Методы решения тригонометрических уравнений

Методы решения тригонометрических уравнений

1.Приведение уравнения к однородному.

2.Разложение левой части уравнения на множители.

3.Приведение к квадратному уравнению.

4.Возведение обеих частей уравнения в квадрат.

Простейшие тригонометрические уравнения

$$\sin x = a$$

Если $|a| > 1$, то уравнение не имеет корней

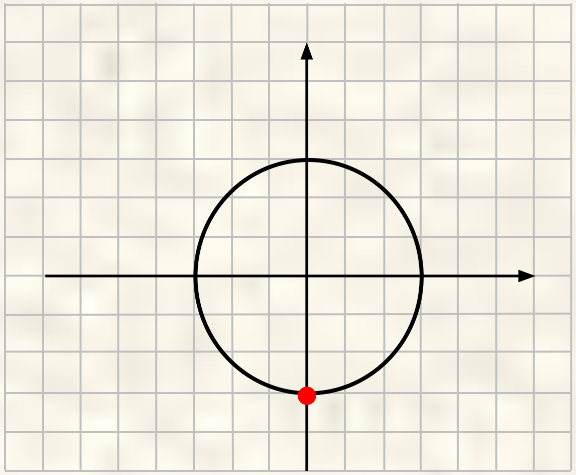
Если $|a| \le 1$, то $x = (-1)^n \cdot \arcsin a + \pi n,$

$n \in Z$

Простейшие тригонометрические уравнения

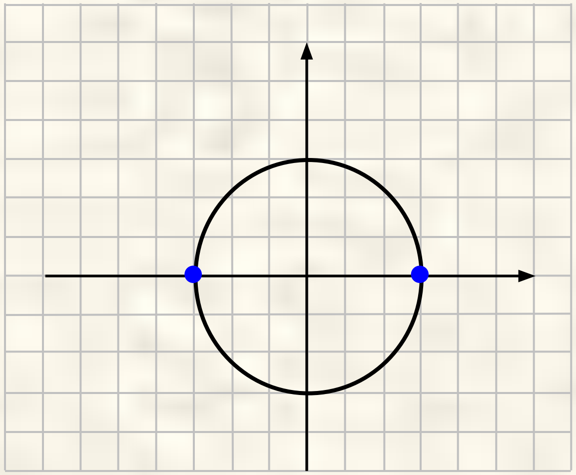
Частные случаи

$\sin x = -1$



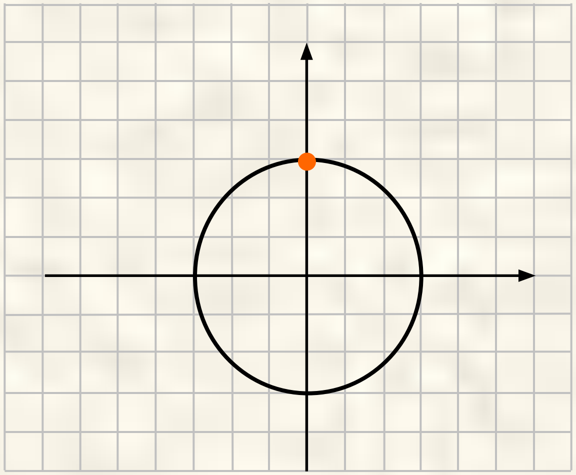
$$x = -\frac{\pi}{2} + 2\pi k, k \in Z$$

$\sin x = 0$



$$x = \pi k, k \in Z$$

$\sin x = 1$



$$x = \frac{\pi}{2} + 2\pi k, k \in Z$$

Простейшие тригонометрические уравнения

$$\cos x = a$$

Если $|a| > 1$, то уравнение не имеет корней

Если $|a| \le 1$, то

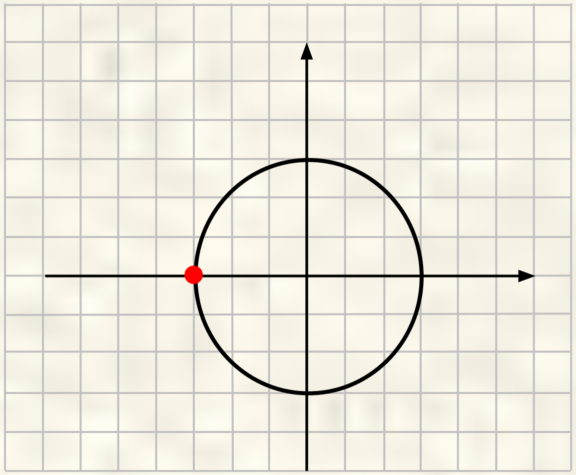
$x = \pm \arccos a + 2\pi n,$

$n \in Z$

Простейшие тригонометрические уравнения

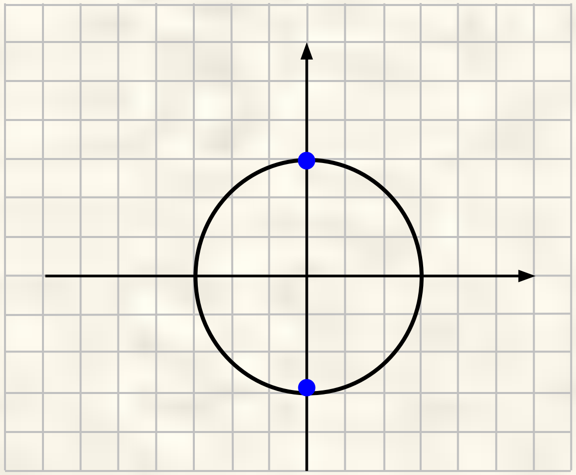
Частные случаи

$\cos x = -1$



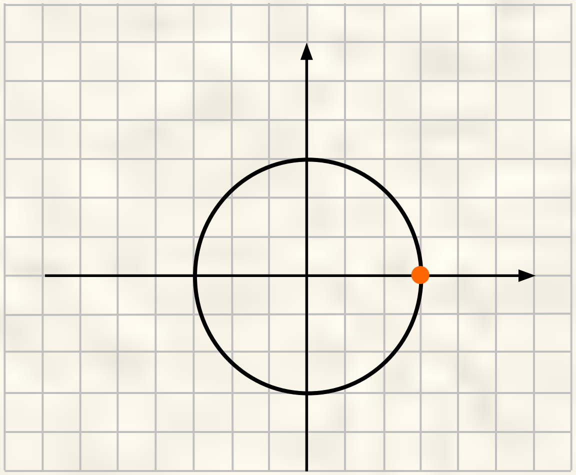
$x = \pi + 2\pi k, k \in Z$

$\cos x = 0$



$x = \frac{\pi}{2} + \pi k, k \in Z$

$\cos x = 1$



$x = 2\pi k, k \in Z$

Простейшие тригонометрические уравнения

$$tgx = a$$

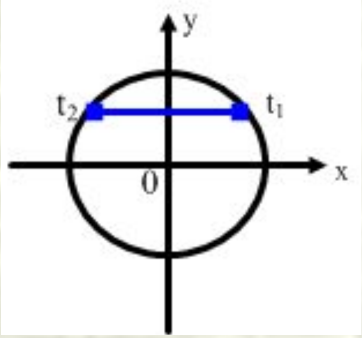
$$x = arctga + \pi n, n \in Z$$

$$ctgx = a$$

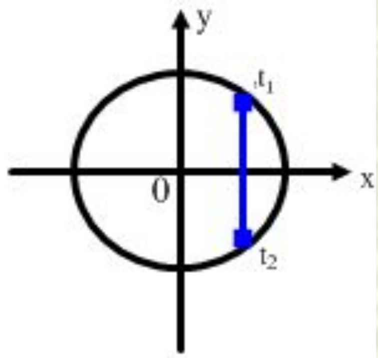
$$x = arcctga + \pi n, n \in Z$$

ДЛЯ КАЖДОГО РИСУНКА ПОДБЕРИТЕ СООТВЕТСТВУЮЩЕЕ УРАВНЕНИЕ

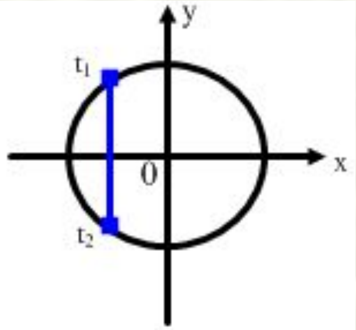
А)



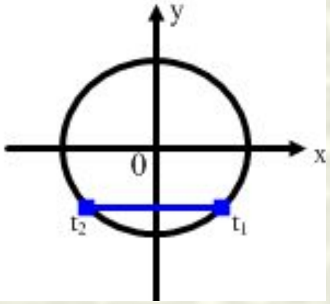
Б)



В)



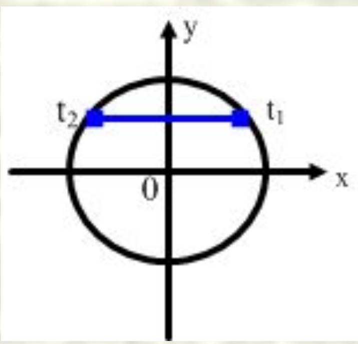
Г)



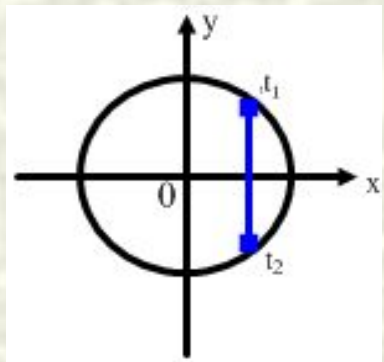
1) $\cos t = \frac{1}{2}$ 2) $\sin t = \frac{1}{2}$ 3) $\sin t = -\frac{\sqrt{3}}{2}$ 4) $\cos t = -\frac{\sqrt{3}}{2}$

ДЛЯ КАЖДОГО РИСУНКА ПОДБЕРИТЕ СООТВЕТСТВУЮЩЕЕ УРАВНЕНИЕ

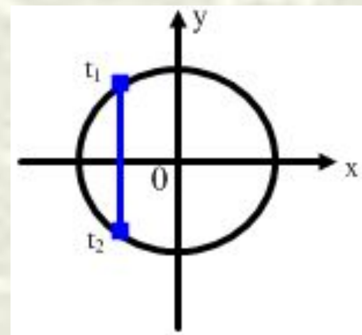
А)



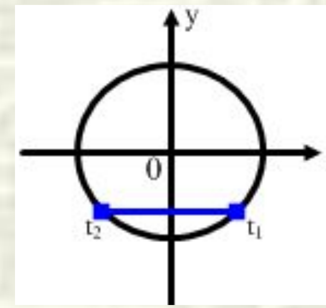
Б)



В)



Г)



2) $sint = \frac{1}{2}$ 1) $cost = \frac{1}{2}$ 4) $cost = -\frac{\sqrt{3}}{2}$ 3) $sint = -\frac{\sqrt{3}}{2}$

УСТАНОВИТЕ СООТВЕТСТВИЕ:

1) $\sin x = 0$	а) $\frac{\pi}{2} + 2\pi k, \quad k \in Z$
2) $\cos x = -1$	б) $\pi k, \quad k \in Z$
3) $\sin x = 1$	в) $\frac{\pi}{2} + \pi k, \quad k \in Z$
4) $tg\, x = 1$	г) $\pi + 2\pi k, \quad k \in Z$
5) $ctgx = 0$	д) $\frac{\pi}{4} + \pi k, \quad k \in Z$

УСТАНОВИТЕ СООТВЕТСТВИЕ:

1) *sin x = 0*	*а)*	$\frac{\pi}{2}+2\pi k,\ \ k\in Z$
2) cos x = -1	*б)*	$\pi k,\ \ k\in Z$
3) sin x = 1	*в)*	$\frac{\pi}{2}+\pi k,\ \ k\in Z$
4) tg x = 1	*г)*	$\pi+2\pi k,\ \ k\in Z$
5) ctgx = 0	*д)*	$\frac{\pi}{4}+\pi k,\ \ k\in Z$

Методы решения тригонометрических уравнений

Некоторые типы тригонометрических уравнений.

1. Уравнения, сводящиеся к квадратным, относительно cos x = t, sin x = t.

$$A \sin^2 x + B \cos x + C = 0$$

$$A \cos^2 x + B \sin x + C = 0$$

Решаются методом введения новой переменной.

2. Однородные уравнения первой и второй степени.

I степени. $A \sin x + B \cos x = 0 : \cos x$

$$A \operatorname{tg} x + B = 0$$

II степени. $A \sin^2 x + B \sin x \cos x + A \cos^2 x = 0 : \cos^2 x$

$$A \operatorname{tg}^2 x + B \operatorname{tg} x + C = 0$$

Решаются методом разложения на множители и методом введения новой переменной.

Методы решения тригонометрических уравнений

3. Уравнение вида:

$A \sin x + B \cos x = C. \qquad A, B, C \neq 0$

Применимы все методы.

4. Понижение степени.

$A \cos 2x + B \cos^2 x = C.$

$A \cos 2x + B \sin^2 x = C.$

Решаются методом разложения на множители.

$A \sin 2x + B \sin^2 x = C.$

$A \sin 2x + B \cos^2 x = C.$

Сводятся к однородным уравнениям $C = C(\sin^2 x + \cos^2 x)$

$\frac{1}{2}$

Методы решения тригонометрических уравнений

Формулы.

Универсальная подстановка.

$$\sin x = \frac{2\operatorname{tg}\frac{x}{2}}{1+\operatorname{tg}^2\frac{x}{2}}; \quad \cos x = \frac{1-\operatorname{tg}^2\frac{x}{2}}{1+\operatorname{tg}^2\frac{x}{2}}; \quad \operatorname{tg} x = \frac{2\operatorname{tg}\frac{x}{2}}{1-\operatorname{tg}^2\frac{x}{2}};$$

$x \neq \pi + 2\pi n$;

Проверка обязательна!

Понижение степени.

$$\cos^2 x = (1 + \cos 2x) : 2$$

$$\sin^2 x = (1 - \cos 2x) : 2$$

Метод вспомогательного аргумента.

a cosx +b sinx заменим на C sin(x+ϕ), где $C = \sqrt{a^2 + b^2}$;

$\sin\phi = \frac{a}{C}$; $\cos\phi = \frac{b}{C}$; ϕ - вспомогательный аргумент.

<u>Проблемы ,возникающие при решении тригонометрических уравнений</u>

1.Потеря корней:

- делим на g(x).
- опасные формулы (универсальная подстановка).

Этими операциями мы сужаем область определения.

2. Лишние корни:

- возводим в четную степень.
- умножаем на g(x) (избавляемся от знаменателя).

Этими операциями мы расширяем область определения.

Задача. ***Решите уравнение различными способами:*** $\mathbf{sin}\ \boldsymbol{x} - \mathbf{cos}\ \boldsymbol{x} = \boldsymbol{1}$**.**

?

Способ первый. *Приведение уравнения к однородному.*

$\sin x - \cos x = 1$

$\sin x = 2\sin x/2 \cos x/2,$

$\cos x = \cos^2 x/2 - \sin^2 x/2,$

$1 = \sin^2 x/2 + \cos^2 x/2.$

$$2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2} - \cos^2\frac{x}{2} + \sin^2\frac{x}{2} = \sin^2\frac{x}{2} + \cos^2\frac{x}{2}$$

$$2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2} - 2\cos^2\frac{x}{2} = 0$$

$$\cos\frac{x}{2}\left(\sin\frac{x}{2} - \cos\frac{x}{2}\right) = 0$$

1) $\cos\frac{x}{2} = 0$ или 2) $\sin\frac{x}{2} - \cos\frac{x}{2} = 0$

1) $\frac{x}{2} = \frac{\pi}{2} + \pi k, \quad k \in Z$

$x = \pi + 2\pi k$

Это однородное уравнение первой степени. Делим обе части этого уравнения на

$\cos\frac{x}{2}$, $\cos\frac{x}{2} \neq 0$ т.к., если $\cos\frac{x}{2} = 0$, то $\sin\frac{x}{2} - 0 = 0$,

что противоречит тождеству $\sin^2\frac{x}{2} + \cos^2\frac{x}{2} = 1$.

Получим: $tg\frac{x}{2} - 1 = 0$

$$tg\frac{x}{2} = 1$$

$$\frac{x}{2} = \frac{\pi}{4} + \pi n$$

$$x = \frac{\pi}{2} + 2\pi n, \quad n \in Z$$

Ответ: $x = \pi + 2\pi k, \quad k \in Z$

$x = \frac{\pi}{2} + 2\pi n, \quad n \in Z$

Способ второй. *Разложение левой части уравнения на множители:* Sin x – cos x = 1

$$\sin x - \cos x = 1$$

$\sin x = 2 \sin x/2 \cos x/2$

$\cos x = 2\cos^2 x/2 - 1$

$$\sin x - (1 + \cos x) = 0$$

$$1 + \cos x = 2\cos^2\frac{x}{2}; \qquad \sin x = 2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}$$

$$2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2} - 2\cos^2\frac{x}{2} = 0$$

$$\cos\frac{x}{2}\left(\sin\frac{x}{2} - \cos\frac{x}{2}\right) = 0$$

Далее так, как в первом способе.

Способ третий. ***Приведение к квадратному уравнению относительно одной функции***.

$\sin x - \cos x = 1$

$$\sin^2 x + \cos^2 x = 1$$

$$\sin x = \pm\sqrt{1-\cos^2 x}$$

$$\sin x - \cos x = 1 \Rightarrow \pm\sqrt{1-\cos^2 x} - \cos x = 1$$

$$\pm\sqrt{1-\cos^2 x} = 1 + \cos x$$

Возведем в квадрат:

$$1-\cos^2 x = 1 + 2\cos x + \cos^2 x$$

$$2\cos^2 x + 2\cos x = 0$$

$$\cos x(\cos x + 1) = 0 \Rightarrow \left[\begin{array}{l} \cos x = 0 \\ \cos x + 1 = 0 \end{array}\right.$$

$\cos x = 0,\qquad x = \dfrac{\pi}{2} + \pi k, k \in Z$ или

$\cos x + 1 = 0,\ \cos x = -1,\ x = \pi + 2\pi n, n \in Z$.

Внимание! При решении уравнения обе части уравнения возводились в квадрат, что могло привести к появлению посторонних решений, поэтому необходима проверка.

Сделаем проверку.

Полученные решения эквивалентны объединению трёх решений

$$\left[\begin{array}{l} x = \dfrac{\pi}{2} + 2\pi k, k \in Z \\ x = \pi + 2\pi n, n \in Z \\ x = -\dfrac{\pi}{2} + 2\pi m, m \in Z \end{array}\right.$$

Первое и второе решение совпадают с ранее полученными, поэтому не являются посторонними. Проверять не будем.

Проверим: $x = -\dfrac{\pi}{2} + 2\pi m, m \in Z$.

Левая часть: $\sin(-\dfrac{\pi}{2} + 2\pi m) - \cos(-\dfrac{\pi}{2} + 2\pi m) = \sin(-\dfrac{\pi}{2}) - \cos(-\dfrac{\pi}{2}) = -1 - 0 = -1$,

а правая часть уравнения равна **1**, следовательно это решение является посторонним.

Ответ: $x = \pi + 2\pi k, \quad k \in Z$

$x = \dfrac{\pi}{2} + 2\pi n, \quad n \in Z$

Способ четвертый.***Возведение обеих частей уравнения в квадрат.*** **$\sin x - \cos x = 1$**

$\sin^2 x - 2\sin x \cos x + \cos^2 x = 1,\qquad \sin^2 x + \cos^2 x = 1$

$1 - 2\sin x \cos x = 1,$

$2\sin x \cos x = 0,$

$\sin x = 0$ или $\cos x = 0$

$x = \pi n,\ n \in Z$ $\qquad x = \pi/2 + \pi n,\ n \in Z$

Ответ: $x = \pi n,\ n \in Z,\ x = \pi/2 + \pi n,\ n \in Z.$

Проверь себя !

Решите самостоятельно, применяя разные способы решения одного и того же тригонометрического уравнения:

1. $\sin 2x + \cos x = 0$;
2. $\sqrt{3}\sin x - \cos x = 0$
3. $\sin 6x + \sin 3x = 0$;
4. $\sin 2x + \cos 2x = 1$;
5. $\sqrt{3}\sin x + \cos x = 1$.

Человеку, изучающему алгебру часто полезнее решить одну и ту же задачу тремя различными способами, чем решать три – четыре различные задачи. Решая одну задачу различными способами, можно путем сравнивания выяснить, какой из них короче и эффективнее. Так вырабатывается опыт.

У. У. Сойер

/английский математик и педагог XX века/

Желаю успеха!