ 7 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3\cdot 8 + (-1)\cdot 7 + 2\cdot 2 \\ 4\cdot 8 + 2\cdot 7 + 0\cdot 2 \\ (-5)\cdot 8 + 6\cdot 7 + 1\cdot 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 21 \\ 46 \\ 4 \end{pmatrix}$$

Множення двох матриць

Нехай $A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ . & . & . & . \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix}$ і $B = \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & \dots & b_{1k} \\ b_{21} & b_{22} & \dots & b_{2k} \\ . & . & . & . \\ b_{n1} & b_{n2} & \dots & b_{nk} \end{bmatrix}$

розмірності $m \times n$ і $n \times k$ відповідно, (***узгоджені матриці***) тобто – число стовців матриці A дорівнює числу рядків матриці В.

Добутком матриці A на матрицю B називається матриця C $(m \times k)$ з елементами c_{ij}, що дорівнюють сумі добутків елементів i-го рядка матриці A на відповідні елементи j-го стовпця матриці B,

$c_{ij}=a_{i1}b_{1j}+a_{i2}b_{2j}+\dots+a_{in}b_{nj}$, $\qquad i=1,\dots,m;\ j=1,\dots,k.$

Приклад

Знайти добуток матриць $\begin{pmatrix} 2 & 6 \\ 1 & -2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & -1 & 3 \end{pmatrix}$

$$= \begin{pmatrix} 2\cdot 1 + 6\cdot 0 & 2\cdot 2 + 6\cdot(-1) & 2\cdot 0 + 6\cdot 3 \\ 1\cdot 1 + (-2)\cdot 0 & 1\cdot 2 + (-2)\cdot(-1) & 1\cdot 0 + (-2)\cdot 3 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 2 & -2 & 18 \\ 1 & 4 & -6 \end{pmatrix}$$

Множення стовпчика на рядок

$$\begin{pmatrix} 7 \\ 0 \\ -4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & -5 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7\cdot 2 & 7\cdot(-5) & 7\cdot 3 \\ 0\cdot 2 & 0\cdot(-5) & 0\cdot 3 \\ (-4)\cdot 2 & (-4)\cdot(-5) & (-4)\cdot 3 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 14 & -35 & 21 \\ 0 & 0 & 0 \\ -8 & 20 & -12 \end{pmatrix}$$

$$\boxed{A \cdot B \neq B \cdot A}$$

Узагалі, якщо добутки AB і BA існують, то $AB \neq BA$.

Якщо $AB = BA$, то такі матриці називаються **комутативними (перестановочними).**

Приклад.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -2 & 0 \end{pmatrix}; \quad B = \begin{pmatrix} -3 & 2 \\ -2 & -4 \end{pmatrix};$$

$$A \cdot B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -2 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -3 & 2 \\ -2 & -4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -7 & -6 \\ 6 & -4 \end{pmatrix}$$

$$B \cdot A = \begin{pmatrix} -3 & 2 \\ -2 & -4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -2 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -7 & -6 \\ 6 & -4 \end{pmatrix}.$$

За умови, що операції в обох частинах рівності здійсненні, справедливі наступні властивості.

Властивості добутку матриць

1. $A \cdot O = O$;
2. $A \cdot E = A$;
3. $A \cdot B \neq B \cdot A$;
4. $\alpha (AB) = (\alpha A) \cdot B = A \cdot (\alpha B)$;
5. $ABC = (AB) \cdot C = A \cdot (BC)$;
6. $A (B + C) = AB + AC$;
7. $(A \cdot B)^T = B^T \cdot A^T$.

Вільгельм Готфрід Лейбніц

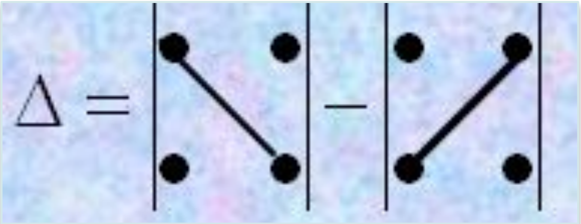
(1646-1716) — саксонський філософ(1646-1716) — саксонський філософ, логік(1646-1716) — саксонський філософ, логік, математик, механікмеханік, фізикмеханік, фізик, юрист, історикісторик, дипломат, винахідник і мовознавець.

Поняття «визначник» належить Г. Лейбніцу (1678).

1.3 Визначники та їх властивості

Поняття визначника (детермінанта) вводиться тільки для квадратних матриць. Познпчення |A|, det A, Δ.

Визначником n-го порядку матриці A називається алгебраїчна сума добутків елементів, взятих точно по одному з кожного рядка і кожного стовпчика матриці A. Знак кожного доданка визначається спеціальним правилом.



Визначник n-го порядку містить $n!$ членів.

$$|A| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$$ – ***визначник другого порядку***.

Приклад:

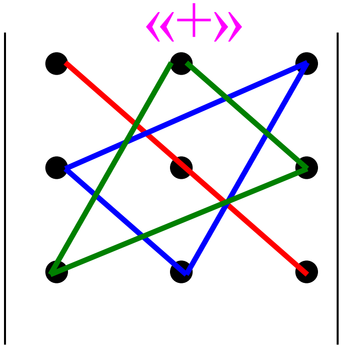
$$|A| = \begin{vmatrix} 2 & -5 \\ 3 & 7 \end{vmatrix} = 2 \cdot 7 - (-5) \cdot 3 = 14 - (-15) = 29.$$

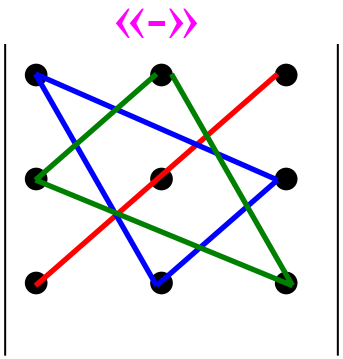
- Квадратна матриця A називається ***невиродженою,*** якщо її визначник $\det A \neq 0$.
- У протилежному випадку ($det\ A = 0$) матриця A називається ***виродженою.***

$$|A| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{11}a_{23}a_{32} -$$

$$- a_{12}a_{21}a_{33}$$ – ***визначник третього порядку.***

Правило трикутника ***: три додатних члена визначника третього порядку є добутком елементів головної діагоналі і елементів, що знаходяться в вершинах двох рівнобедрених трикутників, основи яких паралельні головній діагоналі. Три його від'ємних члена є добутком елементів побічної діагоналі і елементів, що знаходяться в вершинах двох рівнобедрених трикутників, основи яких паралельні побічної діагоналі.***



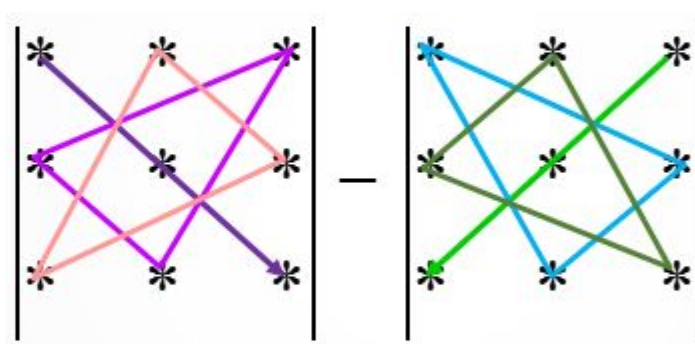


Приклад. Обчислити визначник 3-го порядку

$$\Delta = \begin{vmatrix} 5 & -2 & 1 \\ 3 & 1 & -4 \\ 6 & 0 & -3 \end{vmatrix}$$

$$\Delta = 5\bullet1\bullet(-3) + (-2)\bullet(-4)\bullet6 + 1\bullet3\bullet0 - 1\bullet1\bullet6 - 2\bullet(-3)\bullet(-3) - 5\bullet(-4)\bullet0 =$$

$$= -15 + 48 - 6 - 18 = 48 - 39 = 9.$$



Приклад. Обчислити визначник 3-го порядку
За допомогою правила діагоналей

$$\Delta = \left|\begin{array}{ccc} 5 & -2 & 1 \\ 3 & 1 & -4 \\ 6 & 0 & -3 \end{array}\right|\begin{array}{cc} 5 & -2 \\ 3 & 1 \\ 6 & 0 \end{array}$$

$-\quad -\quad -\quad +\quad +$

$$\Delta = 5\cdot 1\cdot(-3) + (-2)\cdot(-4)\cdot 6 + 1\cdot 3\cdot 0 - (1\cdot 1\cdot 6 + 5\cdot(-4)\cdot 0 + (-2)\cdot 3\cdot(-3)) =$$

$$= -15 + 48 - (6+18) = 33 - 24 = 9.$$

Визначник довільної трикутної матриці дорівнює добутку елементів головної діагоналі

$$\Delta = \begin{vmatrix} 7 & -1 & 9 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 7 \cdot 2 \cdot 1 = 14$$

$$\Delta_n = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ 0 & 0 & a_{33} & \cdots & a_{3n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} \cdot \ldots \cdot a_{nn} = \prod_{i=1}^{n} a_{ii}.$$

Властивості визначників n-го порядку:

1. Визначник матриці А дорівнює визначнику транспонованою матриці, $|A| = |A^T|$.
2. Якщо всі елементи деякого рядка матриці А дорівнюють 0, то визначник дорівнює 0.
3. Загальний (спільний) множник всіх елементів рядка визначника можна винести за знак цього визначника.
4. Якщо у визначнику поміняти місцями два рядки, то він змінить знак на протилежний.
5. Якщо визначник має два рівні рядки, то він дорівнює 0.
6. Якщо елементи двох рядків визначника пропорційні, то визначник дорівнює 0.

7. Значення визначника не зміниться, якщо до елементів його рядка додати відповідні елементи іншого рядка, помножені на одне і те ж число k.

Мінором M_{ij} елемента a_{ij} називається визначник (n-1) порядку, отриманний викресленням з визначника n-го порядку елементів i-го рядка та j-го стовпця, $i, j = 1,...,n$.

Приклад:

$$A = \begin{bmatrix} -2 & 1 & 4 \\ 6 & 2 & -8 \\ 0 & 3 & 6 \end{bmatrix}, \quad M_{23} = \begin{vmatrix} -2 & 1 \\ 0 & 3 \end{vmatrix} = (-2)\cdot 3 - 1\cdot 0 = -6$$

– мінор елемента a_{23}.

Алгебраїчним доповненням елемента a_{ij} називаєтьчя число

$$\boxed{A_{ij}=(-1)^{i+j} M_{ij}.}$$

$$A_{23}=(-1)^{2+3} M_{23}=(-1)(-6)=6.$$

8. Теорема. Визначник дорівнює сумі добутків елементів будь-якого його рядка на відповідні алгебраїчні доповнення елементів цього рядка.

Формула Лапласа:

$$|A| = a_{i1}A_{i1} + a_{i2}A_{i2} + \ldots + a_{in}A_{in},\ i = 1, \ldots, n.$$

П'єр-Сімо́н Лапла́с (1749 (1749 - 1827 (1749 - 1827) —французький (1749 - 1827) — французький математик (1749 - 1827) — французький математик, механік (1749 - 1827) — французький математик,

$$\begin{vmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 2 & 4 & -3 \\ 11 & 17 & -12 \end{vmatrix} = 2\times\begin{vmatrix} 4 & -3 \\ 17 & -12 \end{vmatrix} - 2\begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 17 & -12 \end{vmatrix} +$$

$$+11\times\begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 4 & -3 \end{vmatrix} = 2(-48+51) - 2(12-17) + 11(3-4) =$$

$$= 6 + 10 - 11 = 5.$$

$$\begin{vmatrix} 4 & 1 & 0 & 3 \\ 3 & 5 & 2 & 4 \\ 2 & -3 & 0 & 1 \\ 5 & 0 & 0 & -5 \end{vmatrix} = -2\begin{vmatrix} 4 & 1 & 3 \\ 2 & -3 & 1 \\ 5 & 0 & -5 \end{vmatrix} = -2\left(5\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ -3 & 1 \end{vmatrix} - 5\begin{vmatrix} 4 & 1 \\ 2 & -3 \end{vmatrix}\right) =$$

$$= -2(5\times 10 - 5\times(-14)) = -2(50+70) = -2\times 120 = -240$$

Правило чужих доповнень

- Сума добутків елементів будь-якого ряду кв. матриці на алгебраїчні доповнення відповідних елементів іншого її паралельного ряду дорівнює нулю.

9. Якщо елементи будь-якої ряду квадратної матриці A складаються з двох доданків, то визначник A дорівнює сумі визначників двох матриць, що розрізняються між собою тільки елементами цього ряду, що були раніше окремими складовими.

$$\begin{vmatrix} a'_{11}+a''_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a'_{21}+a''_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a'_{31}+a''_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a'_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a'_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a'_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a''_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a''_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a''_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}.$$

$$\det E = 1$$

$$\det(A \cdot B) = \det A \cdot \det B$$

«А математику тільки тому вчити слід, що вона розум до ладу приводить».

М. В. Ломоносов