Теория измерений и метрология

Тема: **Погрешности и неопределенности измерений**

С.В. Муравьев
e-mail: muravyov@tpu.ru

Томский политехнический университет

3

Практика

Интервальные оценки результатов измерений

- Расчет вероятностей с использованием функции Лапласа
- Доверительные интервалы

Расчет вероятностей с использованием функции Лапласа

Рассмотрены на лекции:

При помощи таблицы значений функции Лапласа можно непосредственно найти следующие вероятности:

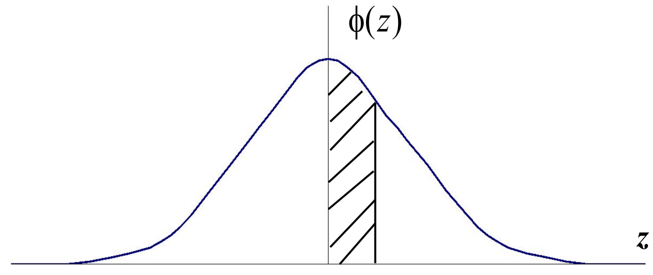


Рис. 1

$$P(0<z<0,5)=\Phi(0,5)=0{,}192 \text{ (Рис. 1)}$$
$$P(0<z<0,3)=\Phi(0,3)=0{,}118$$

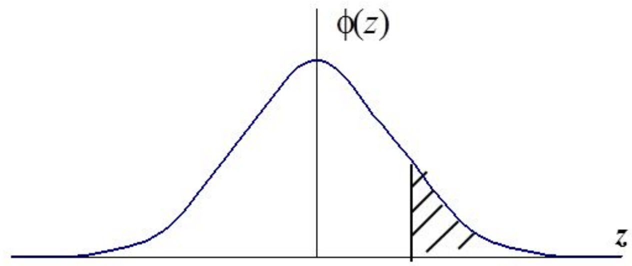


Рис. 2

Из симметричности графика плотности распределения вероятности следует, что

$$P(z>0)=P(z<0)=0,5.$$

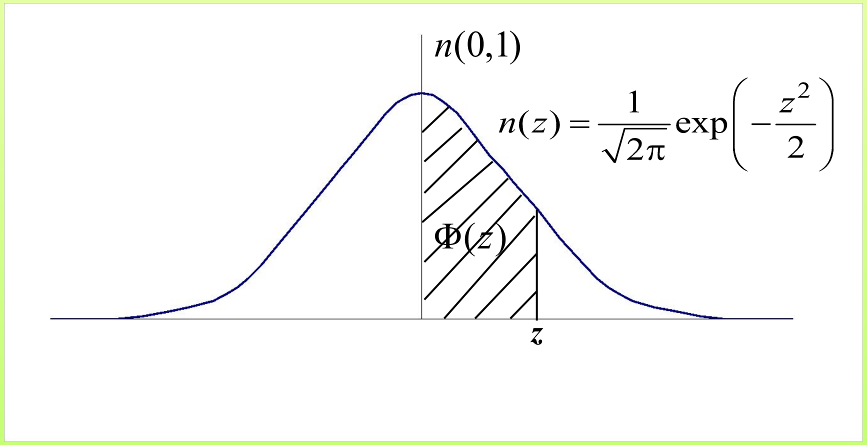
Поэтому (Рис. 2)

$$P(z>0,7)=0,5-P(0<z<0,7)=0,5-\Phi(0,7)=0,5-0,258=0,242$$
$$P(-0,4<z<0)=P(0<z<0,4)=\Phi(0,4)=0{,}155$$

Другие примеры:

$$P(0{,}1\le z\le 0,3)=P(-0,3\le z\le -0{,}1)=\Phi(0,3)-\Phi(0{,}1)=0{,}118-0,040=0,078\,;$$
$$P(-0{,}1\le z\le 0,3)=\Phi(0,3)+\Phi(0{,}1)=0{,}118+0,040=0{,}158\,.$$

Таблица значений функции Лапласа



z	$\Phi(z)$	z	$\Phi(z)$	z	$\Phi(z)$
0,1	0,040	1,1	0,364	2,1	0,482
0,2	0,079	1,2	0,385	2,2	0,486
0,3	0,118	1,3	0,403	2,3	0,489
0,4	0,155	1,4	0,419	2,4	0,492
0,5	0,192	1,5	0,433	2,5	0,494
0,6	0,226	1,6	0,445	2,6	0,495
0,7	0,258	1,7	0,455	2,7	0,497
0,8	0,288	1,8	0,464	2,8	0,497
0,9	0,316	1,9	0,471	2,9	0,498
1,0	0,341	2,0	0,477	3,0	0,499

Свойства функции Лапласа:

- $\Phi(0) = 0$;
- $\Phi(-z) = -\Phi(z)$;
- $\Phi(\infty) = 0{,}5$;

Задача 1

Найти такое число a, что

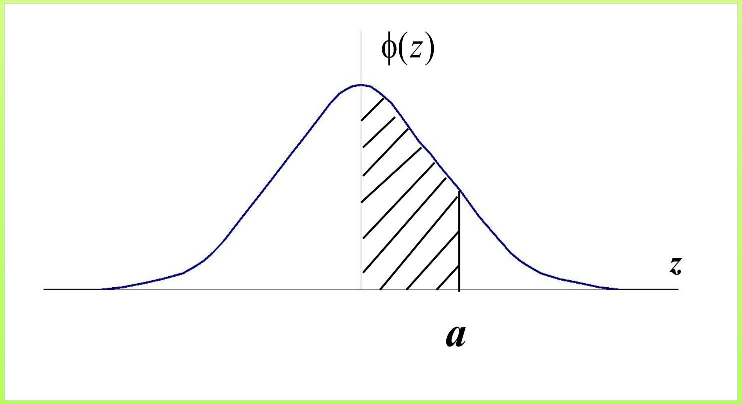
$$P(0 < z < a) = 0,2$$

Решение.

Имеем $P(0 < z < a) = \Phi(a)$.

По таблице функций Лапласа находим $\Phi(a) = 0{,}2$. Т.к. в табл. нет числа 0,2, ищем ближайшее к нему. Это число 0,192, соответствующее значению a = 0,5.

Ответ: 0,5.



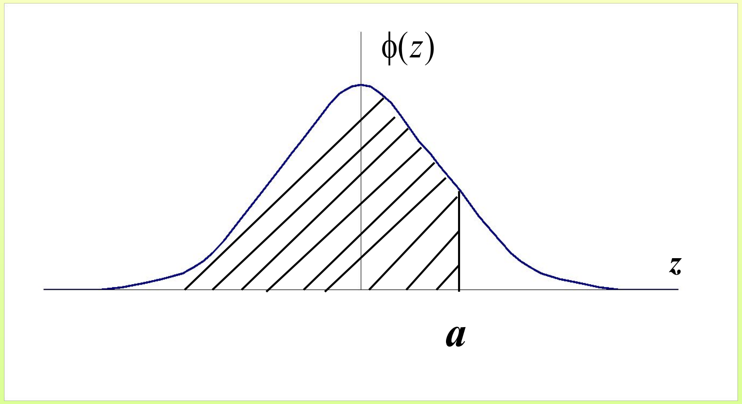
Задача 2

Найти такое число a, что

$$P(z < a) = 0{,}1$$

Решение.

Для любого положительного числа a имеем $P(z < a) > 0,5$.

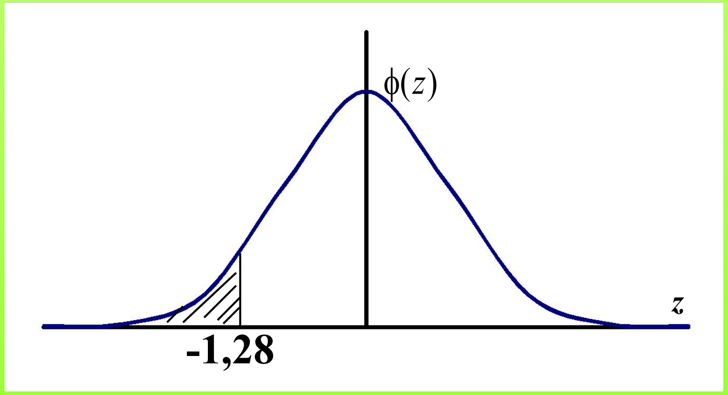


Поэтому, т.к. вероятность < 0,5, точка a может находиться только в отрицательной области. Получаем:

$P(z < a) = 0,5 - \Phi(a) = 0,1$

По таблице функций Лапласа находим $\Phi(a) = 0,4$. Т.к. в табл. нет числа 0,4, ищем ближайшее к нему. Это число 0,3997, соответствующее значению z = 1,28.

Ответ: $a = -1,28$.



Задача 3

Вес пачек с крупой является нормально распределенной случайной величиной с матожиданием 1 кг и стандартным отклонением 10 г. Проверка показала, что 2,5 % выпускаемых пачек имеют вес меньше минимально допустимого стандартом. Каков этот минимальный вес?

Решение.

Решим уравнение $P(x<a)=0{,}025$.

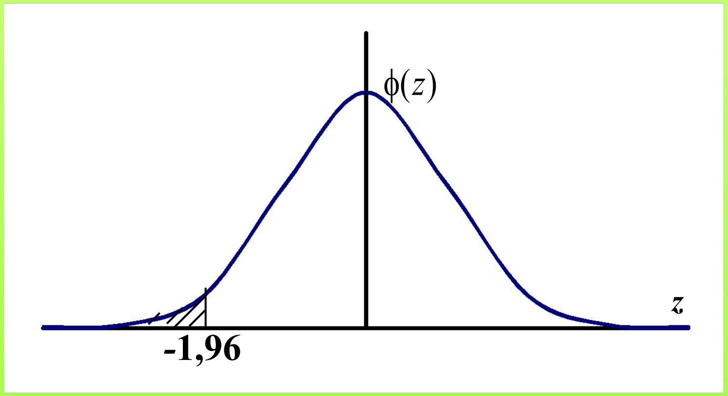
Перейдем к стандартному распределению, учитывая, что квантильный коэффициент $z=\dfrac{x-\mu}{\sigma}$. Тогда

$$P(x<a)=P\left(\frac{x}{\sigma}-\frac{\mu}{\sigma}<\frac{a}{\sigma}-\frac{\mu}{\sigma}\right)=P\left(z<\frac{a-\mu}{\sigma}\right)=P\left(z<\frac{a-1000}{10}\right)=0{,}025$$

Как в предыдущей задаче, $\dfrac{a-1000}{10}$ – отрицательное $\Rightarrow$

$$0{,}5-\Phi\left(\frac{1000-a}{10}\right)=0{,}025$$

$$\Phi\left(\frac{1000-a}{10}\right)=0{,}475$$



$$\frac{1000-a}{10}=1{,}96$$

$1000 - a = 19{,}6$

Ответ: $a = 980{,}4$ г.

Доверительные интервалы

Рассмотрены на лекции

Задача 4

Погрешность измерения напряжения Δ распределена по нормальному закону, причем систематическая погрешность Δ_c равна нулю, а с.к.о. S равно 50 мВ. Найти вероятность того, что результат измерения отличается от истинного значения напряжения не более чем на 120 мВ.

Решение. Воспользуемся выражением (лекция):

$$P(|\Delta| < \varepsilon) = \Phi\left(\frac{\varepsilon - \mu}{\sigma}\right) + \Phi\left(\frac{\varepsilon + \mu}{\sigma}\right).$$

Из условия задачи $\Delta_c = \mu = 0$ и $\varepsilon = 120$ мВ получаем доверительную вероятность

$$P(|\Delta| < 120) = 2\Phi\left(\frac{120}{50}\right) = 2\Phi(2,4)$$

Найдя по таблице значение функции Лапласа $\Phi(z) = \Phi(2,4) = 0,492$, получаем $P = 0,984$.

Задача 5

Погрешность измерения напряжения распределена по нормальному закону, причем систематическая погрешность Δ_c равна 30 мВ, а с.к.о. S равно 50 мВ. Найти вероятность того, что результат измерения отличается от истинного значения напряжения не более чем на 120 мВ.

Решение. Если в результат измерения не вносить поправку, учитывающую систематическую погрешность, то для нахождения искомой вероятности можно воспользоваться соотношением:

$$P(-\varepsilon \le x \le \varepsilon) = P\left(\frac{-\varepsilon-\mu}{\sigma} \le z \le \frac{\varepsilon-\mu}{\sigma}\right) = \Phi\left(\frac{\varepsilon-\mu}{\sigma}\right) - \Phi\left(\frac{-\varepsilon-\mu}{\sigma}\right) = \Phi\left(\frac{\varepsilon-\mu}{\sigma}\right) + \Phi\left(\frac{\varepsilon+\mu}{\sigma}\right) =$$

$$= \Phi[(120 - 30) / 50] + \Phi[(120 + 30)/50] = \Phi(1{,}8) + \Phi(3) = 0{,}464 + 0{,}499 = 0{,}963.$$

Если в результат измерения внести поправку, т.е. считать, что

$$x_{испр} = x - \Delta_c,$$

то

$$P(|\Delta| < 120) = 2\Phi\left(\frac{120}{50}\right) = 2\Phi(2,4) = 0{,}984.$$

***Вывод*: доверительная вероятность увеличивается, если Δ_c стремится к нулю или вносится соответствующая поправка в результат измерения.**

Задача 6

В результате поверки амперметра установлено, что 70 % погрешностей результатов измерений, произведенных с его помощью, не превосходят ± 20 мА. Считая, что погрешности распределены по нормальному закону с нулевым математическим ожиданием, определить среднее квадратическое отклонение результатов измерений.

Решение.

Используя формулу $P(|\Delta|<\varepsilon)=2\Phi\left(\frac{\varepsilon}{\sigma}\right)$, имеем

$$P(|\Delta| < 20) = 2\Phi(20/S) = 0{,}7 \text{ или}$$
$$\Phi(20/S) = 0{,}35$$

Найдя значение функции $\Phi(z)$ по таблице, видим, что значение аргумента равно 1,04, откуда:

$$20/S = 1{,}04,$$

откуда $S = 20/1{,}04 = 19$ мА.

Задача 7

Случайная величина *x*, распределенная по нормальному закону, представляет собой погрешность измерения некоторого *расстояния*. При измерении допускается систематическая погрешность 1,2 м, среднее квадратическое отклонение погрешности 0,8 м. Найти *вероятность* того, что отклонение измеренного значения от истинного не превзойдет 1,6 м.

Решение.

$$P(-1,6 \le x \le 1,6) = \Phi\left(\frac{1,6-1,2}{0,8}\right) + \Phi\left(\frac{1,6+1,2}{0,8}\right) = \Phi\left(\frac{0,4}{0,8}\right) + \Phi\left(\frac{2,8}{0,8}\right) =$$

$$\Phi(0,5) + \Phi(3,5) = 0,192 + 0,4998 = 0,6918$$

Та же вероятность, но без учета систематической погрешности равна

$$P(-1,6 \le x \le 1,6) = 2\Phi\left(\frac{1,6}{0,8}\right) = 2\Phi(2) = 2 \cdot 0,4772 = 0,9544.$$

Задача 8

По результатам *пяти* наблюдений длина стержня составила 15,785 мм, $S_{\overline{x}}$ = 0,005 мм. Оценить вероятность того, что истинное значение длины стержня отличается от среднего арифметического не больше, чем на 0,01 мм.

Решение.

Применим распределение Стьюдента.

Вычислим значение коэффициента Стьюдента:

$$t = \frac{\varepsilon}{S_{\overline{x}}} = \frac{0{,}010}{0{,}005} = 2\,.$$

Число степеней свободы v = 5 – 1 = 4. По таблице распределения Стьюдента находим соответствующее значение доверительной вероятности:

$$P(|\,\overline{x} - x\,| < tS_{\overline{x}}) = P(|\,\overline{x} - x\,| < 2S_{\overline{x}}) = P(|\,\overline{x} - x\,| < 0{,}010) \approx 90\,\%\,.$$

Результат измерения имеет вид:

$$x = (15{,}785 \pm 0{,}010)\text{ мм},\ P = 90\ \%.$$

Задача 9

В результате двух параллельных определений были получены данные, характеризующие содержание хрома в эталоне: 4,50 % и 4,70 %. Оценить доверительный интервал содержания хрома в эталоне при $P_д = 0,9$.

Решение.

Найдем точечную оценку:

$$\bar{x} = (4{,}50 + 4{,}70) / 2 = 4{,}60\ \%.$$

Т.к. измерений только два, используем распределение Стьюдента, при котором доверительный интервал имеет вид:

$$\bar{x} - \frac{tS}{\sqrt{n}} \le x \le \bar{x} + \frac{tS}{\sqrt{n}}.$$

Найдем с.к.о. результата измерения:

$$S = \sqrt{\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})^2} = \sqrt{\frac{(4{,}50 - 4{,}60)^2 + (4{,}70 - 4{,}60)^2}{2-1}} = \sqrt{0{,}02} = 0{,}14.$$

При P = 0,9 по таблице распределения Стьюдента при степени свободы v = 2 – 1 = 1 находим соответствующее значение t = 6,31.

Следовательно, с вероятностью 0,9 (90 %) истинное значение хрома заключено в интервале:

$$(4{,}60 - \frac{6{,}31 \cdot 0{,}14}{\sqrt{2}})\% \le x \le (4{,}60 + \frac{6{,}31 \cdot 0{,}14}{\sqrt{2}})\% \text{ или}$$

$$x = (4{,}60 \pm 0{,}63)\ \%.$$

0,04	0,0160	0,54	0,2054	1,04	0,3508	1,54	0,4382	2,08	0,4812	3,80	0,499928
0,05	0,0199	0,55	0,2088	1,05	0,3531	1,55	0,4394	2,10	0,4821	4,00	0,499968
0,06	0,0239	0,56	0,2123	1,06	0,3554	1,56	0,4406	2,12	0,4830	4,50	0,499997
0,07	0,0279	0,57	0,2157	1,07	0,3577	1,57	0,4418	2,14	0,4838	5,00	0,499997
0,08	0,0319	0,58	0,2190	1,08	0,3599	1,58	0,4429	2,16	0,4846		
0,09	0,0359	0,59	0,2224	1,09	0,3621	1,59	0,4441	2,18	0,4854		
0,10	0,0398	0,60	0,2257	1,10	0,3643	1,60	0,4452	2,20	0,4861		
0,11	0,0438	0,61	0,2291	1,11	0,3665	1,61	0,4463	2,22	0,4868		
0,12	0,0478	0,62	0,2324	1,12	0,3686	1,62	0,4474	2,24	0,4875		
0,13	0,0517	0,63	0,2357	1,13	0,3708	1,63	0,4484	2,26	0,4881		
0,14	0,0557	0,64	0,2389	1,14	0,3729	1,64	0,4495	2,28	0,4887		
0,15	0,0596	0,65	0,2422	1,15	0,3749	1,65	0,4505	2,30	0,4893		
0,16	0,0636	0,66	0,2454	1,16	0,3770	1,66	0,4515	2,32	0,4898		
0,17	0,0675	0,67	0,2486	1,17	0,3790	1,67	0,4525	2,34	0,4904		
0,18	0,0714	0,68	0,2517	1,18	0,3810	1,68	0,4535	2,36	0,4909		
0,19	0,0753	0,69	0,2549	1,19	0,3830	1,69	0,4545	2,38	0,4913		
0,20	0,0793	0,70	0,2580	1,20	0,3849	1,70	0,4554	2,40	0,4918		
0,21	0,0832	0,71	0,2611	1,21	0,3869	1,71	0,4564	2,42	0,4922		
0,22	0,0871	0,72	0,2642	1,22	0,3883	1,72	0,4573	2,44	0,4927		
0,23	0,0910	0,73	0,2673	1,23	0,3907	1,73	0,4582	2,46	0,4931		
0,24	0,0948	0,74	0,2703	1,24	0,3925	1,74	0,4591	2,48	0,4934		
0,25	0,0987	0,75	0,2734	1,25	0,3944	1,75	0,4599	2,50	0,4938		
0,26	0,1026	0,76	0,2764	1,26	0,3962	1,76	0,4608	2,52	0,4941		
0,27	0,1064	0,77	0,2794	1,27	0,3980	1,77	0,4616	2,54	0,4945		
0,28	0,1103	0,78	0,2823	1,28	0,3997	1,78	0,4625	2,56	0,4948		
0,29	0,1141	0,79	0,2852	1,29	0,4015	1,79	0,4633	2,58	0,4951		
0,30	0,1179	0,80	0,2881	1,30	0,4032	1,80	0,4641	2,60	0,4953		
0,31	0,1217	0,81	0,2910	1,31	0,4049	1,81	0,4649	2,62	0,4956		
0,32	0,1255	0,82	0,2939	1,32	0,4066	1,82	0,4656	2,64	0,4959		
0,33	0,1293	0,83	0,2967	1,33	0,4082	1,83	0,4664	2,66	0,4961		
0,34	0,1331	0,84	0,2995	1,34	0,4099	1,84	0,4671	2,68	0,4963		
0,35	0,1368	0,85	0,3023	1,35	0,4115	1,85	0,4678	2,70	0,4965		
0,36	0,1406	0,86	0,3051	1,36	0,4131	1,86	0,4686	2,72	0,4967		
0,37	0,1443	0,87	0,3078	1,37	0,4147	1,87	0,4693	2,74	0,4969		
0,38	0,1480	0,88	0,3106	1,38	0,4162	1,88	0,4699	2,76	0,4971		
0,39	0,1517	0,89	0,3133	1,39	0,4177	1,89	0,4706	2,78	0,4973		
0,40	0,1554	0,90	0,3159	1,40	0,4192	1,90	0,4713	2,80	0,4974		
0,41	0,1591	0,91	0,3186	1,41	0,4207	1,91	0,4719	2,82	0,4976		
0,42	0,1628	0,92	0,3212	1,42	0,4222	1,92	0,4726	2,84	0,4977		
0,43	0,1664	0,93	0,3238	1,43	0,4236	1,93	0,4732	2,86	0,4979		
0,44	0,1700	0,94	0,3264	1,44	0,4251	1,94	0,4738	2,88	0,4980		
0,45	0,1736	0,95	0,3289	1,45	0,4265	1,95	0,4744	2,90	0,4981		
0,46	0,1772	0,96	0,3315	1,46	0,4279	1,96	0,4750	2,92	0,4982		

Таблица значений функции Лапласа

Коэффициенты Стьюдента

$v = n - 1$	α, %				$v = n - 1$	α, %			
	10	5	1	0,1		10	5	1	0,1
1	6,31	12,71	63,66	636,6	18	1,73	2,10	2,88	3,92
2	2,92	4,30	9,92	31,60	19	1,73	2,09	2,86	3,88
3	2.35	3,18	5,84	12,92	20	1,73	2,09	2,85	3,85
4	2,13	2,78	4,60	8,61	21	1,72	2,08	2,83	3,82
5	2,02	2,57	4,03	6,87	22	1,72	2,07	2,82	3,79
6	1,94	2,45	3,71	5,96	23	1,71	2,07	2,81	3,77
7	1,90	2,37	3,50	5,41	24	1,71	2,06	2,80	3,75
8	1,86	2,31	3,36	5,04	25	1,71	2,06	2,79	3,73
9	1,83	2,26	3,25	4,78	26	1,71	2,06	2,78	3,71
10	1,81	2,23	3,17	4,59	27	1,70	2,05	2,77	3,69
11	1,80	2,20	3,11	4,44	28	1,70	2,05	2,76	3,67
12	1,78	2,18	3,05	4,32	29	1,70	2,05	2,76	3,66
13	1,77	2,16	3,01	4,22	30	1,70	2,04	2,75	3,65
14	1,76	2,14	2,98	4,14	40	1,68	2,02	2,70	3,55
15	1,75	2,13	2,95	4,07	60	1,67	2,00	2,66	3,46
16	1,75	2,12	2,92	4,02	120	1,66	1,98	2,62	3,37
17	1,74	2,11	2,90	3,97	∞	1,65	1,96	2,58	3,29
$P_д$	0,90	0,95	0,99	0,999	$P_д$	0,90	0,95	0,99	0,999