

Обучение учащихся элементам теории вероятностей при подготовке к сдаче ГИА и ЕГЭ



Классическое определение вероятности

Вероятностью события A называют отношение числа благоприятствующих этому событию исходов к общему числу всех равновозможных несовместных элементарных исходов, образующих полную группу.

$$P(A) = \frac{m}{n}$$

Задачи на прямое использование классического определения вероятности

На тарелке 16 пирожков: 7 с рыбой, 5 с вареньем и 4 с вишней. Юля наугад выбирает один пирожок. Найдите вероятность того, что он окажется с вишней.

Решение:

$m=4$ – число пирожков с вишней (число благоприятных исходов)

$n=16$ – число всех пирожков (общее число равновероятных исходов)

$$P = \frac{4}{16} = 0,25$$

Задачи на прямое использование классического определения вероятности

В чемпионате по гимнастике участвуют 20 спортсменок: 8 из России, 7 из США, остальные — из Китая. Порядок, в котором выступают гимнастки, определяется жребием. Найдите вероятность того, что спортсменка, выступающая первой, окажется из Китая.

Решение:

$m=20-8-7=5$ – число гимнасток из Китая (число благоприятных исходов)

$n=20$ – число гимнасток, которые принимают участие в чемпионате (общее число равновозможных исходов)

$$P = \frac{5}{20} = 0,25$$

Задачи на прямое использование классического определения вероятности

Перед началом первого тура чемпионата по бадминтону участников разбивают на игровые пары случайным образом с помощью жребия. Всего в чемпионате участвует 26 бадминтонистов, среди которых 10 участников из России, в том числе Руслан Орлов. Найдите вероятность того, что в первом туре Руслан Орлов будет играть с каким-либо бадминтонистом из России?

Решение:

$m=10-1=9$ – число участников из России за исключением Руслана Орлова (число благоприятных исходов)

$n=26-1=25$ – число бадминтонистов, участвующих в чемпионате за исключением Руслана Орлова (общее число равновозможных исходов)

$$P = \frac{9}{25} = 0,36$$

Задачи на прямое использование классического определения вероятности

В классе учится 21 человек. Среди них две подруги: Аня и Нина. Класс случайным образом делят на 7 групп, по 3 человека в каждой. Найти вероятность того, что Аня и Нина окажутся **в одной группе**.

Решение:

Пусть Аня оказалась в некоторой группе, тогда

$m=21:7-1=2$ – число вакантных мест в этой же группе
(число благоприятных исходов)

$n=21-1=20$ – число учащихся класса за исключением Ани
(общее число равновероятных исходов)

$$P = \frac{2}{20} = 0,1$$

Задачи на прямое использование классического определения вероятности

В классе учится 21 человек. Среди них две подруги: Аня и Нина. Класс случайным образом делят на 7 групп, по 3 человека в каждой. Найти вероятность того, что Аня и Нина окажутся в одной группе.

2 способ

Вероятность того, что одна из подруг окажется в одной из групп равна $\frac{3}{21}$

Вероятность того, что вторая подруга окажется в этой же группе равна $\frac{2}{20}$

Поскольку все 7 групп равноправны, то вероятность попасть в одну группу равна

$$P = \frac{3}{21} \cdot \frac{2}{20} \cdot 7 = 0,1$$

Задачи на прямое использование классического определения вероятности

В классе учится 21 человек. Среди них две подруги: Аня и Нина. Класс случайным образом делят на 7 групп, по 3 человека в каждой. Найти вероятность того, что Аня и Нина окажутся в одной группе.

3 способ Используем формулы комбинаторики:

$n = C_{21}^3$ – количество способов выбрать 3 учащихся из 21

$m = C_7^1 \cdot C_{19}^1$, где

C_7^1 – количество способов подругам попасть в одну группу

C_{19}^1 – количество способов добавить в эту группу 1 из 19 оставшихся

$$P = \frac{7 \cdot 19}{1330} = \frac{1}{10} = 0,1$$

Задачи на прямое использование классического определения вероятности

В классе учится 21 человек. Среди них две подруги: Аня и Нина. Класс случайным образом делят на 7 групп, по 3 человека в каждой. Найти вероятность того, что Аня и Нина окажутся **в разных группах**.

Решение:

События А – «подруги окажутся в одной группе» и В- «подруги окажутся в разных группах» являются противоположными.

В этом случае **$P(A) = 1 - P(B)$** .

$$P = 1 - \frac{2}{20} = 0,9$$

Задачи на прямое использование классического определения вероятности

В случайном эксперименте бросают две игральные кости. Найдите вероятность того, что в сумме выпадет 8 очков. Результат округлите до сотых.

Комбинации в выпадении очков на кубиках:

1 - 1	2 - 1	3 - 1	4 - 1	5 - 1	6 - 1
1 - 2	2 - 2	3 - 2	4 - 2	5 - 2	6 - 2
1 - 3	2 - 3	3 - 3	4 - 3	5 - 3	6 - 3
1 - 4	2 - 4	3 - 4	4 - 4	5 - 4	6 - 4
1 - 5	2 - 5	3 - 5	4 - 5	5 - 5	6 - 5
1 - 6	2 - 6	3 - 6	4 - 6	5 - 6	6 - 6

$$P = \frac{5}{36} = 0,13888... = 0,14$$

Жирным шрифтом выделены комбинации, в которых сумма очков равна 8.



Задачи на прямое использование классического определения вероятности

Перед началом футбольного матча судья бросает монетку, чтобы определить, какая из команд начнёт игру с мячом. Команда «Физик» играет три матча с разными командами. Найдите вероятность того, что в этих играх «Физик» выиграет жребий ровно два раза.

Обозначим «1» ту сторону монеты, которая отвечает за выигрыш жребия «Физиком», другую сторону монеты обозначим «0».

Тогда

Возможные комбинации жребия:

000 001 010 **011** 100 **101** **110** 111

Жирным шрифтом выделены благоприятные комбинации.

$$P = \frac{3}{8} = 0,375$$

Задачи на прямое использование классического определения вероятности

- В случайном эксперименте симметричную монету бросают дважды. Найдите вероятность того, что решка выпадет ровно один раз. В случайном эксперименте симметричную монету бросают дважды. Найдите вероятность того, что решка выпадет ровно один раз.
- В случайном эксперименте симметричную монету бросают трижды. Найдите вероятность того, что решка выпадет все три раза.
- В случайном эксперименте симметричную монету бросают четырежды. Найдите вероятность того, что орёл выпадет ровно три раза.



В случайном эксперименте симметричную монету бросают дважды. Найдите вероятность того, что решка выпадет ровно один раз

Возможные исходы:

О – О

О – Р

Р – Р

Р – О

$$P = \frac{2}{4} = 0,5$$

***Жирным шрифтом выделены
благоприятные исходы***

В случайном эксперименте симметричную монету бросают трижды. Найдите вероятность того, что решка выпадет все три раза.

Общее число исходов найдем по формуле

$$n = 2^n = 2^3 = 8$$

Число благоприятных исходов

$$m = 1$$

$$P = \frac{1}{8} = 0,125$$

В случайном эксперименте симметричную монету бросают четырежды. Найдите вероятность того, что орёл выпадет ровно три раза.

Общее число исходов найдем по формуле

$$n = 2^n = 2^4 = 16$$

Число благоприятных исходов:

O-O-O-P

O-O-P-O

O-P-O-O

P-O-O-O

$$m = 4$$

$$P = \frac{4}{16} = 0,25$$

Задачи на прямое использование классического определения вероятности

Фабрика выпускает сумки. В среднем на 100 качественных сумок приходится восемь сумок со скрытыми дефектами. Найдите вероятность того, что купленная сумка окажется качественной. Результат округлите до сотых.

$$m=100$$

$$n=100+8=108$$

$$P = \frac{100}{108} = 0,9259 = 0,93$$

В среднем из 1000 садовых насосов, поступивших в продажу, 5 подтекают. Найдите вероятность того, что один случайно выбранный для контроля насос не подтекает.

$$m=1000-5=995$$

$$n=1000$$

$$P = \frac{995}{1000} = 0,995$$

Основные понятия

- События A и B называются **совместными**, если они могут произойти оба в результате одного опыта.
- События A и B называются *несовместными*, если в результате испытания они никогда не могут наступить вместе

Примеры совместных и несовместных событий

- **Совместные события**

Два стрелка делают по одному выстрелу по мишени:

событие A – попадание первого стрелка,

событие B – попадание второго стрелка.

- **Несовместные события**

Подбрасываем игральный кубик:

событие A – выпадение 1,

событие B – выпадение 5.

Сумма событий

Суммой $A + B$ двух событий A и B называют событие, состоящее в появлении события A , или события B , или обоих этих событий.

Если из орудия произведены два выстрела:

событие A — попадание при первом выстреле,

событие B — попадание при втором выстреле,

то *событие $A + B$* — попадание при первом выстреле, или при втором, или в обоих выстрелах.

Теорема о сумме несовместных событий

Пусть события A и B — несовместные, причем вероятности этих событий известны.

Теорема. *Вероятность появления одного из двух несовместных событий равна сумме вероятностей этих событий:*

$$P(A + B) = P(A) + P(B).$$

Использование теоремы о сумме несовместных событий

На экзамене по геометрии школьнику достаётся один вопрос из списка экзаменационных вопросов. Вероятность того, что это вопрос на тему «Вписанная окружность», равна 0,2. Вероятность того, что это вопрос на тему «Параллелограмм», равна 0,15. Вопросов, которые одновременно относятся к этим двум темам, нет. Найдите вероятность того, что на экзамене школьнику достанется вопрос по одной из этих двух тем. Ответ: 0,35

Решение:

Пусть событие A – достанется вопрос по теме «Вписанная окружность»,

событие B – достанется вопрос по теме «Параллелограмм»,

событие $A+B$ – достанется вопрос по одной из этих тем.

События A и B – несовместные, следовательно $P(A+B) = P(A)+P(B)$.

$$P(A+B) = 0,2+0,15=0,35$$

Теорема о сумме совместных событий

Теорема. *Вероятность появления хотя бы одного из двух совместных событий равна сумме вероятностей этих событий без вероятности их совместного появления*

$$P(A+B) = P(A) + P(B) - P(AB).$$

Пример использования теоремы о сумме совместных событий

В торговом центре два одинаковых автомата продают кофе. Вероятность того, что к концу дня в автомате закончится кофе, равна 0,25. Вероятность того, что кофе закончится в обоих автоматах, равна 0,15. Найдите вероятность того, что к концу дня кофе останется в обоих автоматах.

Решение: Пусть

A – кофе закончится в 1 автомате,

B – кофе закончится во 2 автомате,

$A*B$ – кофе закончится в обоих автоматах,

событие $A+B$ – кофе закончится хотя бы в одном автомате,

событие $\overline{A+B}$ – кофе останется в обоих автоматах.

Тогда

$$P(A)=P(B)=0,25,$$

$$P(A*B)=0,15$$

События A и B – совместные, следовательно

$$P(A+B)=0,25+0,25-0,15=0,35.$$

Таким образом

$$P(\overline{A+B}) = 1-0,35=0,65$$

Произведение событий

*Произведением двух событий A и B называют событие $A*B$, состоящее в совместном появлении (совмещении) этих событий.*

Например, если A — деталь годная,
 B — деталь окрашенная,
то $A*B$ — деталь годна и окрашена.

Произведением нескольких событий называют событие, состоящее в совместном появлении всех этих событий.
Например, если A , B , C — появление «герба» соответственно в первом, втором и третьем бросаниях монеты, то $A*B*C$ — выпадение «герба» во всех трех испытаниях.

Основные понятия

- *Два события называют независимыми, если вероятность их совмещения равна произведению вероятностей этих событий; в противном случае события называют зависимыми.*
- На практике о независимости событий заключают по смыслу задачи. Например, вероятности поражения цели каждым из двух орудий не зависят от того, поразило ли цель другое орудие, поэтому события «первое орудие поразило цель» и «второе орудие поразило цель» независимы.

Теорема о произведении независимых событий

Теорема. *В случае независимых событий вероятность их произведения равна произведению вероятностей этих событий*

$$P(A * B) = P(A) * P(B)$$

Использование теоремы о произведении независимых событий

Если гроссмейстер А. играет белыми, то он выигрывает у гроссмейстера Б. с вероятностью 0,52. Если А. играет черными, то А. выигрывает у Б. с вероятностью 0,3. Гроссмейстеры А. и Б. играют две партии, причем во второй партии меняют цвет фигур. Найдите вероятность того, что А. выиграет оба раза.

Решение:

Пусть событие А – выигрыш А. белыми фигурами ,
событие В – выигрыш А. черными фигурами,
событие $A*B$ – выигрыш А. разными фигурами.

События А и В – независимые, следовательно $P(A*B) = P(A)*P(B)$.

$$P(A*B) = 0,52*0,3=0, 156$$

Формула полной вероятности

Пусть событие A может произойти вместе с одним из независимых событий B_1, B_2, \dots, B_n

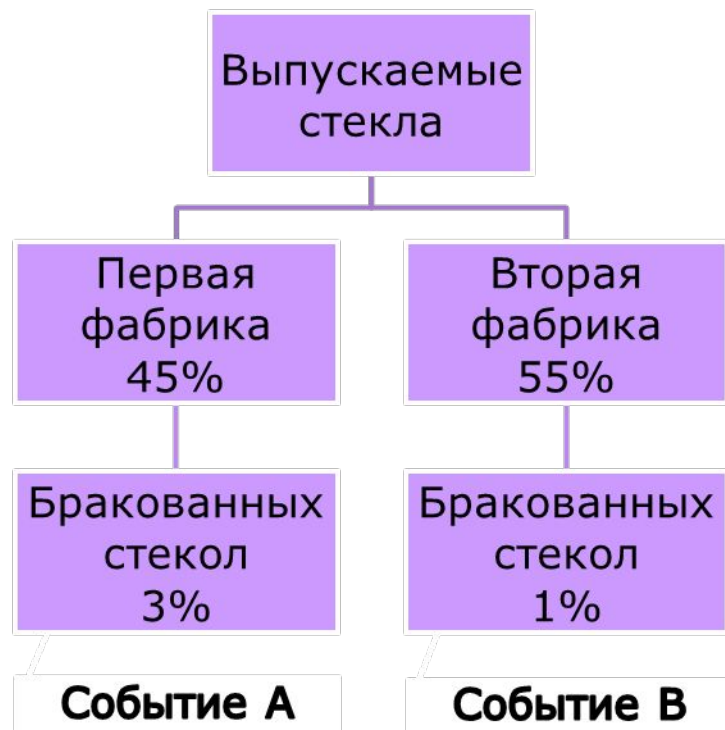
Обозначим через A/B_i событие - «событие A произошло вместе с B_i ». Тогда справедлива формула

$$P(A) = P(A/B_1) \cdot P(B_1) + P(A/B_2) \cdot P(B_2) + \dots + P(A/B_n) \cdot P(B_n)$$

Пример решения задач с использованием теорем о вероятностях событий

Две фабрики выпускают одинаковые стекла для автомобильных фар. Первая фабрика выпускает 45% этих стекол, вторая — 55%. Первая фабрика выпускает 3% бракованных стекол, а вторая — 1%. Найдите вероятность того, что случайно купленное в магазине стекло окажется бракованным.

$$\begin{aligned} P(A+B) &= P(A) + P(B) = \\ &= 0,03 * 0,45 + 0,01 * 0,55 = \\ &= 0,019 \end{aligned}$$



Пример решения задач с использованием теорем о вероятностях событий

Всем пациентам с подозрением на гепатит делают анализ крови. Если анализ выявляет гепатит, то результат анализа называется положительным. У больных гепатитом пациентов анализ даёт положительный результат с вероятностью $0,9$. Если пациент не болен гепатитом, то анализ может дать ложный положительный результат с вероятностью $0,01$. Известно, что 5% пациентов, поступающих с подозрением на гепатит, действительно больны гепатитом. Найдите вероятность того, что результат анализа у пациента, поступившего в клинику с подозрением на гепатит, будет положительным.

Пример решения задач с использованием теорем о вероятностях событий

Пациент

Болен
гепатитом
5%

Положительный
результат
0,9

Не болен
гепатитом
100-5=95%

Ложный
положительный
результат
0,01

A – пациент болен и анализ правильный,
B – пациент здоров и анализ не правильный

$$P(A)=0,05*0,9=0,045$$

$$P(B)=0,95*0,01=0,0095$$

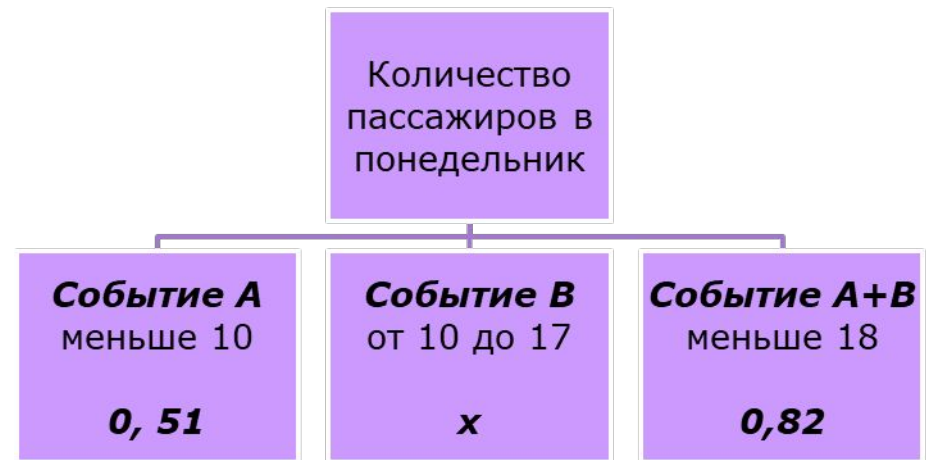
События A и B –
несовместные

$$\begin{aligned} P(A+B) &= 0,045 + 0,0095 = \\ &= 0,0545 \end{aligned}$$

Пример решения задач с использованием теорем о вероятностях событий

Из районного центра в деревню ежедневно ходит автобус.

Вероятность того, что в понедельник в автобусе окажется меньше 18 пассажиров, равна 0,82. Вероятность того, что окажется меньше 10 пассажиров, равна 0,51. Найдите вероятность того, что число пассажиров будет от 10 до 17.



События А и В – несовместные, следовательно

$$0,82 = 0,51 + x. \text{ Значит } x = 0,31$$

Пример решения задач с использованием теорем о вероятностях событий

В кармане у Пети было 2 монеты по 5 рублей и 4 монеты по 10 рублей. Петя, не глядя, переложил какие-то 3 монеты в другой карман. Найдите вероятность того, что пятирублевые монеты лежат теперь в разных карманах. Ответ: 0,6

Пусть A – событие «пятирублевые монеты в разных карманах»

Наступление события A возможно лишь в трех случаях (три результата перекладки монет): 5,10,10; 10,5,10 или 10,10,5.

Эти события несовместные, вероятность их суммы равна сумме вероятностей этих событий:

$$P(A) = \frac{2}{6} \cdot \frac{4}{5} \cdot \frac{3}{4} + \frac{4}{6} \cdot \frac{2}{5} \cdot \frac{3}{4} + \frac{4}{6} \cdot \frac{3}{5} \cdot \frac{2}{4} = \frac{3}{5}$$

Пример решения задач с использованием теорем о вероятностях событий

В магазине стоят два платёжных автомата. Каждый из них может быть неисправен с вероятностью 0,05 независимо от другого автомата. Найдите вероятность того, что хотя бы один автомат исправен.

Решение: Пусть
А – неисправен 1 автомат,
В – неисправен 2 автомат,
А*В – неисправны оба автомата,

событие $\overline{A*B}$ – исправен хотя бы один автомат.

Тогда

$$P(A)=P(B)=0,05,$$

События А и В – независимы

$$P(A*B)=0,05*0,05=0,0025$$

Таким образом

$$P(\overline{A*B}) = 1-0,0025=0,9975$$

Статистическая вероятность

- Относительной частотой **$W(A)$** события **A** в данной серии испытаний называют отношение числа испытаний **M** , в которых событие **A** произошло, к числу **N** всех проведенных испытаний.

$$W(A) = \frac{M}{N}$$

При этом число **M** называют частотой события **A**

- Статистической вероятностью называют число, около которого колеблется относительная частота события при большом числе испытаний

Пример решения задачи

Вероятность того, что новый DVD-проигрыватель в течение года поступит в гарантийный ремонт, равна 0,045. В некотором городе из 1000 проданных DVD-проигрывателей в течение года в гарантийную мастерскую поступила 51 штука. На сколько отличается относительная частота события «гарантийный ремонт» от его вероятности в этом городе?

Решение. **A** - событие «гарантийный ремонт»

Частота события **A** равна **M**=51, число испытаний **N**=1000.

Тогда относительная частота события «гарантийный ремонт» равна

$$W(A) = \frac{M}{N} = \frac{51}{1000} = 0,051$$

$$W(A) - P(A) = 0,051 - 0,045 = 0,006$$

Примеры решения задач с костями

Задача. Игральную кость бросали до тех пор, пока сумма всех выпавших очков не превысила число 9. Какова вероятность того, что для этого потребовалось два броска? Ответ округлите до сотых.

Пусть **A** – событие «за два броска выпало более 9 очков»

Наступление события **A** возможно лишь в трех случаях : выпало 10;11;12 очков.

Пусть **B**₁ - выпало в сумме 10 очков. Это возможно только в трех случаях 4+6, 6+4, 5+5. Значит , $P(B_1) = 3 \cdot \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{6} = \frac{1}{12}$

Пусть **B**₂ - выпало в сумме 11 очков. Это возможно только в двух случаях 5+6, 6+5. Следовательно, $P(B_2) = 2 \cdot \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{6} = \frac{1}{18}$

Пусть **B**₃ - выпало в сумме 12 очков. Это возможно только в случае 6+6.

Поэтому, $P(B_3) = \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{6} = \frac{1}{36}$

Поскольку события **B**₁, **B**₂, **B**₃ и события **A** несовместные, вероятность их суммы равна сумме вероятностей этих событий:

$$P(A) = P(B_1) + P(B_2) + P(B_3) = \frac{1}{12} + \frac{1}{18} + \frac{1}{36} = \frac{1}{6} \approx 0,17$$

При двукратном бросании игральной кости в сумме выпало 8 очков. Какова вероятность того, что хотя бы раз выпало 4 очка?

Испытание --- бросание кубика.

Выпадение восьми очков при двукратном бросании кубика возможно только при следующих результатах испытаний:

2+6, 6+2, 3+5, 5+3, 4+4.

Тогда событию **A** --- «выпало восемь очков и хотя бы раз 4» благоприятствует один исход (**$m=1$**), всего исходов пять (**$n=5$**). По определению вероятности получаем, что

$$P(A) = \frac{m}{n} = \frac{1}{5}$$

Игральную кость бросили два раза. Известно, что два очка не выпали ни разу. Найдите при этом условии вероятность события «сумма выпавших очков окажется равна 4».

Испытание --- двукратное бросание кубика. Возможные исходы испытания занесем в таблицу:

(1;1) **(3;1)** (4;1) (5;1) (6;1)
(1;3) (3;3) (4;3) (5;3) (6;3)
(1;4) (3;4) (4;4) (5;4) (6;4)
(1;5) (3;5) (4;5) (5;5) (5;6)
(1;6) (3;6) (4;6) (5;6) (6;6)

Здесь $m=2$, $n=25$, следовательно, по определению получаем

$$P(A) = \frac{2}{25} = 0,08$$

Первый игральный кубик обычный, а на гранях второго кубика нет четных чисел, а нечетные числа 1,3 и 5 встречаются по два раза. В остальном кубики одинаковые. Один случайно выбранный кубик бросают два раза. Известно, что в каком-то порядке выпали 3 и 5 очков. Какова вероятность того, что бросали первый кубик?

Для удобства будем различать обозначения «троек» и «пятерок» на каждом из кубиков. Пусть на первом кубике это будут 3 и 5, а на втором --- **3,3,5,5**. Тогда возможные наборы в двух испытаниях будут:

(3,5)	(5,3)
(3 ,5)	(5 ,3)
(3 ,5)	(5 ,3)
(3, 5)	(3, 5)
(3, 5)	(3, 5)

Для события **A** --- «бросали первый кубик» благоприятствуют только пары черного цвета (**m=2**), всего же видим десять пар (**n=10**)

Таким образом, $P(A) = \frac{2}{10} = 0,2$

Схема решения задач по теории вероятности

1. Выяснить, в чем состоит рассматриваемое в задаче испытание.
2. Обозначьте буквами события, рассматриваемые в условии задачи.
3. С помощью введенных обозначений выразите событие, вероятность наступления которого необходимо найти.
4. * Если требуется найти вероятность **суммы событий**, выясните, **совместны или несовместны** рассматриваемые события.
* Если же требуется найти вероятность **произведения событий**, выясните, **зависимы или независимы** рассматриваемые события.
5. Выберите соответствующую условию задачи формулу и выполните необходимые вычисления.

Полезно почитать по теме

- https://self-edu.ru/books/dwn.php?filename=balak_scool
- https://www.mathedu.ru/text/lyutikas_fakultativnyy_kurs_po_teorii_veroyatnostey_1990/tp.pdf