

Математическая ЛОГИКА

- § 8. Логика и компьютеры
- § 9. Логические элементы
- § 10. Другие логические операции
- § 11. Логические выражения
- § 12. Множества и логика

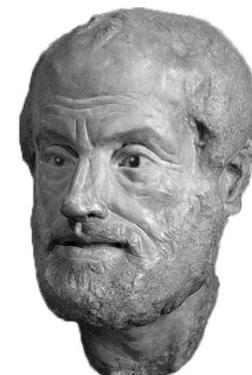
Математическая ЛОГИКА

§ 5. Логика и компьютер

Логика, высказывания

Логика (др.греч. *λοῦκος*) – это наука о том, как правильно рассуждать, делать выводы, доказывать утверждения.

Формальная логика отвлекается от конкретного содержания, изучает только истинность и ложность высказываний.



Аристотель
(384-322 до н.э.)

Логическое высказывание – это повествовательное предложение, относительно которого можно однозначно сказать, истинно оно или ложно.

Высказывание или нет?

✓ Сейчас идет дождь.

✓ Жирафы летят на север.

~~История – интересный предмет.~~

✓ У квадрата – 10 сторон и все разные.

Красиво!

В городе N живут 2 миллиона человек.

Который час?

Логика и компьютер

двоичная логика

! Любое высказывание может быть **ложно (0)** или **истинно (1)**.

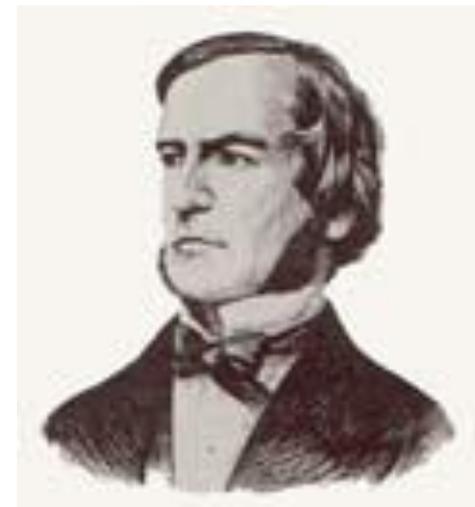
Логика изучает операции между 0 и 1!



! Связь с двоичным кодированием!

Алгебра логики — это математический аппарат, с помощью которого записывают, упрощают и преобразуют логические высказывания, вычисляют их значения.

Алгебра высказываний,
булева алгебра



Джордж Буль

Простые и составные высказывания

A – Сейчас идет дождь. }
B – Форточка открыта. }

простые
высказывания
(элементарные)

Составные высказывания строятся из простых с помощью логических связок (операций) «и», «или», «не», «если ... то», «тогда и только тогда» и др.

A и B Сейчас идет дождь и открыта форточка.

A или не B Сейчас идет дождь или форточка закрыта.

если A, то B Если сейчас идет дождь, то форточка открыта.

A тогда и только тогда, когда B Дождь идет тогда и только тогда, когда открыта форточка.

Операция НЕ (инверсия)

Если высказывание **A** истинно, то «**не A**» ложно, и наоборот.

A	не A
0	1
1	0

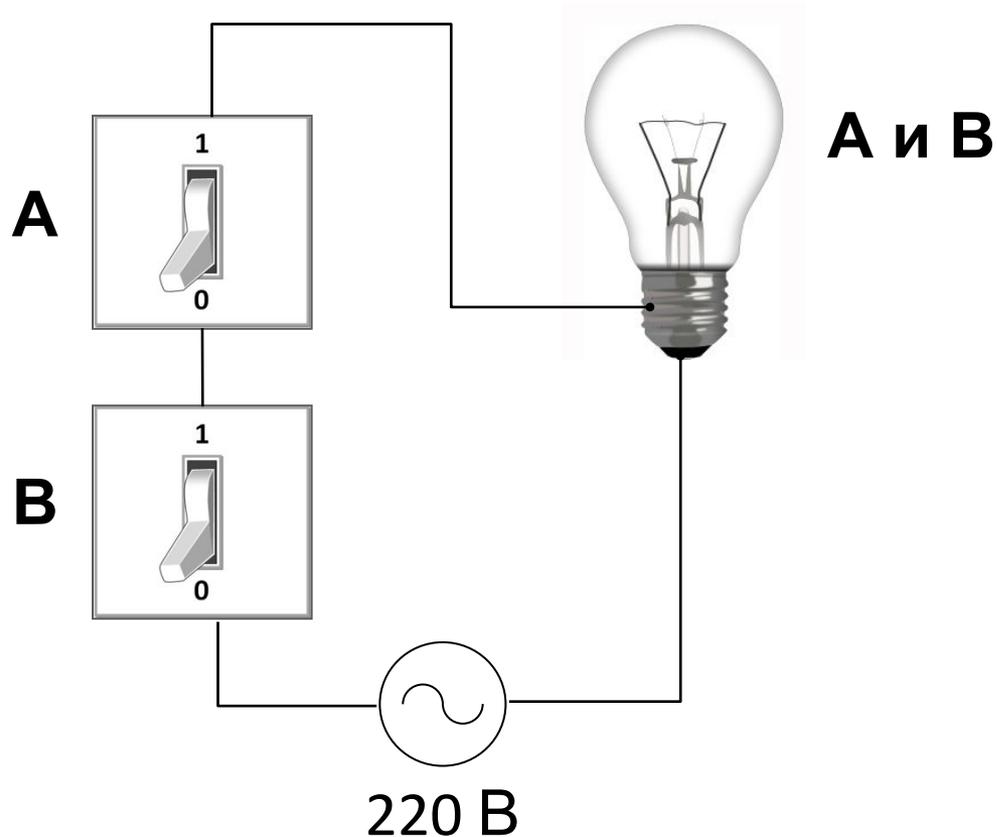
также , not A

таблица
истинности
операции НЕ

Таблица истинности логического выражения X – это таблица, где в левой части записываются все возможные комбинации значений исходных данных, а в правой – значение выражения X для каждой комбинации.

Операция И

Высказывание «**A** и **B**» истинно тогда и только тогда, когда **A** и **B** истинны одновременно.



Операция И (логическое умножение, конъюнкция)

	A	B	A и B
0	0	0	0
1	0	1	0
2	1	0	0
3	1	1	1

также $A \cdot B$, A and B



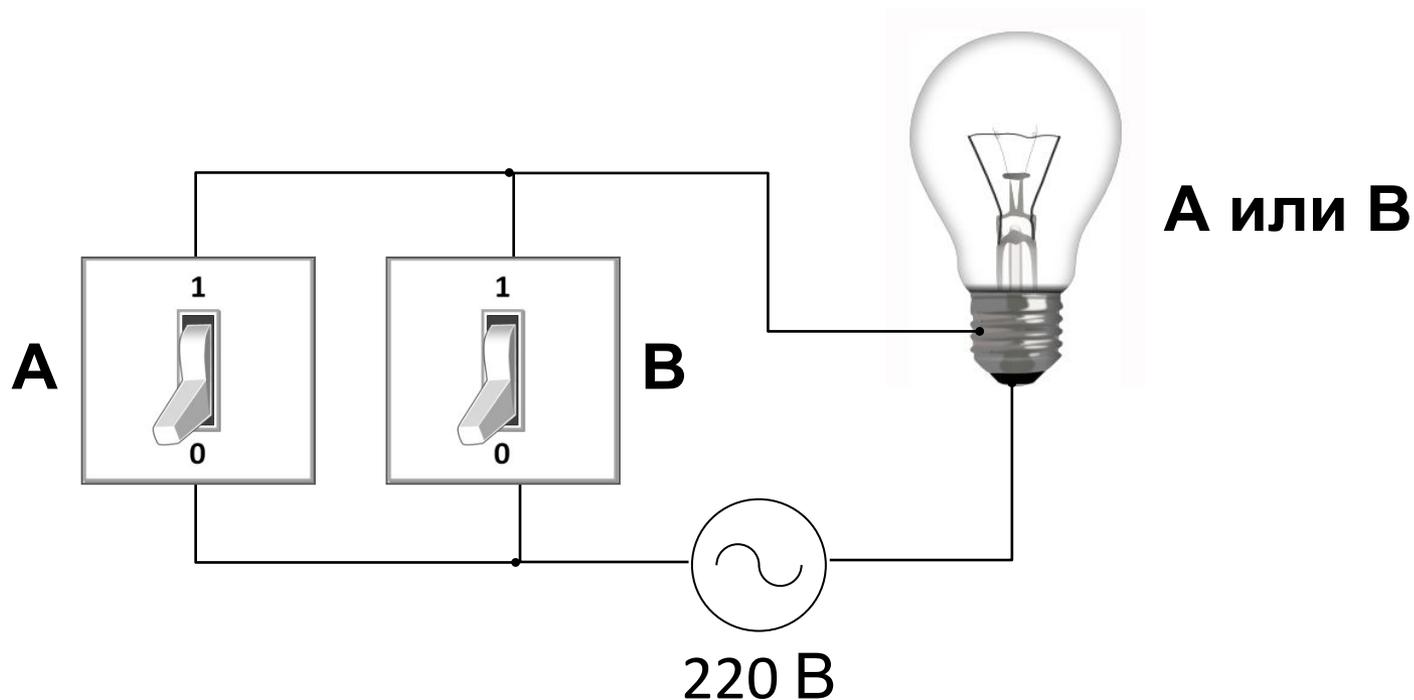
Почему умножение?

КОНЪЮНКЦИЯ – от лат. *conjunctio* — соединение

$$A \text{ и } B = \min(A, B)$$

Операция ИЛИ (логическое сложение, дизъюнкция)

Высказывание «**A** или **B**» истинно тогда, когда истинно **A** или **B**, или оба вместе.



Операция ИЛИ (логическое сложение, дизъюнкция)

A	B	A или B
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	1

также: $A+B$, A or B



Почему сложение?



$1+1=1$

ДИЗЪЮНКЦИЯ – от лат. *disjunctio* — разъединение

$$A \text{ и } B = \max(A, B)$$

Упрощение логических выражений

$$A \text{ и } 0 = A \cdot 0 = 0$$

$$A \text{ и } 1 = A \cdot 1 = A$$

$$A \text{ или } 0 = A + 0 = A$$

$$A \text{ или } 1 = A + 1 = 1$$

$$A \text{ и не } A = A \cdot \bar{A} = 0$$

$$A \text{ или (не } A) = A + \bar{A} = 1$$

Построить таблицу истинности

 $\neg(x \vee \neg y \&$

z)						

Доказать тождества

$$\overline{(a \wedge b)} = \bar{a} \vee \bar{b}$$

$$\overline{(a \vee b)} = \bar{a} \wedge \bar{b}$$

Построить таблицу истинности

$$F = \overline{(X \vee Y)} \& (Y \vee \overline{X})$$

Построить таблицу истинности

$$\overline{(\bar{A} \& B) \vee (B \& C) \vee (\bar{A} \& C)}$$

Доказать тождество

$$x \& (y \vee z) \equiv (x \& y) \vee (x \& z)$$

Задание 1

Дан фрагмент таблицы истинности выражения F.
Какое выражение соответствует F?

- 1) $x_1 \wedge \neg x_2 \wedge x_3 \wedge \neg x_4 \wedge x_5 \wedge x_6 \wedge \neg x_7$
- 2) $\neg x_1 \vee x_2 \vee \neg x_3 \vee x_4 \vee \neg x_5 \vee \neg x_6 \vee x_7$
- 3) $\neg x_1 \wedge x_2 \wedge \neg x_3 \wedge x_4 \wedge x_5 \wedge x_6 \wedge x_7$
- 4) $x_1 \vee \neg x_2 \vee x_3 \vee \neg x_4 \vee \neg x_5 \vee \neg x_6 \vee \neg x_7$

x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	F
0	1	0	1	1	1	1	1
1	0	1	0	1	1	0	0
0	1	0	1	1	0	1	1

Задание 2

Дан фрагмент таблицы истинности выражения F.

x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	x_8	x_9	x_{10}	F
0	1	1	0	1	1	0	1	1	1	1
1	0	1	1	0	0	1	1	1	0	0
1	0	0	0	1	1	0	0	1	0	1

Какое выражение соответствует F?

- 1) $(x_1 \vee \neg x_2) \wedge (x_3 \vee \neg x_4) \wedge x_5 \wedge \neg x_6 \wedge x_7 \wedge x_8 \wedge \neg x_9 \wedge x_{10}$
- 2) $(x_1 \wedge \neg x_2) \vee (x_3 \wedge \neg x_4) \vee \neg x_5 \vee \neg x_6 \vee x_7 \vee x_8 \vee \neg x_9 \vee x_{10}$
- 3) $(\neg x_1 \wedge x_2) \vee (\neg x_3 \wedge x_4) \vee x_5 \vee x_6 \vee \neg x_7 \vee \neg x_8 \vee \neg x_9 \vee x_{10}$
- 4) $(\neg x_1 \vee x_2) \wedge (\neg x_3 \vee x_4) \wedge \neg x_5 \wedge x_6 \wedge \neg x_7 \wedge \neg x_8 \wedge x_9 \wedge \neg x_{10}$

Задание 3

Дан фрагмент таблицы истинности для выражения F:



x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	F
			1		0		0
			0			1	1
0			1				0

Каким выражением может быть F?

- 1) $x_1 \wedge \neg x_2 \wedge \neg x_3 \wedge \neg x_4 \wedge x_5 \wedge x_6 \wedge x_7$
- 2) $\neg x_1 \vee x_2 \vee x_3 \vee \neg x_4 \vee \neg x_5 \vee \neg x_6 \vee \neg x_7$
- 3) $x_1 \wedge x_2 \wedge \neg x_3 \wedge x_4 \wedge x_5 \wedge \neg x_6 \wedge x_7$
- 4) $x_1 \vee \neg x_2 \vee \neg x_3 \vee \neg x_4 \vee \neg x_5 \vee \neg x_6 \vee \neg x_7$

Задание 4

дан фрагмент таблицы истинности для выражения F:

Каким выражением может быть F?

1) $x_1 \wedge \neg x_2 \wedge x_3 \wedge \neg x_4 \wedge x_5 \wedge x_6 \wedge \neg x_7 \wedge \neg x_8$

2) $x_1 \vee x_2 \vee x_3 \vee \neg x_4 \vee \neg x_5 \vee \neg x_6 \vee \neg x_7 \vee x_8$

3) $\neg x_1 \wedge x_2 \wedge \neg x_3 \wedge x_4 \wedge x_5 \wedge \neg x_6 \wedge \neg x_7 \wedge$

$\neg x_8$

4) $x_1 \vee \neg x_2 \vee \neg x_3 \vee \neg x_4 \vee \neg x_5 \vee \neg x_6 \vee \neg x_7 \vee$

$\neg x_8$

x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	x_8	F
		0				1		1
1					1			1
			1				0	0

Задание 5

Дан фрагмент таблицы истинности для выражения F:

x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	F
			1		0		0
			0			1	1
0			1				0

Каким выражением может быть F?

- 1) $x_1 \wedge \neg x_2 \wedge \neg x_3 \wedge \neg x_4 \wedge x_5 \wedge x_6 \wedge x_7$
- 2) $\neg x_1 \vee x_2 \vee x_3 \vee \neg x_4 \vee \neg x_5 \vee \neg x_6 \vee \neg x_7$
- 3) $x_1 \wedge x_2 \wedge \neg x_3 \wedge x_4 \wedge x_5 \wedge \neg x_6 \wedge x_7$
- 4) $x_1 \vee \neg x_2 \vee \neg x_3 \vee \neg x_4 \vee \neg x_5 \vee \neg x_6 \vee \neg x_7$

Математическая ЛОГИКА

§ 7. Другие логические операции

Операции с двумя переменными



Сколько всего?

A	B	F
0	0	?
0	1	?
1	0	?
1	1	?

0 или 1

$$2^4 = 16$$

Импликация

A

$X =$ Если идёт дождь, то

Лена раскрывает зонтик.

$$X = A \rightarrow B$$

B

Импликация $A \rightarrow B$ истинна, если **не исключено**, что из A следует B .

A	B	F
0	0	1
0	1	1
1	0	0
1	1	1

Идёт дождь, но Лена не раскрыла зонтик.

Эквиваленция

Высказывание « $A \leftrightarrow B$ » истинно тогда и только тогда, когда A и B равны.

A	B	$A \leftrightarrow B$
0	0	1
0	1	0
1	0	0
1	1	1

Порядок вычисления

- скобки
- НЕ
- И
- ИЛИ, исключающее ИЛИ
- импликация
- эквиваленция

$$X = A \wedge B \vee (\bar{A} \wedge B \vee \bar{B})$$

Построить таблицу истинности

$$\neg x \rightarrow (y \rightarrow \neg z)$$

Составьте таблицы истинности

$$((p \wedge q) \leftrightarrow q) \leftrightarrow (q \rightarrow p)$$

Составьте таблицы истинности

$$\overline{\overline{x \vee y} \rightarrow \overline{x \& y}}$$

Какое выражение соответствует F?

1) $(A \rightarrow \neg B) \vee C$ 2) $(\neg A \vee B) \wedge C$

3) $(A \wedge B) \rightarrow C$ 4) $(A \vee B) \rightarrow C$

A	B	C	F
0	1	1	1
1	0	0	0
1	0	1	1

Какое выражение соответствует F?

1) $X \rightarrow Z \wedge Y$ 2) $\neg Z \rightarrow (X \rightarrow Y)$

3) $\neg(X \vee Y) \wedge Z$ 4) $\neg X \vee \neg(Y \wedge Z)$

X	Y	Z	F
1	0	0	0
0	1	1	1
1	0	1	1

Какое выражение соответствует F?

1) $(X \equiv Z) \wedge (\neg X \rightarrow Y)$ 2) $(\neg X \equiv Z) \wedge (\neg X \rightarrow Y)$

3) $(X \equiv \neg Z) \wedge (\neg X \rightarrow Y)$ 4) $(X \equiv Z) \wedge \neg(Y \rightarrow Z)$

X	Y	Z	F
1	0	1	0
0	1	0	1
1	1	1	0

Математическая ЛОГИКА

§ 8. Логические выражения

ОГЭ1

Для скольких значений числа X истинно высказывание:

$$R = (X < 5) \text{ И НЕ } (X < 1) ?$$

ОГЭ2

Для каких из указанных значений числа X

ЛОЖНО высказывание:

(НЕ ($X \geq 3$) И НЕ ($X = 8$)) ИЛИ ($X \leq 5$) ?

$X = 4$:

$X = 1$:

$X = 8$:

ОГЭЗ

Для каких из приведённых имён **ЛОЖНО**
высказывание:

(Первая буква согласная)

НЕ(Первая буква гласная) ИЛИ
(Последняя буква гласная) ?

	Результат
Никита	
Антон	
Даниил	
Инна	
Кирилл	

ОГЭ4

Напишите наибольшее целое число x , для которого истинно высказывание:

НЕ (X чётное) **И** **НЕ** ($X \geq 7$)

ОГЭ5

Напишите наименьшее целое число x , для которого истинно высказывание:

НЕ ($X \leq 8$) **И** **НЕ** ($X \geq 15$) **И** (X чётное).

ОГЭ6

Напишите наименьшее число x , для которого истинно высказывание:

НЕ ($x < 45$) **И** **НЕ** (в числе x нет одинаковых цифр)

ОГЭ7

Напишите наибольшее число x , для которого ложно высказывание:

НЕ $(x \leq 71)$ **ИЛИ** $(x$ не делится на 7)

ОГЭ 8

Напишите наименьшее число x , для которого истинно высказывание:

(x не равно 16) И (x кратно 16) И НЕ (x имеет не менее 3 цифр)

ОГЭ 9

Напишите сумму наименьшего и наибольшего числа x , для которого ложно высказывание:

**НЕ (x трехзначное число) ИЛИ НЕ (x четное число)
ИЛИ (x оканчивается на 8) ИЛИ (x кратно 3)**

ОГЭ 10

Напишите наименьшее натуральное число x , для которого истинно высказывание:

$$((X < 5) \rightarrow (X < 3)) \wedge ((X < 2) \rightarrow (X > 1))$$

Самостоятельно

I вариант

Напишите наибольшее целое число x , для которого истинно высказывание:

НЕ ($X \leq 11$) **И** **НЕ** ($X \geq 17$) **И** (X нечётное).

II вариант

Напишите наименьшее целое число x , для которого истинно высказывание:

НЕ ($X \leq 8$) **И** **НЕ** ($X \geq 15$) **И** (X чётное).

Конец фильма

ПОЛЯКОВ Константин Юрьевич

д.т.н., учитель информатики

ГБОУ СОШ № 163, г. Санкт-Петербург

kpolyakov@mail.ru

ЕРЕМИН Евгений Александрович

к.ф.-м.н., доцент кафедры мультимедийной

дидактики и ИТО ПГГПУ, г. Пермь

eremin@pspu.ac.ru

Источники иллюстраций

1. иллюстрации художников издательства «Бином»
2. авторские материалы