Лекция № 6

Часть 1. Результаты Шеннона и проблемы кодирования

1. Теорема Шеннона для канала без помех
2. Теорема Шеннона для канала с помехами
3. Значение результатов Шеннона для задач передачи, хранения и поиска информации
4. Современные технические средства передачи информации

Часть 2. Эффективное кодирование

1. Сжатие данных
2. Сжатие на основе статистических свойств данных
    - 2.1. Коды с переменной длиной кодового слова
    - 2.2. Вероятностная модель кодируемых сообщений
    - 2.3. Минимизация средней длины кодового слова

Лекция № 5

Часть 1. Условная энтропия и взаимная информация

1.1. Условная энтропия

1.2. Взаимная информация

1.3. Пример с троичным каналом

Часть 2. Каналы передачи информации

2.1. Структурная схема системы передачи информации (повторение)

2.2. Технические и информационные характеристики канала связи без помех

2.3. Обобщенные характеристики сигналов и каналов

Часть 3. Каналы передачи информации с помехами

3.1. Вероятностные модели каналов передачи информации:

- **двоичный канал**
- **троичный канал**

3.2. Характеристики каналов передачи информации с помехами

Часть 1. Условная энтропия и взаимная информация

1. Условная энтропия

2. Взаимная информация

$$I(\xi,\eta) = H(\xi) - H_{\eta}(\xi).$$

3. Пример с троичным каналом

$$H(Y/X) = \sum_{i=1}^{N} \sum_{j=1}^{M} p(x_i y_j) \log_2 \frac{1}{p(y_j / x_i)}.$$

1. Условная энтропия

Пусть ξ и η – случайные величины с множествами возможных значений $X = \{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$, $Y = \{y_1, y_2, \ldots, y_m\}$

Количество информации $H(\xi)$ при наблюдении случайной величины $\xi \in X = \{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$ с распределением вероятностей $P = \{p_1, p_2, \ldots, p_n\}$ задается формулой Шеннона:

$$H(\xi) = \sum_{i=l}^{n} p_i \log_2 l / p_i$$

Количество информации $H(\eta)$ при наблюдении случайной величины $\eta \in Y = \{y_1, y_2, \ldots, y_m\}$ с распределением вероятностей $Q = \{q_1, q_2, \ldots, q_m\}$ задается формулой Шеннона:

$$H(\eta) = \sum_{i=l}^{m} q_i \log_2 l / q_i$$

1. Условная энтропия

Условной энтропией величины η при наблюдении величины ξ называется

$$H(\eta)=H(\eta/\xi)=H(Y/X)=\sum_{i=1}^{N}\sum_{j=1}^{M}p(x_i y_j)\log_2\frac{1}{p(y_j/x_i)}.$$

Справедливы соотношения:

$$H(\xi,\eta)=H(\xi)+H_{\xi}(\eta),$$

$$H(\eta,\xi)=\sum_{i=1}^{N}\sum_{j=1}^{M}p(x_i y_j)\log_2\frac{1}{p(y_j x_i)}.$$

Часть 1. Условная энтропия и взаимная информация

1. Условная энтропия

2. Взаимная информация $I(\xi,\eta)=H(\xi)-H_{\eta}(\xi).$

3. Пример с троичным каналом

$$H(Y/X)=\sum_{i=1}^{N}\sum_{j=1}^{M}p(x_i y_j)\log_2\frac{1}{p(y_j/x_i)}.$$

2. Взаимная информация

Взаимной информацией величин ξ и η называется $I(\xi,\eta)=H(\xi)-H_{\eta}(\xi).$

Справедливы следующие соотношения:

$$I(\xi,\eta)=\sum_{i=1}^{N}\sum_{j=1}^{M}p(x_i y_j)\log_2\frac{p(x_i y_j)}{p(x_i)p(y_j)},$$

$$I(\xi,\eta)=I(\eta,\xi)=H(\eta)-H_{\xi}(\eta),$$

$$I(\xi,\eta)=H(\xi)+H(\eta)-H(\xi,\eta),$$

Закон аддитивности в общем случае:

$$H(\xi,\eta)=H(\xi)+H(\eta)-I(\xi,\eta),$$

$$0\le I(\xi,\eta)\le H(\xi),\quad 0\le I(\xi,\eta)\le H(\eta).$$

Если ξ и η – независимы, то $I(\xi,\ \eta)=0$.

2. Взаимная информация

При расчетах условной энтропии и взаимной информации удобно пользоваться следующими соотношениями теории вероятностей:

1) теорема умножения вероятностей

$$p(x_i y_j) = p(x_i)p(y_j / x_i) = p(y_j)p(x_i / y_j)$$

2) формула полной вероятности

$$p(x_i) = \sum_{j=1}^{M} p(x_i, y_j);$$

3) формула Байеса

$$p(x_i / y_j) = \frac{p(x_i)p(y_j / x_i)}{p(y_j)} = \frac{p(x_i)p(y_j / x_i)}{\sum_{i=1}^{N} p(x_i)p(y_j / x_i)}.$$

Часть 1. Условная энтропия и взаимная информация

1. Условная энтропия

2. Взаимная информация $I(\xi,\eta) = H(\xi) - H_{\eta}(\xi).$

3. Пример с троичным каналом

$$H(Y/X) = \sum_{i=1}^{N}\sum_{j=1}^{M} p(x_i y_j)\log_2 \frac{1}{p(y_j/x_i)}.$$

3. Пример с троичным каналом (с матрицей)

Пример 1. Дана матрица

$$P(X,Y)=\begin{Vmatrix} \frac{1}{8} & \frac{1}{8} & \frac{1}{8} \\ \frac{1}{8} & 0 & \frac{1}{8} \\ \frac{1}{8} & \frac{1}{8} & \frac{1}{8} \end{Vmatrix} \quad \xi \in X,\ \eta \in Y$$

Определить: $H(\xi), H(\eta),\ H_\eta(\xi), H_\xi(\eta), H(\xi,\eta),\ I(\xi,\eta).$

Решение. По формуле полной вероятности имеем:

$$P(x_1)=\sum_{j=1}^{3} p(x_1,y_j)=\frac{3}{8},\ \ P(x_2)=\frac{1}{4},\quad P(x_3)=\frac{3}{8},\ \ P(y_1)=\sum_{i=1}^{3} p(x_i,y_1)=\frac{3}{8},\ \ P(y_2)=\frac{1}{4},\ \ P(y_3)=\frac{3}{8}.$$

Следовательно, $H(\xi)=\sum_{i=1}^{3} p(x_i)\log_2\frac{1}{p(x_i)}=1{,}57;\quad H(\eta)=\sum_{i=1}^{3} p(y_i)\log_2\frac{1}{p(y_i)}=1{,}57.$

3. Пример с троичным каналом (с матрицей)

По теореме умножения

$$p(x_1 / y_1) = p(x_1 y_1) / p(y_1) = \frac{1}{3}, \quad p(x_1 / y_2) = \frac{1}{2}, \quad p(x_1 / y_3) = \frac{1}{3},$$

$$p(x_2 / y_1) = \frac{1}{3}, \quad p(x_2 / y_2) = 0, \quad p(x_2 / y_3) = \frac{1}{3},$$

$$p(x_3 / y_1) = \frac{1}{3}, \quad p(x_3 / y_2) = \frac{1}{2}, \quad p(x_3 / y_3) = \frac{1}{2}.$$

Следовательно,

$$H_\eta(\xi) = \sum_{I=1}^{3} \sum_{J=1}^{3} p(x_i y_j) \log_2 \frac{1}{p(x_i / y_j)} = 1{,}43.$$

Аналогично

$$H_\xi(\eta) = 1{,}43; \;\; H(\xi,\eta) = H(\xi) + H_\xi(\eta) = 3; \;\; I(\xi,\eta) = H(\xi) - H_\eta(\xi) = 0{,}14.$$

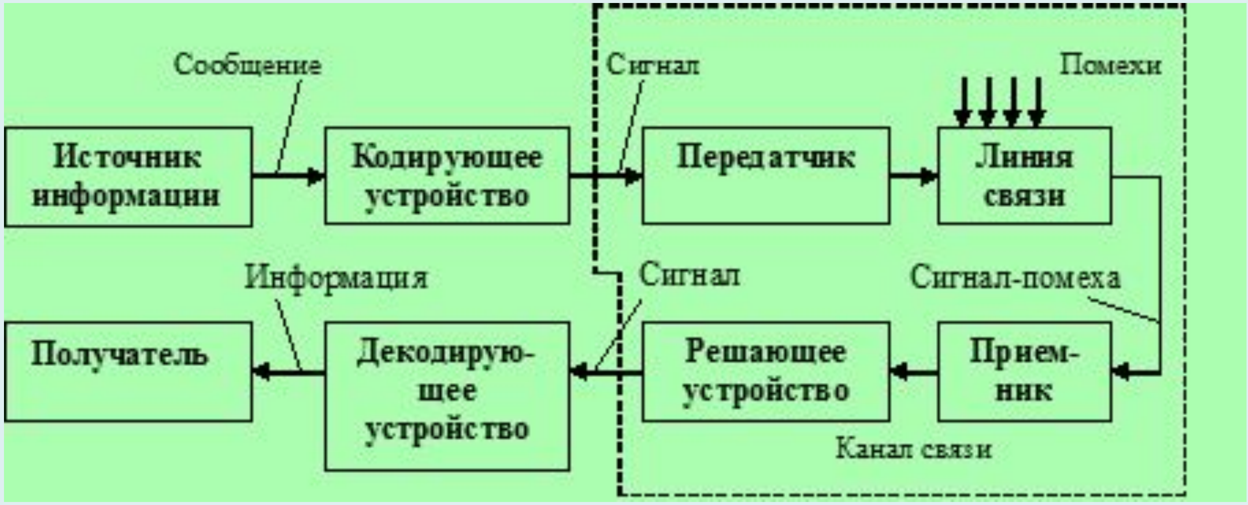
Лекция № 5

Часть 2. Каналы передачи информации

2.1. Структурная схема системы передачи информации (повторение)

2.2. Технические и информационные характеристики канала связи без помех

2.3. Обобщенные характеристики сигналов и каналов

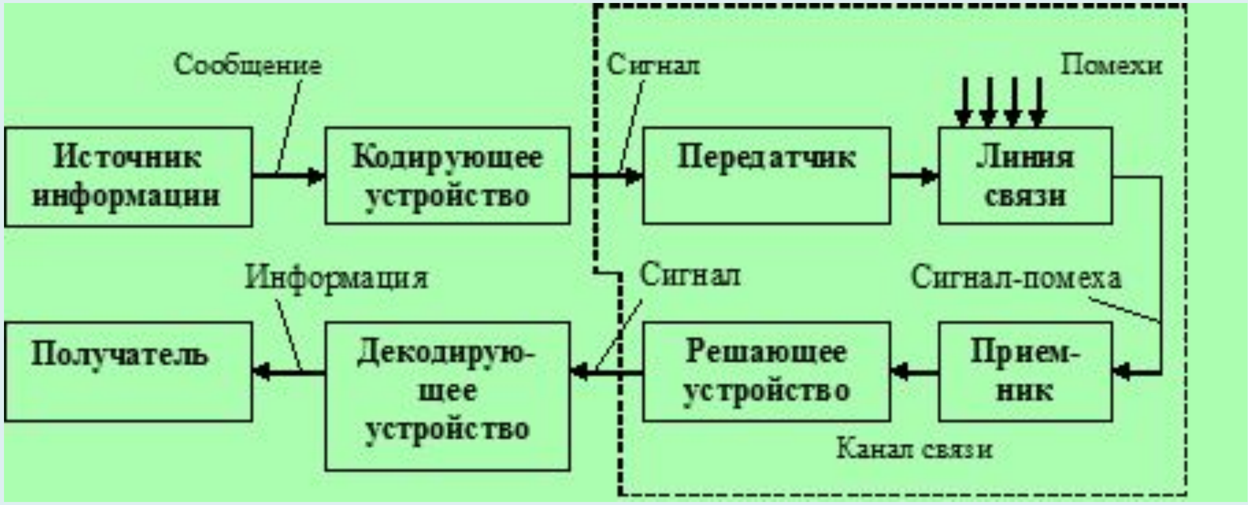


Часть 2. Каналы передачи информации

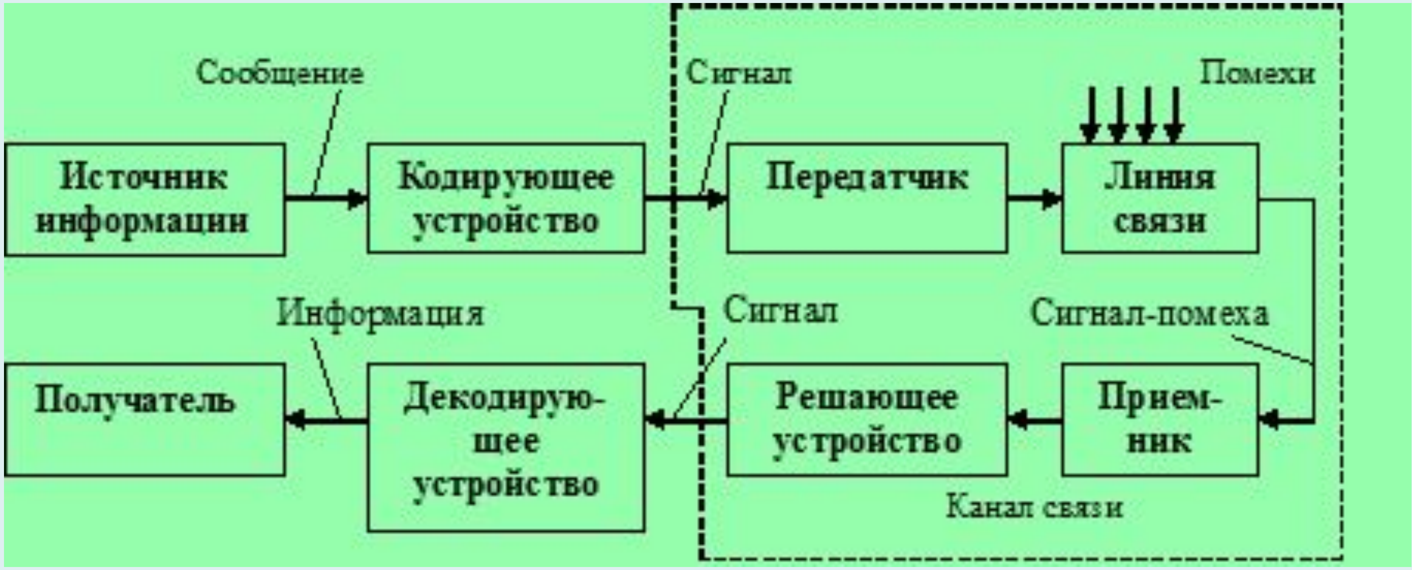
2.1. Структурная схема системы передачи информации (повторение)

2.2. Технические и информационные характеристики канала связи без помех

2.3. Обобщенные характеристики сигналов и каналов



2.3. Структурная схема информационной системы



Примеры:

электрические,

электромагнитные,

механические,

ультразвуковые,

звуковые,

световые.

Проводная линия связи → постоянный ток и переменные токи сравнительно невысоких частот

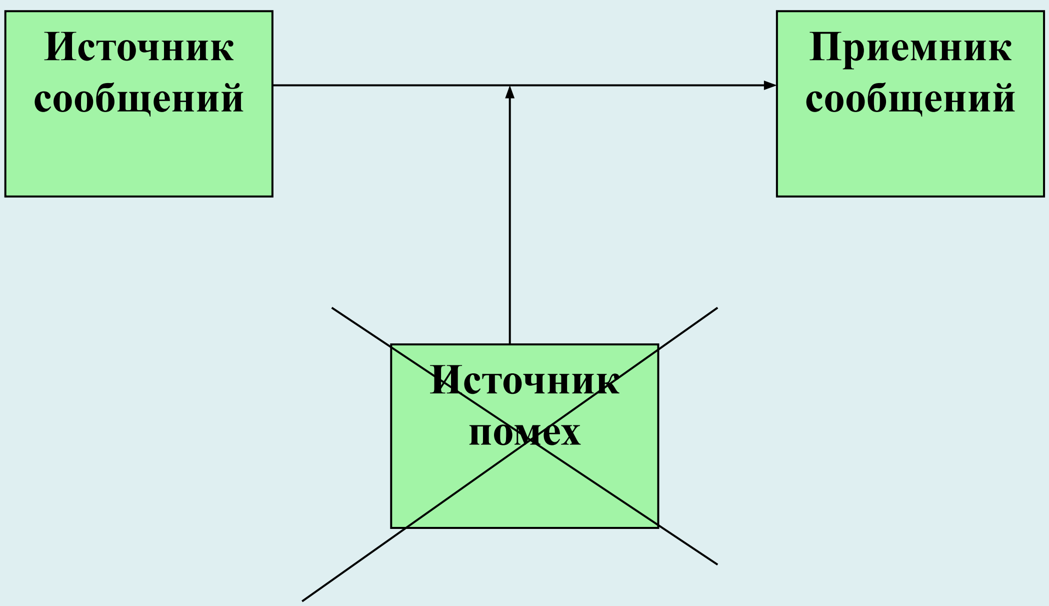
Радиолиния → электромагнитные колебания высоких частот

Часть 2. Каналы передачи информации

2.1. Структурная схема системы передачи информации (повторение)

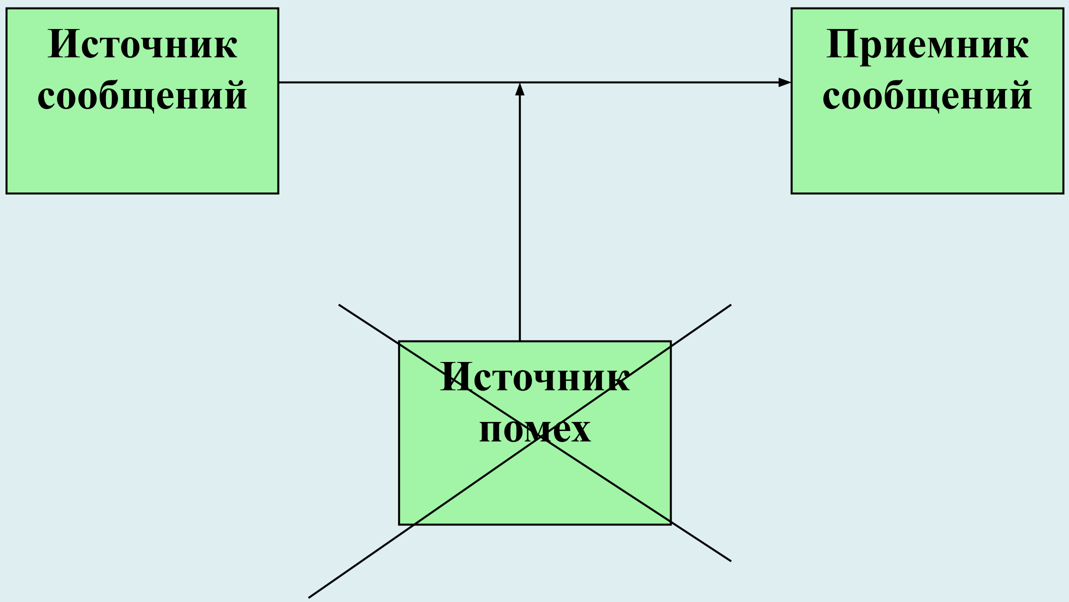
2.2. Технические и информационные характеристики канала связи без помех

2.3. Обобщенные характеристики сигналов и каналов



$$T_c \le T_k$$
$$F_c \le F_k$$
$$D_c \le D_k$$

2. Технические и информационные характеристики канала связи без помех



Выходной алфавит символов источника сообщений: $A = \{a_i\}, A = \{a_1, a_2, ..., a_n\}$

Количество информации, приходящееся в среднем на один символ источника:

$H(A) = \sum_{i=1}^{n} p_i \log_2 1/p_i$, где p_i – вероятность появления символа a_i на выходе источника.

Алфавит символов канала связи: $B = \{b_1, b_2, ..., b_m\}$

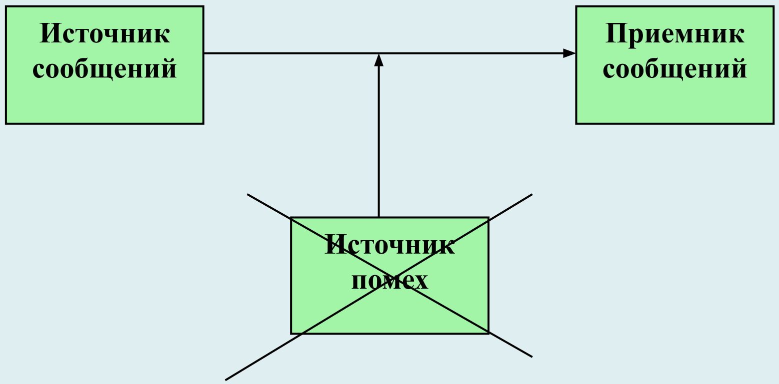
2. Технические и информационные характеристики канала связи без помех

Среднее количество информации, выдаваемое источником в единицу времени – информационная производительность:

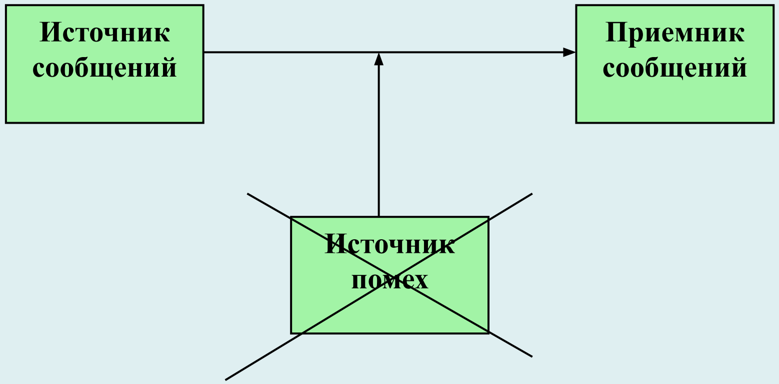
$dI(A)/dt = \upsilon_A H(A)$, где υ_A – среднее число символов, выдаваемое источником в единицу времени.

Скорость передачи информации по каналу:

$dI(B)/dt = \upsilon_B H(B)$, где υ_B – среднее число символов, выдаваемое по каналу в единицу времени.



2. Технические и информационные характеристики канала связи без помех



Пропускная способность канала:

$C_k = \max\limits_{\{p\}} dI(B)/dt,$ *где* $\{p\}$ – множество всех возможных распределений вероятностей символов алфавита В канала.

Пропускная способность канала (с учетом свойств энтропии):

$C_k = \upsilon_B \log_2 m$ – где $n, m, \upsilon_A, \upsilon_B$ – технические характеристики канала связи.

Часть 2. Каналы передачи информации

2.1. Структурная схема системы передачи информации (повторение)

2.2. Технические и информационные характеристики канала связи без помех

2.3. Обобщенные характеристики сигналов и каналов

3. Обобщенные характеристики сигналов и каналов

Сигнал может быть охарактеризован различными параметрами. Таких параметров, вообще говоря, очень много, но для задач, которые приходится решать на практике, существенно лишь небольшое их число. Например, при выборе прибора для контроля технологического процесса может потребоваться знание дисперсии сигнала; если сигнал используется для управления, существенным является его мощность и так далее.

Рассматривают три основных параметра сигнала, существенных для передачи информации по каналу.

- время передачи сигнала T_c
- мощность P_c сигнала, передаваемого по каналу с определенным уровнем помех P_z
- спектр частот F_c

Чем больше значение P_c по сравнению с P_z, тем меньше вероятность ошибочного приема. Таким образом, представляет интерес отношение P_c/P_z. Удобно пользоваться логарифмом этого отношения, называемым превышением сигнала над помехой:

$$L_c = \log a\left(\frac{Pc}{Pz}\right)$$

3. Обобщенные характеристики сигналов и каналов

Эти три параметра позволяют представить любой сигнал в трехмерном пространстве с координатами *L, T, F* в виде параллелепипеда с объемом $T_c F_c L_c$

Объем сигнала V_c

$$\boxed{V_c = T_c F_c D_c}$$

Информационный канал характеризуется:

- *временем использования канала* $T_к$
- *шириной полосы частот, пропускаемых каналом* F_k
- *динамическим диапазоном канала* D_k *характеризующим его способность передавать различные уровни сигнала*

Емкость канала V_k

$$\boxed{T_k = T_k F_k D_k}$$

Неискаженная передача сигналов возможна только при условии, что сигнал по своему объему «вмещается» в емкость канала.

Согласование сигнала с каналом передачи информации определяется соотношением

$$\boxed{V_c \le V_k}$$

3. Обобщенные характеристики сигналов и каналов

Однако соотношение выражает необходимое, но недостаточное условие согласования сигнала с каналом. Достаточным условием является согласование по всем параметрам:

$$\boxed{\begin{aligned} T_c &\le T_k \\ F_c &\le F_k \\ D_c &\le D_k \end{aligned}}$$

Для информационного канала пользуются понятиями:

скорость ввода информации

скорость передачи информации

пропускная способность канала

Скорость ввода информации (потоком информации) *V(A)* - среднее количество информации, вводимое от источника сообщений в информационный канал в единицу времени. Эта характеристика источника сообщений определяется только статистическими свойствами сообщений.

Скорость передачи информации V(X,Y) – среднее количество информации, передаваемое по каналу в единицу времени. Зависит от статистических свойств передаваемого сигнала и от свойств канала.

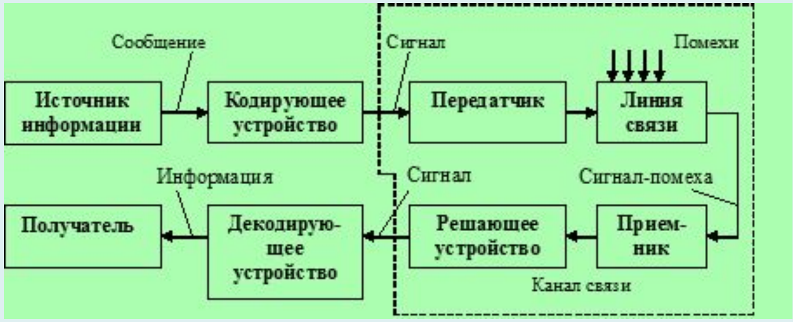
Пропускная способность C – наибольшая теоретически достижимая для данного канала скорость передачи информации. Характеристика канала не зависит от статистики сигнала.

3. Обобщенные характеристики сигналов и каналов

С целью наиболее эффективного использования информационного канала нужно, чтобы скорость передачи информации была как можно ближе к пропускной способности канала.

При этом скорость ввода информации не должна превышать пропускную способность канала, иначе не вся информация будет передана по каналу.

Основное условие согласования

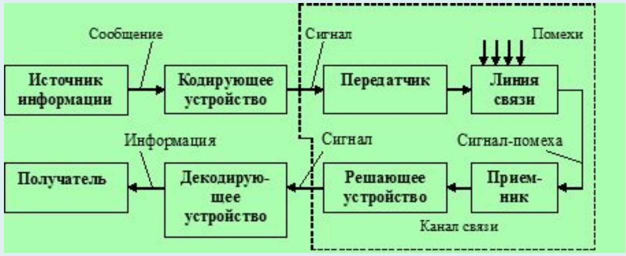


3. Обобщенные характеристики сигналов и каналов

Одним из основных вопросов в теории передачи информации:

определение зависимости скорости передачи информации и пропускной способности от

параметров канала и
характеристик сигналов и помех.



Эти вопросы были впервые глубоко исследованы К. Шенноном.

Лекция № 5

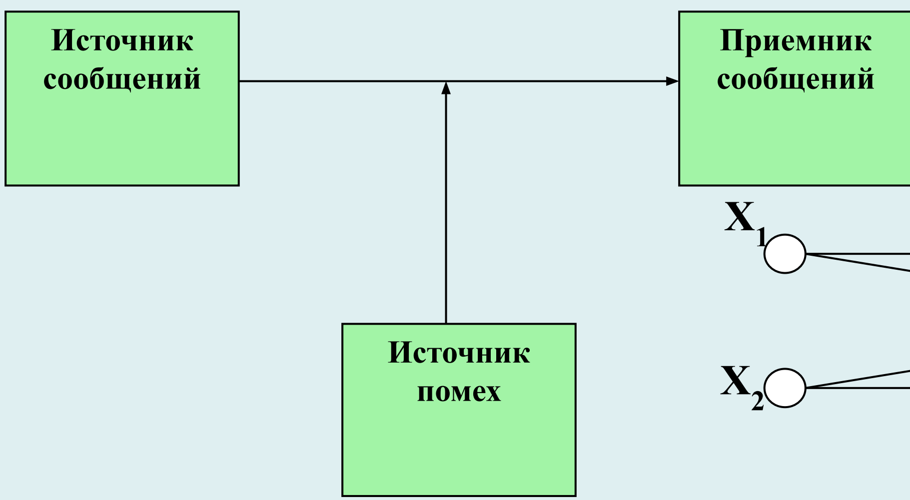
Часть 3. Каналы передачи информации с помехами

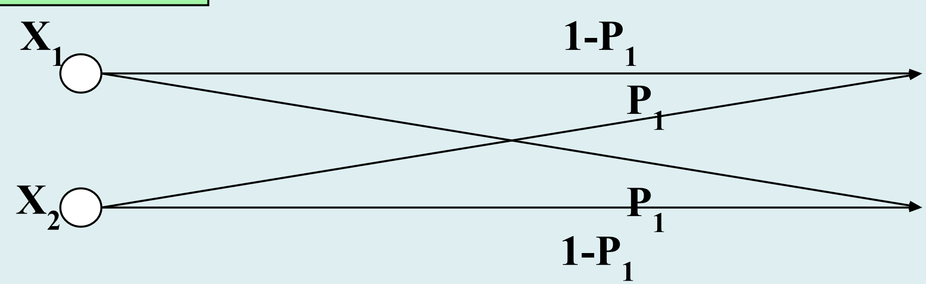
3.1. Вероятностные модели каналов передачи информации:

– двоичный канал

– троичный канал

3.2. Характеристики каналов передачи информации с помехами





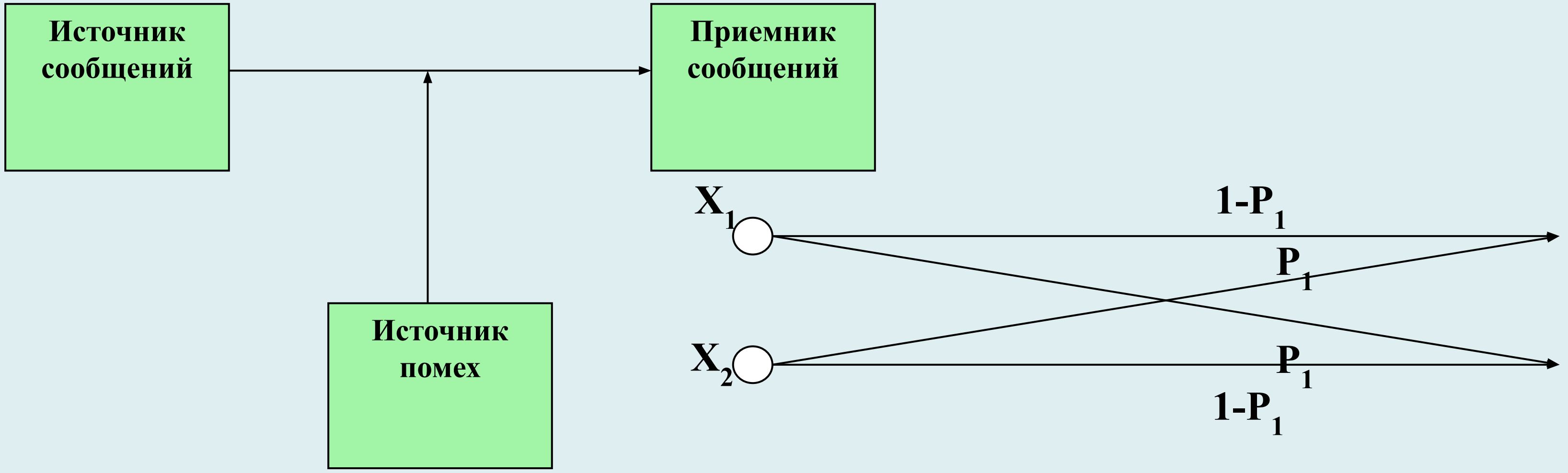
Часть 3. Каналы передачи информации с помехами

3.1. Вероятностные модели каналов передачи информации:

– двоичный канал

– троичный канал

3.2. Характеристики каналов передачи информации с помехами



5.1 Вероятностные модели каналов передачи информации
Двоичный канал

Пример 1. По двоичному каналу связи с помехами передаются две цифры 1 и 0 с вероятностями $p_1 = p_2 = 0{,}5$. Вероятность перехода единицы в единицу и нуля в нуль соответственно равны $p(1/1) = \mathrm{p}$, $p(0/0) = q$.

Определить закон распределения вероятностей случайной величины ξ – однозначного числа, получаемого на приемной стороне.

5.1 Вероятностные модели каналов передачи информации
Двоичный канал

Решение. $\xi \in X = \{0,\ 1\}$. Нуль ($\xi = 0$) на приемной стороне может быть получен в двух случаях: при передаче нуля или при передаче единицы. Следовательно, по формуле полной вероятности

$$P_\xi(0) = P(0{,}0) + P(1{,}0) = P(0) \cdot P(0/0) + P(1) \cdot P(0/1),$$

$$P(0/1) = 1 - P(1/1).$$

5.1 Вероятностные модели каналов передачи информации
Двоичный канал

Поэтому

$$P_\xi(0) = 0{,}5q + 0{,}5(1 - p) = 0{,}5(1 + q - p).$$

Аналогично

$$P_\xi(1) = P(0{,}1) + P(1{,}1) = 0{,}5(1 - q + p).$$

Распределение вероятностей представлено в табл.

x_i	0	1
p_i	$0{,}5(10p + q)$	$0{,}5(1 - p + q)$

5.1 Вероятностные модели каналов передачи информации
Троичный канал

Пример 1. Дана матрица

$$P(X,Y)=\begin{Vmatrix} \frac{1}{8} & \frac{1}{8} & \frac{1}{8} \\ \frac{1}{8} & 0 & \frac{1}{8} \\ \frac{1}{8} & \frac{1}{8} & \frac{1}{8} \end{Vmatrix}, \quad \xi \in X, \quad \eta \in Y$$

Определить: распределения вероятностей на входе и на выходе канала, условное распределение вероятностей появления сигналов на выходе канала при фиксированном входе и на входе канала при фиксированном выходе канала.

5.1 Вероятностные модели каналов передачи информации Троичный канал

Решение. По формуле полной вероятности имеем:

$$P(x_1) = \sum_{j=1}^{3} p(x_1, y_j) = \frac{3}{8},$$

$$P(x_2) = \frac{1}{4}, \quad P(x_3) = \frac{3}{8}, \quad P(y_1) = \sum_{i=1}^{3} p(x_i, y_1) = \frac{3}{8}, \quad P(y_2) = \frac{1}{4}, \quad P(y_3) = \frac{3}{8}.$$

По теореме умножения

$$p(x_1 / y_1) = p(x_1 y_1) / p(y_1) = \frac{1}{3}, \quad p(x_1 / y_2) = \frac{1}{2}, \quad p(x_1 / y_3) = \frac{1}{3},$$

$$p(x_2 / y_1) = \frac{1}{3}, \quad p(x_2 / y_2) = 0, \quad p(x_2 / y_3) = \frac{1}{3},$$

$$p(x_3 / y_1) = \frac{1}{3}, \quad p(x_3 / y_2) = \frac{1}{2}, \quad p(x_3 / y_3) = \frac{1}{2}.$$

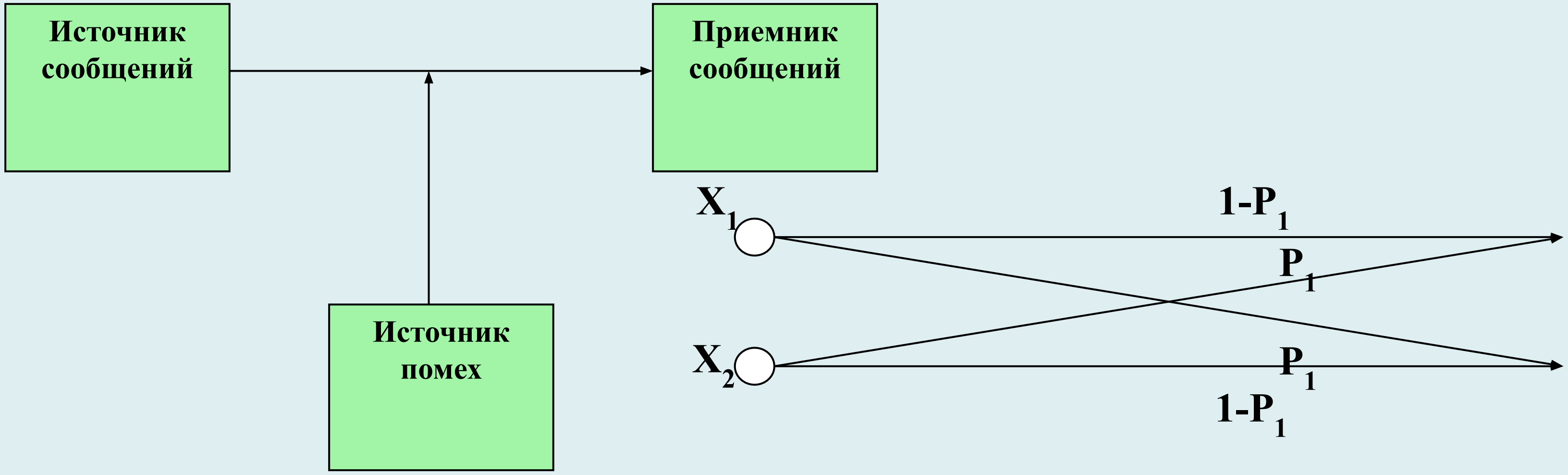
Часть 3. Каналы передачи информации с помехами

3.1. Вероятностные модели каналов передачи информации:

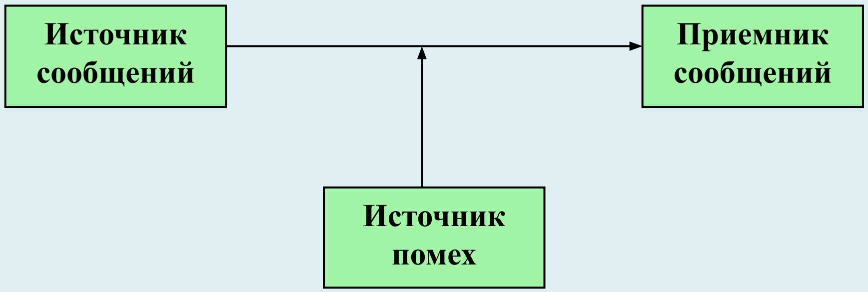
– двоичный канал

– троичный канал

3.2. Характеристики каналов передачи информации с помехами



5.2. Характеристики каналов передачи информации с помехами



Выходной алфавит символов источника сообщений: $A = \{a_i\}, A = \{a_1, a_2, ..., a_n\}$

Количество информации, приходящееся в среднем на один символ источника:

$H(A) = \sum_{i=1}^{n} p_i \log_2 1/p_i$, где p_i – вероятность появления символа a_i на выходе источника.

Среднее количество информации, выдаваемое источником в единицу времени – информационная производительность:

$dI(A)/dt = \upsilon_A H(A)$, где υ_A – среднее число символов, выдаваемое источником в единицу времени.

5.2. Характеристики каналов передачи информации с помехами

Алфавиты символов канала связи:

$$B_{вх} = X = \{x_1, x_2, \dots, x_m\}, B_{вых} = Y = \{y_1, y_2, \dots, y_l\}$$

Матрица переходных вероятностей:

$$\left\| p(y_i / x_k) \right\|, \quad где \quad k = 1 \dots m, i = 1 \dots l; \quad \sum_{i=1}^{l} p(y_i / x_k) = 1$$

Среднее количество информации на один входной и на один выходной символ канала:

$$H(X) = \sum_{i=1}^{m} p(x_i) \log_2 1 / p(x_i); H(Y) = \sum_{j=1}^{l} p(y_j) \log_2 1 / p(y_j)$$

5.2. Характеристики каналов передачи информации с помехами

Информация, которую несет выход канала о входе:

$$I(Y,X) = H(X) - H_y(X) = H(Y) - H_x(Y)$$

где $H_y(X)$ – ненадежность канала, $H_x(Y)$ – энтропия шума.

Скорость передачи информации по каналу:

$$dl(B)/dt = \upsilon_B I(X,Y),$$

где υ_B – среднее число символов, выдаваемое каналом в единицу времени.

Пропускная способность канала:

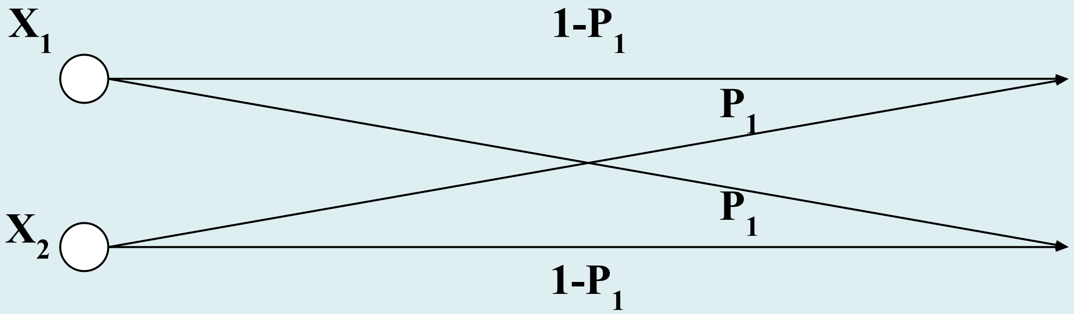
$C_k = \max\limits_{\{p\}}\{dI(B)/dt\}$, *где* $\{p\}$ – множество всех возможных распределений вероятностей входного алфавита символов канала

$C_k = \upsilon_B \max\{I(x,y)\}$ $n, m, l, \upsilon_A, \upsilon_B$ – $\{p\}$ характеристики канала.

5.2. Характеристики каналов передачи информации с помехами

ПРИМЕР

1. Найти пропускную способность двоичного симметричного канала – канала с двухсимвольными входными и выходными алфавитами и одинаковыми вероятностями ошибок (см. рисунок)



если априорные вероятности появления входных символов

$$p(x_1) = p_1 = p, p(x_2) = p_2 = 1 - p$$

5.2. Характеристики каналов передачи информации с помехами

РЕШЕНИЕ. В соответствии с моделью канала условные вероятности

$$p(\frac{y_1}{x_2}) = p(\frac{y_2}{x_1}) = p_l, p(\frac{y_1}{x_1}) = p(\frac{y_2}{x_2}) = 1 - p_l$$

Пропускная способность канала $C_k = \upsilon_B \max_{\{p\}}\{H(Y) - H(Y/X)\}$

Найдем энтропию шума $H(X/Y) = \sum_{i=1}^{2}\sum_{j=1}^{2} p(x_i y_j)\log_2 1/p(y_j/x_i)$

По теореме умножения $p(y_j, x_i) = p(x_i)p(y_j/x_i)$

следовательно, $p(x_1 y_1) = p(1 - p_l)$ $p(x_2 y_1) = (1 - p)p_l$

$p(x_1 y_1) = pp_l$ $p(x_2 y_2) = (1 - p)(1 - p_l)$

Подставляя в формулу, получаем $H(Y/X) = p_l \log_2 1/p_l + (1 - p_l)\log_2 1/(1 - p_l)$

Таким образом, H(Y/X) не зависит от распределения входного алфавита, следовательно,

$$C_k = \upsilon_k \max_{\{p\}}[H(Y)] - \upsilon_н H(Y/X)$$

5.2. Характеристики каналов передачи информации с помехами

Определим энтропию выхода

$$H(Y) = p(y_1 \log_2)1/\, p(y_1) + p(y_2)\log_2 1/\, p(y_2),$$

$$\text{где } \mathrm{p}(y_1) = p(y_1 x_1) + p(y_1 x_2) = p(1 - p_l\,) + p_l\,(1 - p);$$

$$\mathrm{p}(y_2) = p(y_2 x_1) + p(y_2 x_2) = pp_l\, + (1 - p)(1 - p_l\,)$$

Таким образом,

$$H(Y) = \left[p(1 - p_l\,) + p_l\,(1 - p)\right]\log_2 1/\left[p(1 - p_l\,) + p_l\,(1 - p)\right] + \left[pp_l\, + (1 - p)(1 - p_l\,)\right] \log_2 1/\left[pp_l\, + (1 - p)(1 - p_l\,)\right]$$

Варьируя *p,* убеждаемся, что максимальное значение H/Y, равное *I,* получается при равновероятных входных символах $p(y_1)$ и $p(y_2)$.

Следовательно,

$$C_k = \upsilon_k\left[1 + p_l \log_2 1/\, p_l + (1 - p_l\,)\log_2 1/(1 - p_l\,)\right].$$

Заключение!!!

Лекция № 5

Часть 1. Условная энтропия и взаимная информация

1.1. Условная энтропия

1.2. Взаимная информация

1.3. Пример с троичным каналом

Часть 2. Каналы передачи информации

2.1. Структурная схема системы передачи информации (повторение)

2.2. Технические и информационные характеристики канала связи без помех

2.3. Обобщенные характеристики сигналов и каналов

Часть 3. Каналы передачи информации с помехами

3.1. Вероятностные модели каналов передачи информации:

– двоичный канал

– троичный канал

3.2. Характеристики каналов передачи информации с помехами

Часть 1. Результаты Шеннона и проблемы кодирования

1. Теорема Шеннона для канала без помех

2. Теорема Шеннона для канала с помехами

3. Значение результатов Шеннона для задач передачи, хранения и поиска информации

4. Современные технические средства передачи информации

Часть 1. Результаты Шеннона и проблемы кодирования

1. Теорема Шеннона для канала без помех

2. Теорема Шеннона для канала с помехами

3. Значение результатов Шеннона для задач передачи, хранения и поиска информации

4. Современные технические средства передачи информации

1. Теорема Шеннона для канала без помех

! Две фундаментальные теоремы идеального кодирования, носящие имя Шеннона:

первая из них рассматривает случай
отсутствия помех в канале,

вторая учитывает наличие помех,
приводящих к ошибкам.

Проблема согласования источника сообщений и канала при передаче сообщений. ?

1. Теорема Шеннона для канала без помех

Пусть:

- источник сообщений выдает сообщения с некоторой скоростью υ_u (сообщений/ед. времени),

  — техническая производительность источника.

- по каналу можно передавать без искажений сообщения со скоростью, не превышающей некоторую величину υ_k (сообщений/ед. времени),

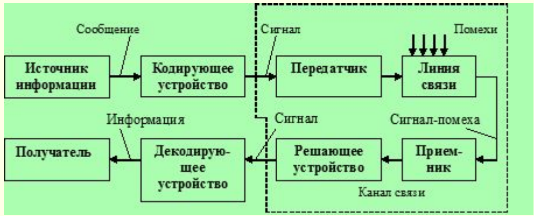
  — техническая пропускная способность канала.

1. Теорема Шеннона для канала без помех

Если выполняется условие

$$v_u < v_k,$$

то канал успевает передать все сообщения, поступающие на его вход от источника, и передача будет вестись без искажений.



Что произойдет, если $v_u > v_k$?

Можно ли в этом случае обеспечить передачу без искажений?

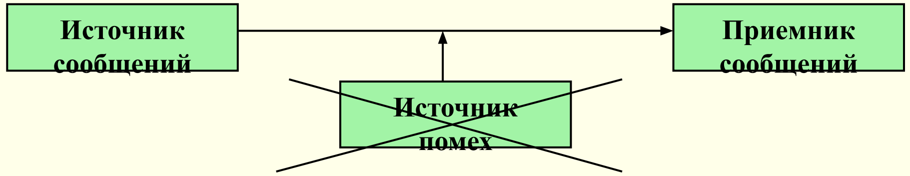
1. Теорема Шеннона для канала без помех

Можно ли в этом случае обеспечить передачу без искажений?

Если исходить только из технических характеристик, то, очевидно, нельзя.

А если учесть информационные характеристики?

Известно, что если последовательность обладает информационной избыточностью, то её можно сжать, применив методы экономного кодирования.



1. Теорема Шеннона для канала без помех

Let ξ – a discrete random variable with a probability distribution:

X	x_1	x_2	…	x_N
P	p_1	p_2	…	p_N

and $H(\xi)$ is information quantity.

Shannon formula:

$$H(\xi) = -\sum_{i=1}^{N} p_i \cdot \log_2 p_i$$

Hartly formula (for equidistributed random variable):

$$H(\xi) = \log_2 N$$

1) $0 \le H(\xi) \le \log_2 N$;

2) $N = 2, p_1 = p_2 = 0{,}5, H(\xi) = 1$;

3) $H(\xi,\eta) = H(\xi) + H(\eta)$,

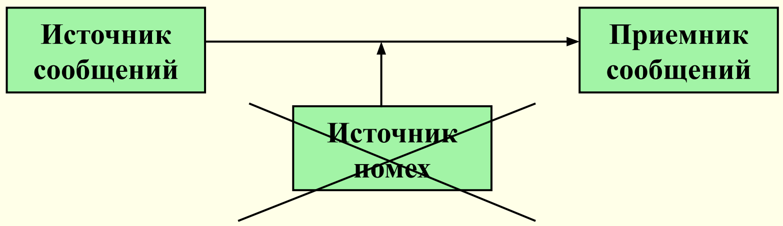
если ξ и η – независимы

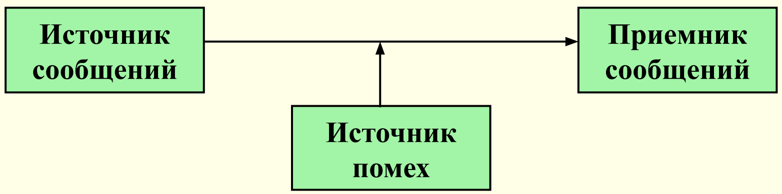
$$\rho = 1 - H(A) / \max H(A) = 1 - H(A) / \log_2 N$$

$$H(Y/X) = \sum_{i=1}^{N} \sum_{j=1}^{M} p(x_i y_j) \log_2 \frac{1}{p(y_j / x_i)}.$$

$$I(\xi,\eta) = H(\xi) - H_\eta(\xi).$$

1. Теорема Шеннона для канала без помех





$$dI(A)/dt = \upsilon_A H(A),$$
$$dl(B)/dt = \upsilon_B H(B),$$
$$C_k = \max_{\{p\}} dI(B)/dt, \quad где \quad \{p\} -$$

$$dI(A)/dt = \upsilon_A H(A),$$
$$dl(B)/dt = \upsilon_B I(X,Y),$$
$$C_k = \max_{\{p\}} \{dI(B)/dt\}, \quad где \quad \{p\} -$$

множество всех возможных распределений вероятностей входного алфавита символов канала

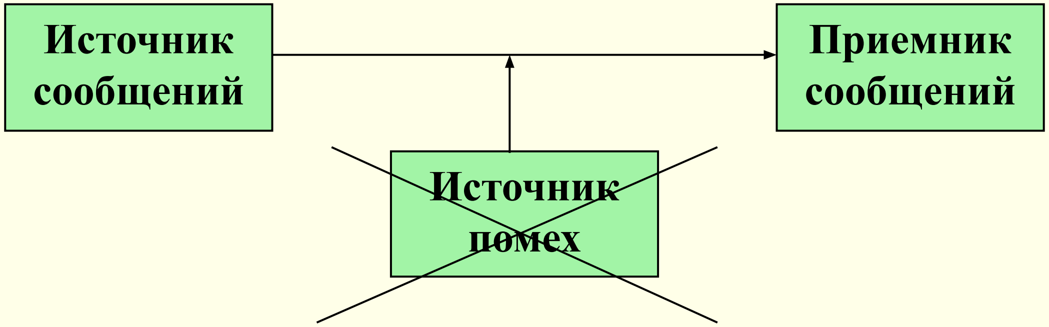
1. Теорема Шеннона для канала без помех

Пусть:

V_u – (информационная) производительность источника, т.е. количество информации, производимое источником в единицу времени;

C_k – (информационная) пропускная способность канала, т.е. максимальное количество информации, которое способен передать канал без искажений за единицу времени.

Первая теорема Шеннона утверждает, что безошибочная передача сообщений определяется соотношением V_u и C_k.



1. Теорема Шеннона для канала без помех

Первая теорема Шеннона: если пропускная способность канала без помех превышает производительность источника сообщений, т.е. удовлетворяется условие

$$C_k > V_u,$$

то существует способ кодирования и декодирования сообщений источника, обеспечивающий сколь угодно высокую надежность передачи сообщений. В противном случае, т.е. если

$$C_k < V_u$$

Такого способа нет.

1. Теорема Шеннона для канала без помех

Идеальное кодирование по Шеннону по существу представляет собой экономное кодирование последовательности сообщений при безграничном укрупнении сообщений. Такой способ кодирования характеризуется задержкой сообщений

$$\tau \rangle 2T,$$

поскольку кодирование очередной типичной последовательности может начаться только после получения последовательности источника длительностью *T*, а декодирование – только когда принята последовательность из канала той же длительности *T*.

1. Теорема Шеннона для канала без помех

Поскольку требуется $T \to \infty$, то идеальное кодирование требует бесконечной задержки передачи информации.

В этом причина технической нереализуемости идеального кодирования по Шеннону.

Тем не менее, значение этого результата, устанавливающего предельные соотношения информационных характеристик источника и канала для безошибочной передачи сообщений, весьма велико.

Исторически именно теорема Шеннона инициировала и определила развитие практических методов экономного кодирования.

Лекция № 6

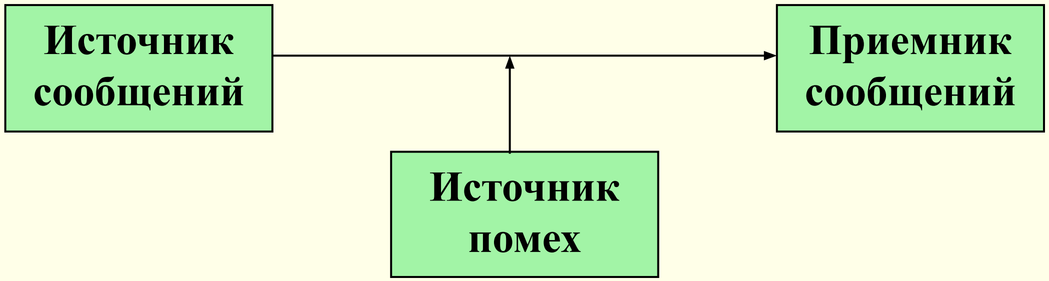
Часть 1. Результаты Шеннона и проблемы кодирования

1. Теорема Шеннона для канала без помех

2. Теорема Шеннона для канала с помехами

3. Значение результатов Шеннона для задач передачи, хранения и поиска информации

4. Современные технические средства передачи информации



2. Теорема Шеннона для канала с помехами

При отсутствии помех ошибки при передаче могут возникать только за счет неоднозначного кодирования сообщений.

Рассмотрим теперь ситуацию, когда в канале действуют помехи, вызывающие искажения передаваемых символов. Возникающие при этом ошибки носят случайный характер, они действуют при любой скорости передачи сообщений через канал, в том числе, когда

$$V_u < V_k.$$

2. Теорема Шеннона для канала с помехами

Возможен ли такой способ кодирования, при котором сообщения передаются через канал без ошибок с некоторой ненулевой скоростью $V_k \neq 0$ (действие ошибок полностью устраняется при кодировании)?

Методы помехоустойчивого кодирования основаны на введении избыточности.

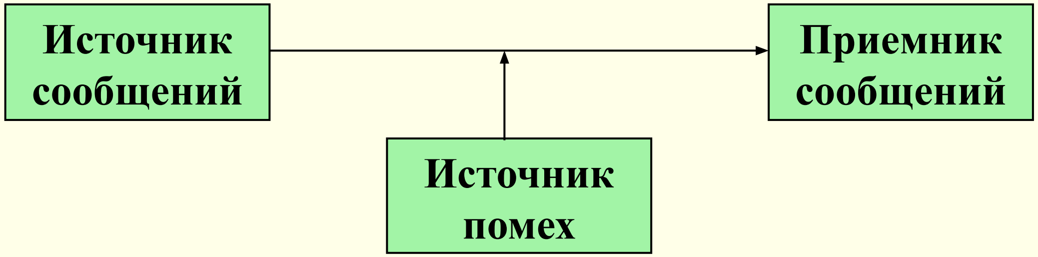
Для полного устранения ошибок их применение требует введения бесконечной избыточности.
Это может привести к снижению скорости передачи сообщений до нуля.

2. Теорема Шеннона для канала с помехами

Вторая теорема Шеннона утверждает, что такой способ возможен.

Тогда возникает следующий вопрос: чем определяется максимальная скорость передачи сообщений по каналу с помехами?

Оказывается, что, как и для канала без помех, она определяется соотношением информационных характеристик источника и канала.



2. Теорема Шеннона для канала с помехами

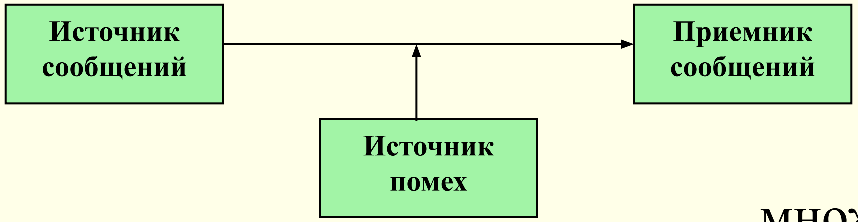
Вторая теорема Шеннона:

Для канала с помехами существует такой способ кодирования, при котором обеспечивается безошибочная передача всех сообщений источника, если только пропускная способность канала превышает производительность источника

$$C_k > V_u.$$

$$dI(A)/dt = \upsilon_A H(A),$$

$$C_k = \max_{\{p\}}\{dI(B)/dt\}, \quad где \ \{p\} -$$

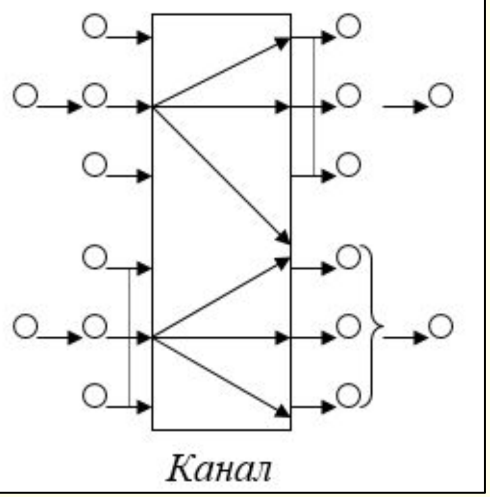


множество всех возможных распределений вероятностей входного алфавита символов канала

2. Теорема Шеннона для канала с помехами

Возникающая ситуация поясняется на рис. 1.

Рис. 1. Преобразование типичных последовательностей при передаче через канал с помехами.



На вход канала поступают типичные последовательности источника A_T.

Они кодируются последовательностями канала A_k^p, причем для этой цели используется только часть возможных последовательностей канала $A_к$.

Под действием помех входные последовательности изменяются и переходят в выходные последовательности канала $B_к$, вообще говоря, не совпадающие с переданными.

2. Теорема Шеннона для канала с помехами

Получив одну из последовательностей $B_к$ на выходе канала, мы должны принять решение относительно переданной последовательности.

Как это сделать?

Разобьем множество $B_к$ на непересекающиеся подмножества S_k так, чтобы каждой переданной последовательности соответствовало своё подмножество $S_{k..}$

При этом выберем подмножества так, чтобы для каждой входной последовательности вероятность попадания в своё подмножество была больше, чем в остальные.

Принимая последовательность на выходе, смотрим, к какому подмножеству она относится, и в соответствии с этим принимаем решение о переданной типичной последовательности.

2. Теорема Шеннона для канала с помехами

Очевидно, что при этом велика вероятность правильно определить переданную последовательность, однако, возможны и ошибки.

Ошибка возникает, если входная последовательность перейдет в несоответствующее ей множество S_k (на рис. 1 показан этот случай).

Передача будет всегда безошибочной, если удастся так выбрать входные последовательности канала A_k^p и разбиение S_k, что переходы в несоответствующие подмножества будут невозможны или, по крайней мере, будут иметь сколь угодно малую вероятность для больших T.

Возможна ли такая ситуация?

Оказывается возможна.

2. Теорема Шеннона для канала с помехами

Теорема Шеннона для канала с помехами не указывает конкретного способа кодирования, обеспечивающего достоверную передачу информации со скоростью сколь угодно близкой к пропускной способности канала, а лишь указывает на принципиальное существование такого способа.

Кроме того, как и в первой теореме, кодирование будет сопровождаться задержкой сообщений не менее $2T$, где $T \to \infty$.

Поэтому идеальное кодирование технически нереализуемо.

Однако из формулы для вероятности ошибки вытекает крайне важный практический вывод: *достоверность передачи сообщений тем выше, чем больше длительность кодируемой последовательности и чем менее эффективно используется пропускная способность канала, т.е. чем больше запас* $C_k - V_u$.

2. Теорема Шеннона для канала с помехами

Теорема Шеннона для канала с помехами оказала огромное влияние на становление правильных взглядов на возможности передачи сообщений и на разработку технически реализуемых методов помехоустойчивого кодирования.

Шеннон показал, что для безошибочной передачи сообщений вовсе не обязательно вводить бесконечную избыточность и уменьшать скорость передачи информации до нуля.

Достаточно ввести в сообщения источника такую избыточность, которая равна потерям количества информации в канале из-за действия помех.

Лекция № 6

Часть 1. Результаты Шеннона и проблемы кодирования

1. Теорема Шеннона для канала без помех

2. Теорема Шеннона для канала с помехами

3. Значение результатов Шеннона для задач передачи, хранения и поиска информации

4. Современные технические средства передачи информации

3. Значение результатов Шеннона для задач передачи, хранения и поиска информации

Теоремы Шеннона и передача информации

Основное значение результатов Шеннона

дают универсальный критерий, позволяющий
сравнивать технически различные устройства и
системы с точки зрения их возможностей
по передаче информации.

Источники сообщений и каналы связи могут быть существенно разными устройствами по

- используемым сигналам,
- способам кодирования сообщений,
- форматам данных,
- скоростным характеристикам.

Теоремы идеального кодирования позволяют оценить, в какой степени технически различные системы соответствуют друг другу для решения задачи передачи сообщений.

Достаточно оценить информационные показатели: информационную производительность и информационную пропускную способность.

3. Значение результатов Шеннона для задач передачи, хранения и поиска информации

Соотношение информационных показателей и является той идеальной мерой, по которой можно судить о степени соответствия реальных систем.

Особая заслуга Шеннона
первым осознал действительную
картину влияния случайных
помех на процесс передачи сообщений.

Принципиальное действие помех выражается в той степени, в какой они влияют на информационные показатели системы.

Поэтому каналы с одинаковой пропускной способностью эквивалентны по возможности безошибочной передачи сообщений не зависимо от того, действуют ли в них помехи или нет.

3. Значение результатов Шеннона

Наглядное пояснение роли теоремы Шеннона.

Пусть имеется трубопровод для доставки от источника некоторого жидкого продукта. Технические возможности трубопровода определяются количеством жидкости, которое можно передать по нему в единицу времени.

Производительность источника - количество чистого продукта, поступающего от него в единицу времени,
пропускная способность трубопровода – максимально возможная скорость передачи чистого продукта, соответствующая условию, что от источника поступает чистый продукт без примесей.

Аналог канала с помехами - трубопровод с утечкой.

Пропускная его способность будет меньше, чем в трубопроводе без утечки на величину утечки продукта за единицу времени.

3. Значение результатов Шеннона

Можно теперь представить, какой эффект вызвало бы утверждение

существует такой способ введения примеси («избыточности») в продукт, при котором, введя количество примеси, равное утечке в трубопроводе, можно по нему доставлять продукт без потерь со скоростью, отвечающей пропускной способности трубопровода с утечкой.

Такой смысл имеет теорема Шеннона применительно к задаче передачи информации.

Продолжая аналогию этого примера, можно сказать,

такой способ введения примеси требует наличия некоего «отстойника», в котором примесь будет отстаиваться в течении определенного времени перед подачей в трубопровод (в идеале – бесконечное время).

После такого «отстоя» при движении жидкости по трубопроводу в утечку будет уходить только примесь.

3. Значение результатов Шеннона

Интерпретация результатов Шеннона для задач хранения и поиска информации.
Результаты теорем Шеннона, традиционно формулируемые для задачи передачи сообщений, легко распространяются на задачи хранения и поиска информации.

Рассмотрим задачу хранения данных в следующей обобщенной форме.
Пусть данные в виде последовательности записей размещаются в ячейках запоминающего устройства (ЗУ); каждая запись помещается в отдельную ячейку.

Записи, предназначенные для хранения, характеризуются некоторой совокупностью технических особенностей: размерами, способами кодирования данных, форматами кодов и т.п.

Ячейки ЗУ, в которых размещаются записи, также характеризуются некоторой совокупностью своих технических особенностей: внутренним представлением данных, способом доступа, системой меток и рядом технических ограничений на процесс размещения данных.

Кроме того, информация, размещаемая в ячейках ЗУ, может подвергаться воздействию помех, из-за чего в записях появляются ошибки.

3. Значение результатов Шеннона

При каких условиях возможно достоверное хранение информации, т.е. получение из ЗУ данных в том виде, в каком они были туда помещены?

Для ответа на этот вопрос в соответствии с шенноновским подходом необходимо перейти от технических характеристик к информационным:

– для запоминаемых данных определить среднюю энтропию записи;
– для ЗУ определить максимальное количество информации, которое может быть размещено в ячейке с учетом ее технических ограничений и действующих в ней помех, то есть определить информационную емкость ячейки.

Тогда для информационных пользователей будет справедлива следующая формулировка <u>теоремы Шеннона</u> для задачи хранения информации: для запоминающего устройства (с помехами и без помех) существует способ сколь угодно достоверного кодирования и декодирования хранимых данных, если только средняя энтропия записи меньше информационной емкости ячейки.

3. Значение результатов Шеннона

Если рассмотреть применение идеального кодирования к задаче хранения информации, то станет ясно, что для этого потребуется ЗУ с потенциально бесконечным числом ячеек, чтобы разместить в нем типичные последовательности записей сколь угодно большой длины. В этом проявляется техническая нереализуемость идеального кодирования применительно к задаче хранения информации.

К идеальному результату можно приблизиться, укрупняя хранимые записи. На практике в устройствах хранения данных для ЭВМ (например, в накопителях на магнитных лентах и дисках) широко применятся так называемое блокирование записей. При этом группы записей объединяются в блоки, которые размещаются в ЗУ как некоторые единые укрупненные записи. Этим достигается более экономное использование информационной емкости ячеек.

Практическая реализация помехоустойчивого хранения информации основана на методах помехоустойчивого кодирования. Перед помещением записей в ЗУ искусственно увеличивается их избыточность за счет введения дополнительных контрольных символов. После считывания записей из ЗУ производится обнаружение и коррекция ошибок.

3. Значение результатов Шеннона

Рассмотрим теперь задачу поиска в следующей обобщенной форме. Пусть имеется файл, записи которого идентифицируются ключами. Множество запросов записей образуют последовательность аргументов поиска. Знания ключей и аргументов поиска могут подвергаться искажением из-за действия случайных помех при формировании файла и при подготовке запросов.

Возникает вопрос, при каких условиях возможен достоверный поиск информации, т.е. получение на каждый запрос именно тех записей которые требуются.

В соответствии с шенноновским подходом перейдем к информационным характеристикам:
– для последовательностей аргументов поиска определим среднюю энтропию аргументов. Если на аргументы действуют ошибки, то необходимо учесть увеличение средней энтропии вследствие ошибок;
– для множества записей файла определим информационную емкость ключа – максимальное количество информации, которое может содержаться в ключе файла. Если ключи файла могут содержать случайные ошибки, то необходимо учесть уменьшение информационной емкости ключа вследствие ошибок.

3. Значение результатов Шеннона

Тогда для информационных показателей будет справедлива следующая формулировка теоремы Шеннона для задачи поиска информации:

Для поиска в файле (с помехами и без помех) существует способ сколь угодно достоверного поиска нужных записей, если только средняя энтропия аргумента меньше информационной емкости ключа.

Применение алгоритма идеального кодирования в данной задаче потребует потенциально бесконечного укрупнения файла, чтобы производить поиск в качестве аргумента выступают типичные последовательности исходных аргументов. В этом проявляется техническая нереализуемость идеального кодирования применительно к задаче поиска информации.

Как упоминалось во второй главе, разработка технически реализуемых способов помехоустойчивого поиска в настоящее время находится в зачаточном состоянии своего развития. Имеющиеся здесь результаты существенно скромнее, чем, например, в помехоустойчивом кодировании, где создана обширная и глубокая математическая теория кодирования. В чем здесь дело? Почему бы не воспользоваться результатами теории кодирования для решения родственной задачи поиска.

3. Значение результатов Шеннона

Основная идея помехоустойчивого кодирования состоит в искусственном введении избыточности в сообщения по подачи их в канал с помехами.

В большинстве задач поиска мы имеем дело с естественной избыточностью сообщений, на которую мы не можем активно воздействовать.

Мы получаем уже искаженный аргумент поиска, например, невнятно произнесенную по телефону фамилию клиента, и можем рассчитывать только на естественную избыточность языка (естественная избыточность русского языка, как и большинства европейских языков, оставляет примерно 60 %).

Однако, учитывая принципиальную разрешимость этой задачи в свете результатов Шеннона, а также последние публикации по проблемам помехоустойчивого поиска можно надеяться, что эта проблема будет решена и технически.

Лекция № 6

Часть 1. Результаты Шеннона и проблемы кодирования

1. Теорема Шеннона для канала без помех

2. Теорема Шеннона для канала с помехами

3. Значение результатов Шеннона для задач передачи, хранения и поиска информации

4. Современные технические средства передачи информации

4. Современные технические средства передачи информации

Передатчик – устройство, являющееся источником данных.
Приемник – устройство, принимающее данные.

Компьютер, терминал или какое-либо цифровое устройство.

Сообщение – цифровые данные определённого формата, предназначенные для передачи.

Файл базы данных, таблица, ответ на запрос, текст или изображение.

Средства передачи – физически передающая среда и специальная аппаратура, обеспечивающая передачу сообщений

Мультиплексор передачи данных – устройство сопряжения ЭВМ с несколькими каналами связи.

Модем – устройство, выполняющее модуляцию и демодуляцию информационных сигналов при передаче их из ЭВМ в канал связи и при приеме в ЭВМ из канала связи.

Концентратор – устройство, коммутирующее несколько каналов связи на один путем частотного разделения.

Повторитель – устройство, обеспечивающее сохранение формы и амплитуды сигнала при передаче его на большее, чем предусмотрено данным типом физической передающей сред, расстояние (в ЛВС).

Лекция № 6

Часть 2. Эффективное кодирование

1. Сжатие данных

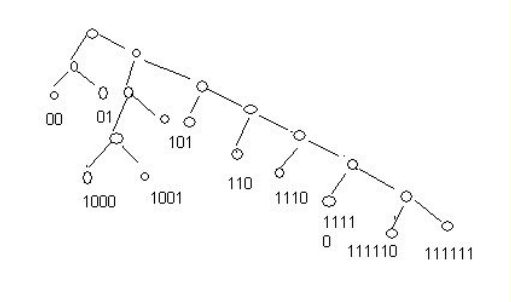
2. Сжатие на основе статистических свойств данных

   2.1. Коды с переменной длиной кодового слова

   2.2. Вероятностная модель кодируемых сообщений

   2.3. Минимизация средней длины кодового слова

$$L = \sum_{i=1}^{N} p_i l_i$$



Часть 2. Эффективное кодирование

1. **Сжатие данных**

2. Сжатие на основе статистических свойств данных

2.1. Коды с переменной длиной кодового слова

2.2. Вероятностная модель кодируемых сообщений

2.3. Минимизация средней длины кодового слова

1. Сжатие данных

Закодированные сообщения

- передаются по каналам связи,
- хранятся в запоминающих устройствах,
- обрабатываются процессором.

Большой объем данных!!!

Важно обеспечить такое кодирование данных, которое характеризуется минимальной длиной получающихся сообщений. Эта проблема сжатия данных.

Решение её обеспечивает:

- увеличение скорости передачи информации
- уменьшение требуемой памяти запоминающих устройств.

Повышение эффективности системы обработки данных.

1. Сжатие данных

Существует два подхода (или два этапа) сжатия данных:

– сжатие, основанное на анализе конкретной структуры и смыслового содержания данных;

– сжатие, основанное на анализе статистических свойств кодируемых сообщений.

Второй подход носит универсальный характер и может использоваться во всех ситуациях, где есть основания полагать, что сообщения подчиняются вероятностным законам.

1. Сжатие данных

Сжатие на основе смыслового содержания данных

Эти методы носят эвристический, уникальный характер, однако основную идею можно пояснить следующим образом.

Пусть множество содержит $N = 2^k$ элементов. Тогда для кодирования элементов множества равномерным кодом потребуется $k = \log_2 N$ двоичных знаков. При этом будут использованы все двоичные кодовые комбинации.

Если используются не все комбинации, код будет избыточным.

Таким образом, для сокращения избыточности следует попытаться очертить множество возможных значений элементов данных и с учетом этого произвести кодирование.

В реальных условиях это не всегда просто, некоторые виды данных имеют очень большую мощность множества возможных значений.

Посмотрим, как же поступают в конкретных случаях.

1. Сжатие данных

Переход от естественных обозначений к более компактным.

Значения многих конкретных данных кодируются в виде, удобном для чтения человеком. Они содержат обычно больше символов, чем это необходимо.

Пример:

Запись даты: «26 января 1982 г.», «26.01.82».

При этом многие кодовые комбинации, например «33.18.53» или «95.00.11», никогда не используются.

Для сжатия таких данных

день – 5 разрядов, месяц – 4, год – 7,

т.е. вся дата займет не более двух байтов.

Другой способ записи даты (предложен в средние века)

общее число дней, прошедших к настоящему времени с некоторой точки отсчета. При этом часто ограничиваются четырьмя последними цифрами этого представления.

Например, 24 мая 1967 года записывается в виде 0000 и отсчет дней от этой даты требует, очевидно, два байта в упакованном десятичном формате.

Аналогичным образом могут быть сжаты номера изделий, уличные адреса и т.п.

1. Сжатие данных

Подавление повторяющихся символов.

Во многих данных часто присутствуют повторяющиеся подряд символы: в числовых – повторяющиеся старшие или младшие нули, в символьных – пробелы и т.п.

Если воспользоваться специальным символом указывающим на повторение, а после него помещать в закодированном виде число повторений, то можно уменьшить избыточность.

Эффективность такого метода определяется числом и размерами участков повторяющихся символов.

1. Сжатие данных

Кодирование часто используемых элементов.

Некоторые данные принадлежат множеству возможных значений очень большого размера.

Однако в большинстве случаев используется лишь малая часть возможных значений

Правило «90/10»
(в девяноста процентах случаев используется 10 процентов возможных значений).

Можно экономно закодировать часто используемые элементы множеств и использовать эти коды вместо обычного представления.

Пример

имена людей - 1 байт (256 возможных кодовых комбинаций)

Можно использовать первый разряд как признак пола, тогда
128 женских и 128 мужских имен.

1. Сжатие данных

Кодирование часто используемых элементов.

Как обеспечить возможность записи имен, не входящих в закодированные?

Для этого можно, например, условиться, что некоторая специальная кодовая комбинация длиной в один байт означает, что последующие байты содержат полное написание имени в обычном коде.

Аналогично можно кодировать наиболее распространенные фамилии (для этого могут понадобиться 2-байтовые коды).

Многие сообщения и файлы содержат текстовые фрагменты из некоторых областей знаний. В таких текстах можно выделить множество наиболее употребительных слов, пронумеровать их и закодировать по вышеизложенному способу.

1. Сжатие данных

Контекстное сжатие данных.

В упорядоченных наборах данных часто совпадают
начальные символы или
группы начальных символов записей.
Можно кодировать данные, рассматривая их в контексте с предыдущими.

В этом случае сжимаемым элементам данных может предшествовать специальная кодовая комбинация, характеризующая тип сжатия.

Например, возможны комбинации, указывающие на то, что:
– *элемент данных совпадает с предыдущим;*
– *элемент данных имеет следующее по порядку значение;*
– *элемент совпадает с предыдущим кроме последнего символа;*
– *элемент совпадает с предыдущим кроме двух (трех, четырех и т.д.) последних символов;*
– *элемент длиной l байтов не имеет связи с предыдущим.*

При использовании подобных контекстных символов закодированные данные содержат только отличия текущих элементов от предыдущих.

1. Сжатие данных

Реализация сжатия данных требует специальных или (и) программных затрат, а также затрат памяти на предварительное кодирование с целью сжатия данных и последующее декодирование для восстановления первоначальной формы данных.

Сжатие данных – не всегда целесообразное мероприятие.

Например, в базах данных обычно сжимаются архивные файлы с невысокой частотой использования.

Сжатие применяется для сокращения размеров индексных таблиц, используемых для организации поиска информации в индексных файлах.

Лекция № 6

Часть 2. Эффективное кодирование

1. Сжатие данных

2. Сжатие на основе статистических свойств данных

   2.1. Коды с переменной длиной кодового слова

   2.2. Вероятностная модель кодируемых сообщений

   2.3. Минимизация средней длины кодового слова

2. Сжатие на основе статистических свойств данных

Теория экономного или эффективного кодирования

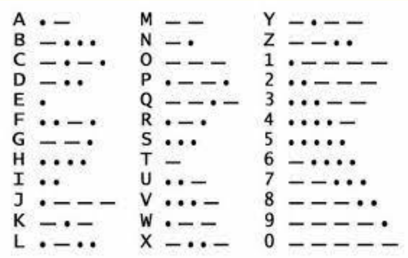
Универсальный метод, позволяющий сжимать данные, отвлекаясь от их смысла (семантики), основываясь только на **их статистических свойствах.**

2.1. Коды с переменной длиной кодового слова (1)

Равномерные коды:

Кодовое слово всегда содержит одинаковое число знаков.

Давно известны коды, длина кодового слова которых не постоянна.



<u>*Пример 1: код Морзе.*</u>

Задача - выделить отдельные кодовые слова из закодированной последовательности для однозначного декодирования сообщений.

<u>*Пример 2: Код Морзе. Специальная кодовая комбинация – разделитель (тройная пауза).*</u>

2. Сжатие на основе статистических свойств данных

2.1. Коды с переменной длиной кодового слова (2)

Префиксные коды:

Условие префиксности кода (условие Фано): никакое кодовое слово не должно являться началом другого кодового слова.

Гарантирует однозначное расчленение на кодовые слова без применения разделителей.

Очередное кодовое слово получается последовательным считыванием знаков до тех пор, пока получающаяся комбинация не совпадает с одним из кодовых слов.

2.1. Коды с переменной длиной кодового слова (3)

Пример 3: Рассмотрим множество сообщений (0,1, ...,9). Закодируем сообщения наборами двоичных знаков:

0-00	2-1000	4-101	6-1110	8-111110
1-01	3-1001	5-110	7-11110	9-111111

Это префиксный код.

Если кодовые слова записать без пробелов одно за другим в произвольной последовательности (кодовое слово может встречаться в тексте любое число раз), то полученный набор знаков можно разбить на кодовые слова одним и только одним способом (однозначное декодирование).

Пример 4: Определить зашифрованное слово:

0111110001001100000100001

допускает лишь одно разбиение на кодовые слова

01_11110_00_1001_1000_00_1000_01

и соответствует исходной последовательности сообщений 17032022.

2.1. Коды с переменной длиной кодового слова (4)

Префиксный код называется **примитивным**, если его нельзя сократить, т.е. при вычеркивании любого знака хотя бы в одном кодовом слове код перестает быть префиксным.

Нетрудно видеть, что если код *префиксный* и мы выбрали любой набор из нулей и единиц, не входящий в число кодовых слов, то возможно одно из двух:

- либо не существует кодового слова, начальный отрезок которого совпадает с нашим набором,

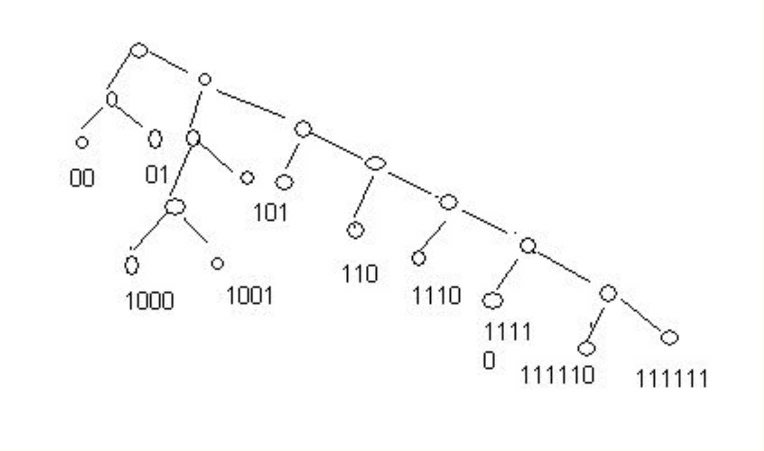
- либо (если такое кодовое слово существует), приписав к концу нашего набора нуль или единицу, мы получим какое-то кодовое слово или начальный отрезок кодового слова.

2.1. Коды с переменной длиной кодового слова (5)

Двоичное кодирование удобно представлять в виде бинарного кодового дерева.

Если сопоставлять левой ветви нуль, а правой – единицу, то каждой свободной вершине дерева будет однозначно соответствовать некоторый набор двоичных знаков, показывающий, в какой последовательности нужно сворачивать направо и налево, добираясь до этой вершины из корня дерева.

Рассмотренному в примере 3 коду соответствует дерево:



0-00	5-110
1-01	6-1110
2-1000	7-11110
3-1001	8-111110
4-101	9-111111

Таким образом, свободной вершине кодового дерева ставится в соответствие определенное кодовое слово.

2.1. Коды с переменной длиной кодового слова (5)

Полезна следующая интерпретация процесса двоичного кодирования.

На каждом шаге движения по кодовому дереву от корня к свободным вершинам происходит выбор одного из двух поддеревьев: правого и левого.

Это соответствует разбиению множества сообщений на два подмножества (правое и левое) с присвоением им очередных двоичных знаков (единицы и нуля).

Так, в рассмотренном примере 3 исходное множество (0, 1,…,9) было разбито на два подмножества (0,1) и (2,3,…,9). При дальнейшем движении вправо множество (2,3,…,9) в свою очередь было разбито на два подмножества (2,3,4) и (5,6,…,9), а при движении влево множество (0,1) было разбито на два подмножества (0) и (1) и т.д. до тех пор, пока во всех подмножествах не осталось по одному элементу.

Таким образом, кодовые комбинации характеризуют «историю» последовательного разбиения исходного множества сообщений на правые и левые подмножества.

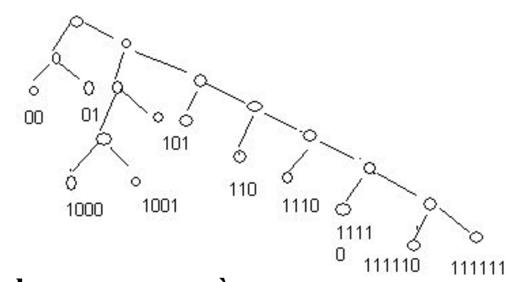


Рис. 2. Кодовое дерево примитивного префиксного кода`

2.2. Вероятностная модель кодируемых сообщений

Пусть последовательность, которую нужно закодировать, составлена из сообщений, принадлежащих некоторому конечному множеству $\{S_1, S_2 \dots S_N\}$ с известным числом элементов N.

Появление сообщений в последовательности носит вероятностный характер, т.е. каждому сообщению S_i (I=1,2…N) можно поставить в соответствие вероятность p_i его появления ($\sum_{i-1}^{N} p_i = 1$ – условие нормировки).

Сообщения кодируются последовательности двоичных знаков (0 и 1).

В качестве критерия экономности кода выступает средняя длина кодового слова, необходимая для кодирования одного сообщения.

Средняя длина кодового слова определяется следующим образом:

$$L = \sum_{i=1}^{N} p_i l_i$$

где l_i – длина кодового слова для кодирования i-го сообщения
p_i - вероятность появления i-го сообщения.

2.3. Минимизация средней длины кодового слова

Идея использования кодов переменной длины:

- сообщения с большей вероятностью появления ----> кодовые комбинации меньшей длины;

- сообщения с малой вероятностью появления ----> словами большей длины.

Пример 5: Пусть множество сообщений (0,1,…,9) характеризуется вероятностями появлений (1/55,2/55, …,10/55).

Можно предложить следующий префиксный код:

Сообщение	Вероятность	Код	Сообщение	Вероятность	Код
0	1/55	111111	5	6/55	1000
1	2/55	111110	6	7/55	110
2	3/55	11110	7	8/55	101
3	4/55	1110	8	9/55	01
4	5/55	1001	9	10/55	00

2.3. Минимизация средней длины кодового слова

Средняя длина кодового слова для этого кода

$$L=6(1/55=2/55)+5(3/55)+4(4/55+5/55+6/55)+3(7/55+8/55)+2(9/55+10/55)=$$

3.2 **бит/сообщение**

При кодировании равномерным кодом, потребовались бы кодовые слова, содержащие не менее

$L=[log_2 10]+1 =$ ***4*** **бит/сообщение**

([…] означает округление до меньшего целого).

При использовании неравномерного кода экономичность кода увеличивается.

Возникает вопрос, как выбрать кодовые слова, чтобы для заданных вероятностей $p_{1,}p_{2,\ldots.}p_N$ обеспечить по возможности меньшую среднюю длину кодового слова?

Заключение!!!

Лекция № 6

Часть 1. Результаты Шеннона и проблемы кодирования

1. Теорема Шеннона для канала без помех
2. Теорема Шеннона для канала с помехами
3. Значение результатов Шеннона для задач передачи, хранения и поиска информации
4. Современные технические средства передачи информации

Часть 2. Эффективное кодирование

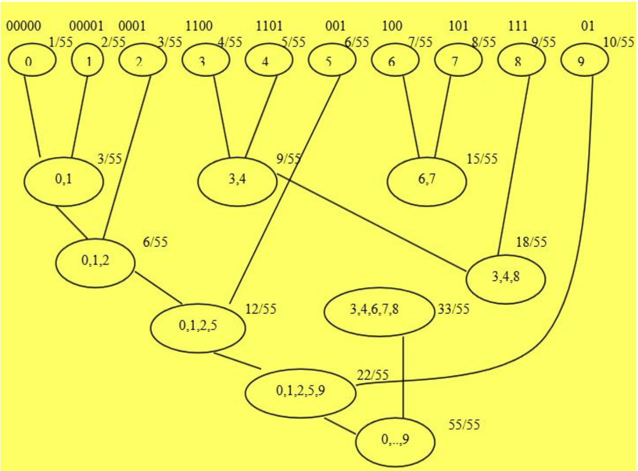
1. Сжатие данных
2. Сжатие на основе статистических свойств данных
   - 2.1. Коды с переменной длиной кодового слова
   - 2.2. Вероятностная модель кодируемых сообщений
   - 2.3. Минимизация средней длины кодового слова

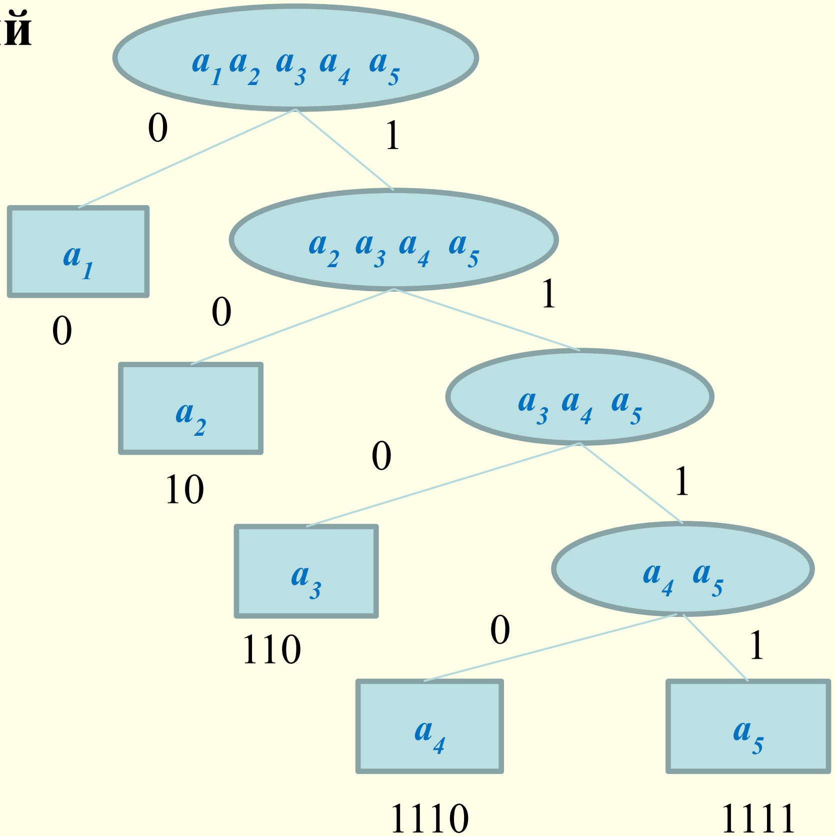
Лекция № 7

Эффективное кодирование (продолжение)

1. **Процедура Шеннона-Фано экономного кодирования**
2. **Процедура Хафмана экономного кодирования**
3. **Кодирование укрупненных сообщений**

$$L_{cp} \geq H(A)$$

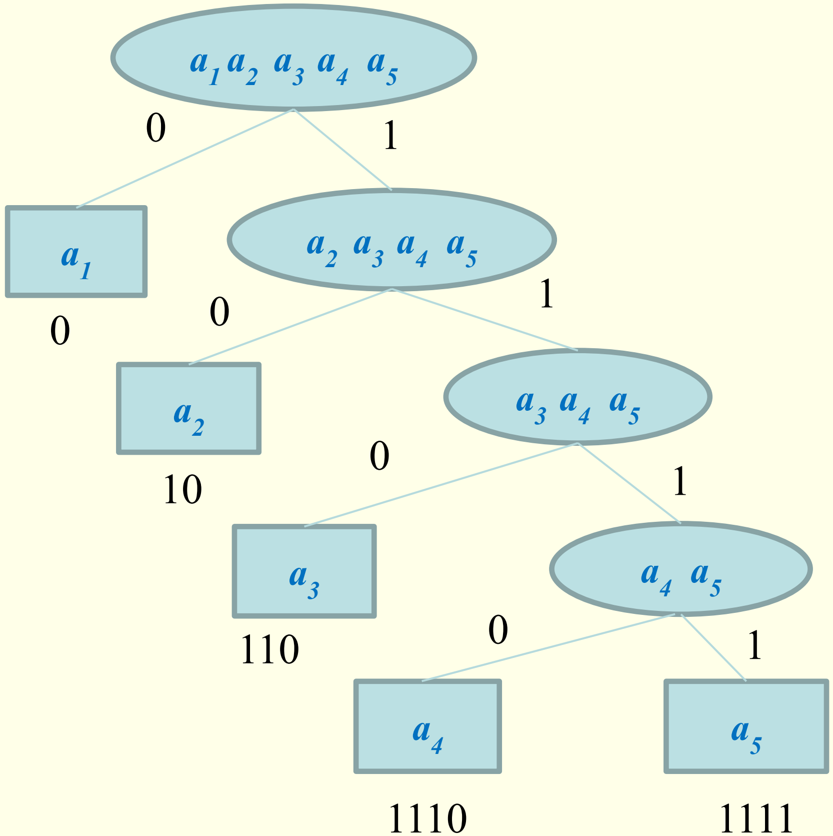




Эффективное кодирование (продолжение)

1. Процедура Шеннона-Фано экономного кодирования
2. Процедура Хафмана экономного кодирования
3. Кодирование укрупненных сообщений

$$L_{cp} \geq H(A)$$



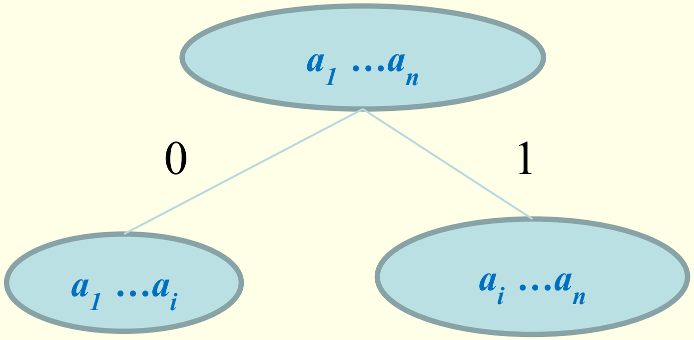
1. Процедура Шеннона-Фано экономного кодирования

При использовании неравномерного кода экономичность кода увеличивается.
Возникает вопрос, как выбрать кодовые слова, чтобы для заданных вероятностей $p_1, p_2, \ldots, p_N$ обеспечить по возможности меньшую среднюю длину кодового слова?

Идея (Шеннон-Фано)

1. Предварительно производится упорядочивание сообщений по убыванию (или возрастанию) вероятностей p_i.

2. На каждом шаге двоичного кодирования производится разбиение множества сообщений на два подмножества, причем одному из них приписывается единица, а другому – ноль.



Разбиения на множества производится путем выбора разделяющей границы в упорядоченной последовательности так, чтобы суммарные вероятности подмножеств были по возможности одинаковыми.

Таким образом, на каждом шаге производится кодирование подмножеств равномерным кодом длиной в 1 двоичный знак.

1. Процедура Шеннона-Фано экономного кодирования

Пример 1:

Задано множество сообщений $\{ s_1 s_2\ s_3\ s_4\ s_5 \}$

Распределение вероятностей $P_s = \{\frac{1}{16}, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{16}, \frac{1}{8}\}$

1. Упорядочим сообщения по степени убывания вероятностей

Получили множество сообщений $\{ a_1 a_2\ a_3\ a_4\ a_5 \}$

Распределение вероятностей $P_a = \{ \frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \frac{1}{16}, \frac{1}{16} \}$

Нетрудно заметить, что

$a_1 = s_2 \quad a_2 = s_3 \quad a_3 = s_5 \quad a_4 = s_1 \quad a_5 = s_5$

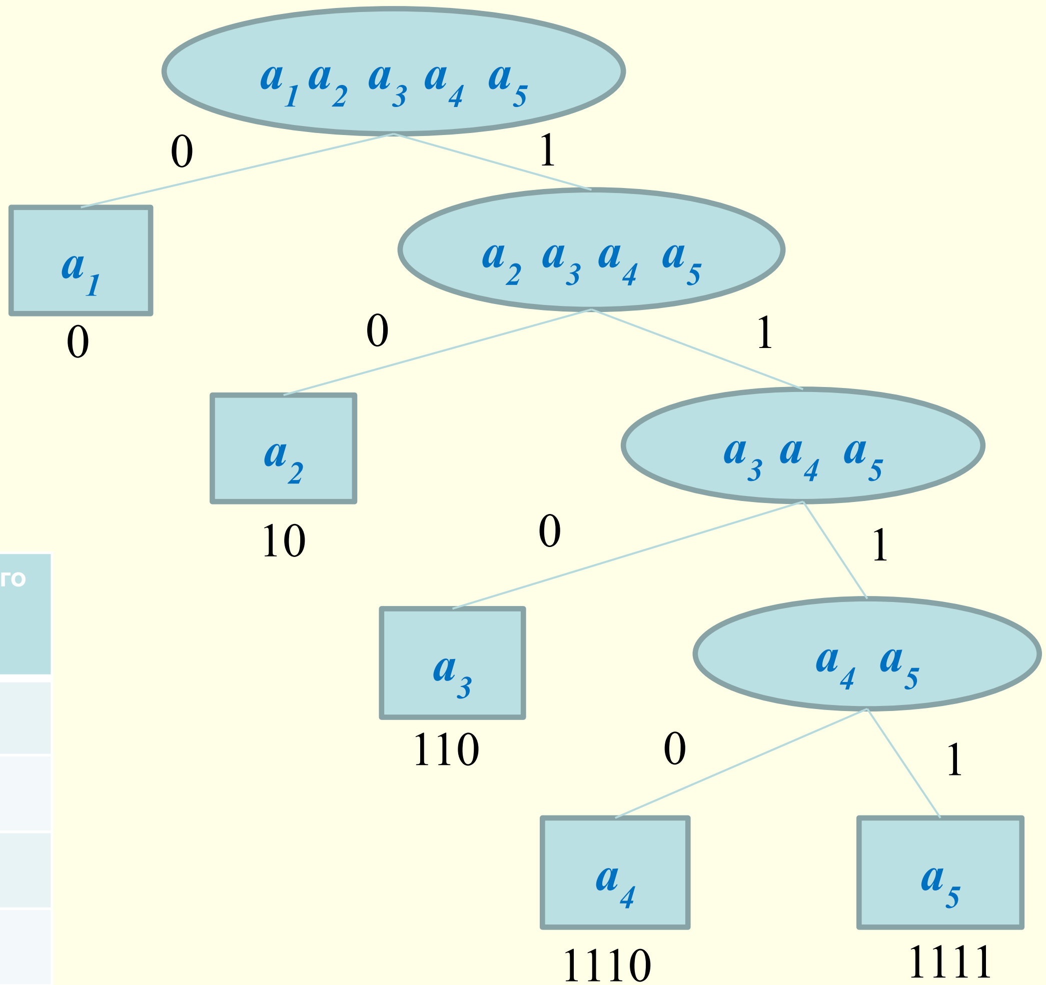
1. Процедура Шеннона-Фано экономного кодирования

2. Разбиваем на подмножества с одинаковыми суммарными вероятностями:

шаг 1 $\{a_1\}, \{a_2\ a_3\ a_4\ a_5\}$
шаг 2 $\{a_2\}, \{a_3\ a_4\ a_5\}$
шаг 3 $\{a_3\}, \{a_4\ a_5\}$
шаг 4 $\{a_4\}, \{a_5\}$

Символы	Вероят-ность появления	Кодовое слово	Длина кодового слова
a_1	1/2	0	1
a_2	1/4	10	2
a_3	1/8	110	3
a_4	1/16	1110	4
a_5	1/16	1111	4

Кодовое дерево



1. Процедура Шеннона-Фано экономного кодирования

3. Рассчитаем среднюю длину кодового слова

$$L_{cp} = \sum_{i=1}^{5} p_i l_i$$

$$L_{cp} = \frac{1}{2}\cdot 1 + \frac{1}{4}\cdot 2 + \frac{1}{8}\cdot 3 + 2\cdot\frac{1}{16}\cdot 4 = \frac{15}{8} = 1\frac{7}{8}$$

$$L_{cp} \geq H(A) \longleftarrow$$

Нижняя граница средней длины кодового слова

4. Рассчитаем энтропию

$$H(A) = \sum_{i=1}^{5} p_i \log\frac{1}{p_i}$$

$$H(A) = \frac{1}{2}\log 2 + \frac{1}{4}\log 4 + \frac{1}{8}\log 8 + 2\cdot\frac{1}{16}\log 16 = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \frac{3}{8} + \frac{1}{2} = 1\frac{7}{8}$$

5. Сравним среднюю длину кодового слова и энтропию

Вывод:

$$L_{cp} = H(A) \Rightarrow$$

Код эффективный

1. Процедура Шеннона-Фано экономного кодирования

Пример 2: Пусть множество сообщений (0,1,…,9) характеризуется вероятностями появлений (1/55,2/55, …,10/55).

(См. пример 5 из лекции 6)

Сообщение	Вероятность	Код	Сообщение	Вероятность	Код
0	1/55	111111	5	6/55	1000
1	2/55	111110	6	7/55	110
2	3/55	11110	7	8/55	101
3	4/55	1110	8	9/55	01
4	5/55	1001	9	10/55	00

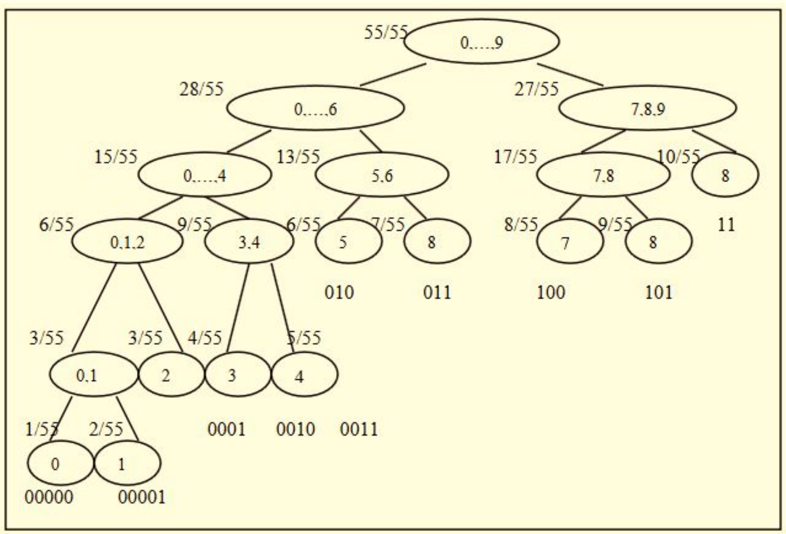


Рис. 1. Кодовое дерево, построенное процедурой Шеннона-Фано

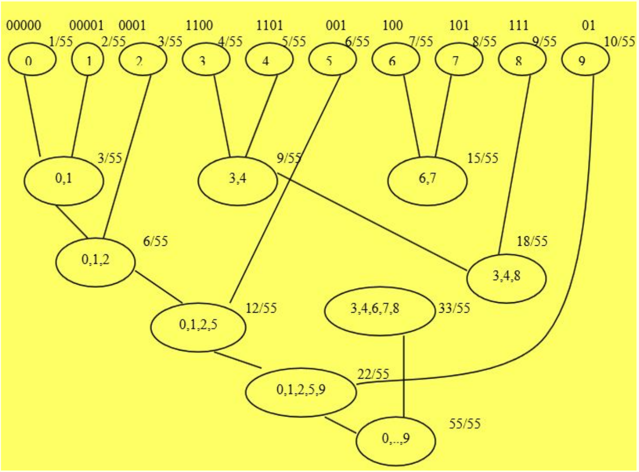
Средняя длина кодового слова
Lср=***3.2*** **бит/сообщение**
Для равномерного кода
L= ***4*** **бит/сообщение**

В вершины дерева записаны подмножества кодируемых сообщений, возле вершин – суммарные вероятности соответствующих подмножеств.

Средняя длина кодового слова
L ср=***3.145*** **бит/сообщение**

Эффективное кодирование (продолжение)

1. Процедура Шеннона-Фано экономного кодирования
2. Процедура Хафмана экономного кодирования
3. Кодирование укрупненных сообщений
4. Применение алгоритмов сжатия данных



2. Процедура Хафмана экономного кодирования

Процедура Шеннона-Фано - простой алгоритм построения экономного кода.

Это не всегда самый лучший из возможных алгоритмов.

Причина:

Ограничиваем способ разбиения тем, что вероятности событий, отнесенных к первому подмножеству, всегда больше (или всегда меньше) вероятностей событий, отнесенных ко второму подмножеству.

Оптимальный алгоритм, очевидно, должен учитывать все возможные комбинации событий при разбиении на равновероятные подмножества.

Это обеспечивается в **процедуре Хафмана** экономного кодирования.

2. Процедура Хафмана экономного кодирования

Процедура Хафмана

Рекурсивный алгоритм, стоящий бинарное кодовое дерево в обратную сторону, т.е. от конечных вершин к корню.

Конечные вершины - отдельные сообщения и их вероятности.

Корень - множество всех сообщений с суммарной вероятностью, равной единице.

Внутренние вершины - сгруппированные подмножества и их суммарные вероятности.

Рассмотрим задачу кодирования n сообщений $n \geq 2$

Пусть сообщение i имеет вероятность появления p_i

$$p_1 \leq p_2 \leq \cdots \leq p_n$$

2. Процедура Хафмана экономного кодирования

Рекурсивный алгоритм, стоящий бинарное кодовое дерево в обратную сторону, т.е. от конечных вершин к корню.

Основная идея алгоритма

1. На каждом шаге объединить два сообщения с наименьшими вероятностями в одно множество и далее решать задачу P_{n-1} с $n-1$ сообщениями и вероятностями $p_1 = p_1 + p_2, p_2 = p_3, \dots, p_{n-1} = p_n$.

2. На каждом шаге упорядочить вероятности по степени возрастания или убывания.

$$b_{i+1} = \{ a_k \} \, U \, \{ b_i \} \ , \mathrm{P}\,(b_{i+1}) = \mathrm{P}\,(a_k) + \mathrm{P}\,(b_i)$$

3. Построить кодовое дерево в обратном направлении.

2. Процедура Хафмана экономного кодирования

Пример 1:

Задано множество сообщений $\{\, s_1 s_2\ s_3\ s_4\ s_5 \}$

Распределение вероятностей $P_s = \{\frac{1}{16}, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{16}, \frac{1}{8}\}$

1. Упорядочим сообщения по степени убывания вероятностей

Получили множество сообщений $\{\, a_1 a_2\ a_3\ a_4\ a_5 \}$

Распределение вероятностей $P_a = \{\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \frac{1}{16}, \frac{1}{16}\}$

Нетрудно заметить, что

$a_1 = s_2 \quad a_2 = s_3 \quad a_3 = s_5 \quad a_4 = s_1 \quad a_5 = s_5$

2. Процедура Хафмана экономного кодирования

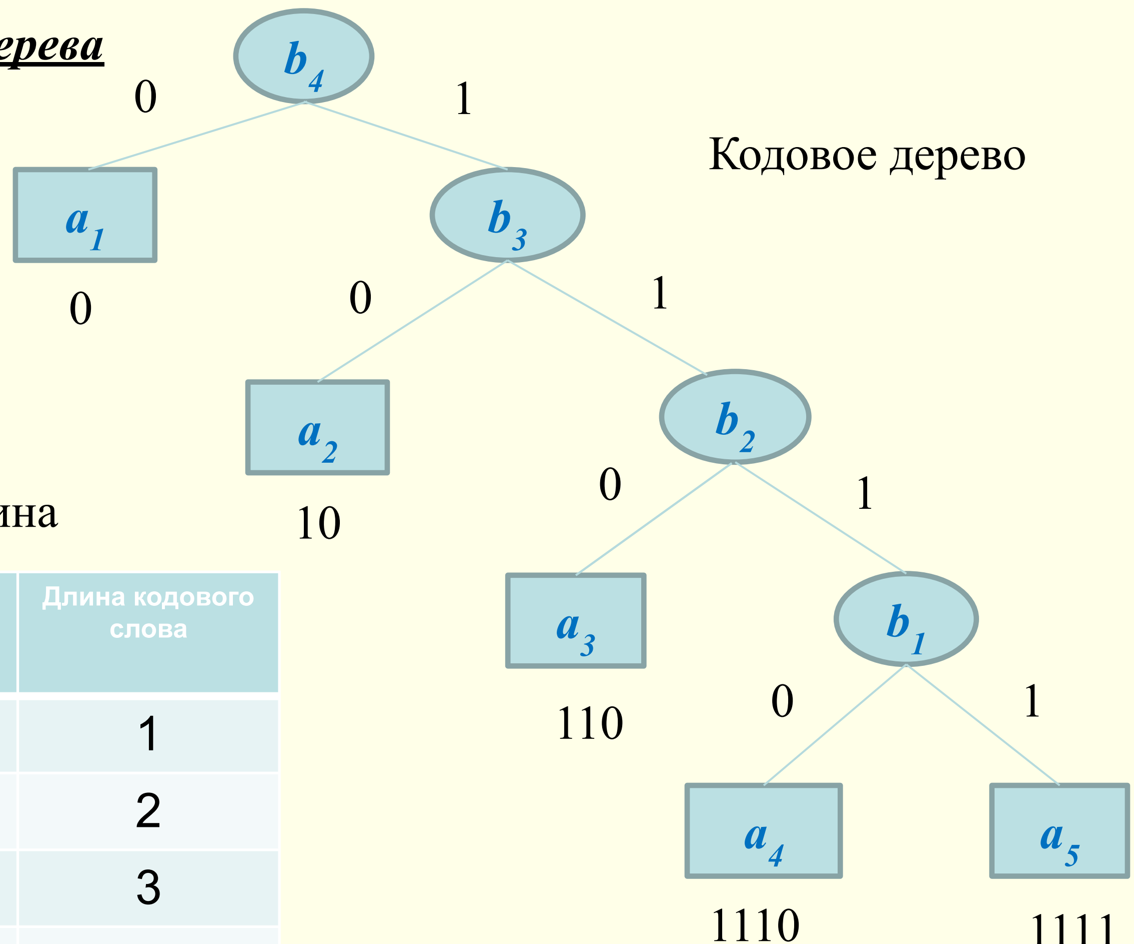
Процесс объединения сообщений с наименьшими вероятностями

a_1	a_1	a_1	a_1	$b_4\ (a_1 + b_3)$
a_2	a_2	a_2	$b_3\ (a_2 + b_2)$	
a_3	a_3	$b_2\ (a_3 + b_1)$		
a_4	$b_1\ (a_4 + a_5)$			
a_5				

Новым сообщениям приписывается суммарная вероятность.

2. Процедура Хафмана экономного кодирования

Построение кодового дерева



Кодовое дерево

Кодовые слова и их длина

Символы	Вероят-ность появления	Кодовое слово	Длина кодового слова
a_1	1/2	0	1
a_2	1/4	10	2
a_3	1/8	110	3
a_4	1/16	1110	4
a_5	1/16	1111	4

2. Процедура Хафмана экономного кодирования

3. Рассчитаем среднюю длину кодового слова

$$L_{cp}=\sum_{i=1}^{5} p_i l_i$$

$$L_{cp}=\frac{1}{2}\cdot 1+\frac{1}{4}\cdot 2+\frac{1}{8}\cdot 3+2\cdot\frac{1}{16}\cdot 4=\frac{15}{8}=1\frac{7}{8}$$

$$L_{cp}\geq H(A)$$

← Нижняя граница средней длины кодового слова

4. Рассчитаем энтропию

$$H(A)=\sum_{i=1}^{5} p_i \log\frac{1}{p_i}$$

$$H(A)=\frac{1}{2}\log 2+\frac{1}{4}\log 4+\frac{1}{8}\log 8+2\cdot\frac{1}{16}\log 16=\frac{1}{2}+\frac{1}{2}+\frac{3}{8}+\frac{1}{2}=1\frac{7}{8}$$

5. Сравним среднюю длину кодового слова и энтропию

Вывод: $L_{cp}=H(A)\Rightarrow$ **Код эффективный**

2. Процедура Хафмана экономного кодирования

Пример 2: Пусть множество сообщений (0,1,…,9) характеризуется вероятностями появлений (1/55,2/55, …,10/55).

(См. пример 5 из лекции 6)

Сообщение	Вероятность	Код	Сообщение	Вероятность	Код
0	1/55	111111	5	6/55	1000
1	2/55	111110	6	7/55	110
2	3/55	11110	7	8/55	101
3	4/55	1110	8	9/55	01
4	5/55	1001	9	10/55	00

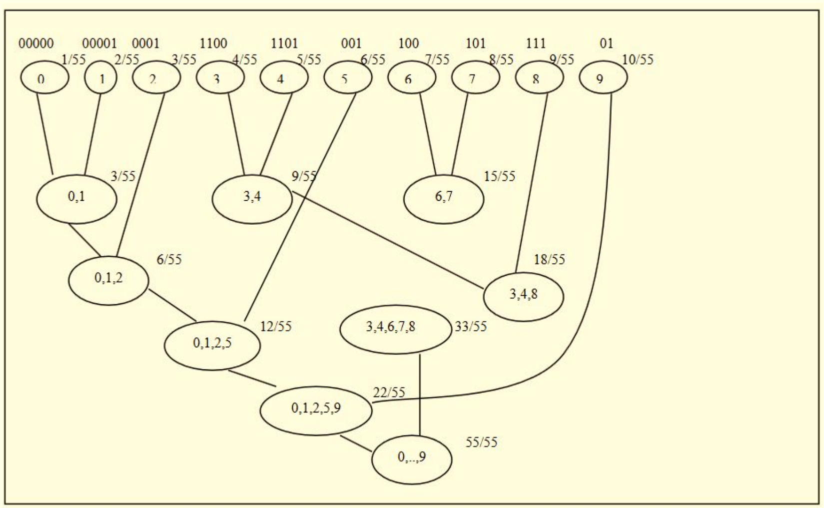


Рис. 1. Кодовое дерево, построенное процедурой Хафмана

Средняя длина кодового слова
Lср=***3.2*** **бит/сообщение**
Для равномерного кода
L= ***4*** **бит/сообщение**

Средняя длина кодового слова (код Хафмана)
L ср=***3.145*** **бит/сообщение**

Средняя длина кодового слова (код Шеннона-Фано)
L ср=***3.145*** **бит/сообщение**

Эффективное кодирование (продолжение)

1. Процедура Шеннона-Фано экономного кодирования
2. Процедура Хафмана экономного кодирования
3. Кодирование укрупненных сообщений

3. Кодирование укрупненных сообщений

<u>В рассмотренных экономных кодах</u>

каждому исходному сообщению (символу алфавита)
ставится в соответствие
кодовое слово (переменной длины).

Если кодировать не отдельные сообщения, а целые последовательности сообщений (например, всевозможные пары символов или всевозможные тройки символов и т.д.)?

Экономность кода можно повысить?

3. Кодирование укрупненных сообщений

Рассмотрим пример:

В исходном алфавите имеются лишь два различных символа (сообщения):

A и B с вероятностями появления 0.7 и 0.3 соответственно.

Кодирование исходного двухсимвольного алфавита тривиально, получается простейший равномерный код:

Символ:	Вероятность:	Кодовое слово:	Средняя длина кодового слова:
A	0.7	1	
B	0.3	0	1 бит/символ

3. Кодирование укрупненных сообщений

Применим экономное кодирование к всевозможным двухсимвольным комбинациям (символы появляются в последовательности независимо):

Символ:
AA
AB
BA
BB

Рассчитаем вероятности появления двухсимвольных комбинаций:

Символ:	Вероятность:
AA	0.49
AB	0.21
BA	0.21
BB	0.09

3. Кодирование укрупненных сообщений

Построим код Шеннона –Фано для этого двухсимвольного алфавита:

Символ:	Вероятность:	Кодовое слово:
AA	0.49	1
AB	0.21	01
BA	0.21	001
BB	0.09	000

Рассчитаем среднюю длину кодового слова на 1 символ:

Символ:	Вероятность:	Кодовое слово:	Средняя длина кодового слова:
AA	0.49	1	
AB	0.21	01	0.905 бит/исходный символ
BA	0.21	001	
BB	0.09	000	

Экономность кода повысилась:

0,905 < 1

3. Кодирование укрупненных сообщений

Еще лучше результаты дает кодирование трехсимвольных комбинаций.

Применим экономное кодирование к всевозможным трехсимвольным комбинациям (символы появляются в последовательности независимо):

Рассмотрим все трехсимвольные комбинации:

Символ:
AAA
AAB
ABA
BAA
ABB
BAB
BBA
BBB

Рассчитаем вероятности появления трехсимвольных комбинаций:

Символ:	Вероятность:
AAA	0.343
AAB	0.147
ABA	0.147
BAA	0.147
ABB	0.063
BAB	0.063
BBA	0.063
BBB	0.027

3. Кодирование укрупненных сообщений

Построим код Шеннона –Фано для этого трехсимвольного алфавита:

Символ:	Вероятность:	Кодовое слово:
AAA	0.343	11
AAB	0.147	10
ABA	0.147	011
BAA	0.147	010
ABB	0.063	0010
BAB	0.063	0011
BBA	0.063	0001
BBB	0.027	0000

Рассчитаем среднюю длину кодового слова на 1 символ:

Средняя длина кодового слова:

0.895 бит/исходный символ

Экономность кода повысилась:

$$0,895 < 0,905$$

$$0,905 < 1$$

3. Кодирование укрупненных сообщений

Дальнейшее укрупнение сообщений?

Средняя длина кодового слова уменьшается,
стремится к предельному значению,
приблизительно равному 0.881 бит/исходный символ.

Повышение экономности кода при укрупнении кодируемых сообщений достигается за счет того,

что при укрупнении увеличивается число кодируемых сообщений и ассортимент возможных значений вероятностей их появления.

За счет этого удается точнее подбирать приблизительно равновероятные подмножества сообщений на каждом шаге кодирования.

Для заданного множества исходных сообщений и вероятностей их появления имеется некоторый предел уменьшения средней длины кодового слова.

С практической точки зрения было бы весьма полезно уметь заранее вычислять этот предел (до построения экономного кода).

Заключение!!!

Лекция № 7

Эффективное кодирование (продолжение)

1. Процедура Шеннона-Фано экономного кодирования
2. Процедура Хафмана экономного кодирования
3. Кодирование укрупненных сообщений

$$L_{cp} \geq H(A)$$