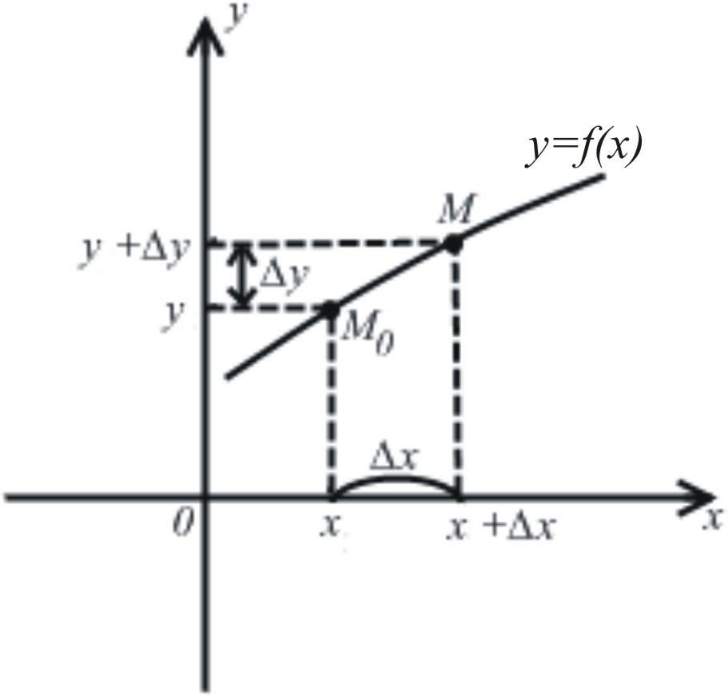
Дифференциальное исчисление

Производная функции

Пусть задана функция $y = f(x)$, определенная на некотором промежутке. При каждом значении аргумента x из этого промежутка функция принимает определенное значение.

Пусть аргумент x получил некоторое приращение, тогда функция также получит некоторое приращение.



$x \qquad\qquad y = f(x)$

$x + \Delta x \qquad\qquad y + \Delta y = f(x + \Delta x)$

Тогда приращение функции выразится формулой:

$$\Delta y = f\left(x+\Delta x\right) - f\left(x\right)$$

Рассмотрим отношение вида:

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x}$$

Определение: Производной функции $y = f\left(x\right)$ по аргументу x называется предел отношения приращения функции к приращению аргумента, когда последнее произвольным образом стремится к нулю:

$$y' = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f\left(x+\Delta x\right) - f\left(x\right)}{\Delta x}.$$

Обозначения производной:

$$y', \quad f'(x), \quad f'(x_0), \quad y'(x_0), \quad \frac{dy}{dx}$$

Для каждого значения x производная функции имеет определенное значение, то есть производная также является функцией от аргумента x.

Операция вычисления производной называется *дифференцированием функции*.

Геометрический смысл производной: значение производной $f'(x_0)$ в точке x_0 равняется тангенсу угла наклона касательной, проведенной к графику функции $y = f(x)$ в точке $M_0(x_0; y_0)$:

$$tg\alpha = f'(x_0) \quad \text{или} \quad k = f'(x_0).$$

Механический смысл производной: производная от пути по времени есть скорость движения в данный момент времени.

$$v_{мгн} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta S}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{S(t_1 + \Delta t) - S(t_1)}{\Delta t}.$$

Дифференцируемость функций

Определение: Если функция $y = f(x)$ имеет производную в точке $x=x_0$, то есть существует

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x},$$

то говорят, что при данном значении $x=x_0$ функция дифференцируема.

Теорема: Если функция $y = f(x)$ дифференцируема в некоторой точке $x=x_0$, то она в этой точке непрерывна.

Таким образом, в точке разрыва функция не может иметь производной.

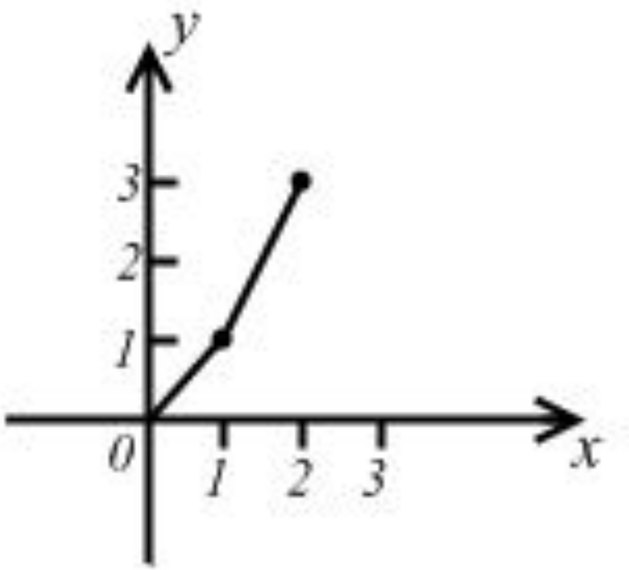
Обратное заключение неверно, то есть из того, что в какой-либо точке $x=x_0$ функция непрерывна еще не следует, что в этой точке функция дифференцируема.

Пример: Функция определена на отрезке [0; 2]:

$$y = f(x) = \begin{cases} x, & \text{при} \quad 0 \le x \le 1, \\ 2x - 1, & \text{при} \quad 1 < x \le 2. \end{cases}$$

Решение:

График данной функции изображен на рисунке:



При $x=1$ данная функция непрерывна:

$$\lim_{x \to 1+0} f(x) = \lim_{x \to 1-0} f(x) = f(1) = 1.$$

Найдем производную в точке $x=1$.

При $\Delta x > 0$ имеем:

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(1+\Delta x)-f(1)}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{2(1+\Delta x)-1-1}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{2\Delta x}{\Delta x}=2.$$

При $\Delta x < 0$ имеем:

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(1+\Delta x)-f(1)}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{1+\Delta x-1}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta x}{\Delta x}=1.$$

Таким образом, рассматриваемый предел зависит от того, каков знак при Δx. Это означает, что в точке $x=1$ данная функция не имеет производной.

Геометрически это означает, что в точке $x=1$ график функции не имеет касательной.

Производная сложной функции

Пусть дана сложная функция $y=f(u)$, где $u=\varphi(x)$, то есть функция вида $y=f(\varphi(x))$.

Теорема: Если функция $u=\varphi(x)$ имеет в точке x производную $u'_x=\varphi'(x)$, а функция $y=f(u)$ имеет при соответствующем значении u производную $y'_u=f'(u)$, то сложная функция $y=f(\varphi(x))$ в точке x также имеет производную, которая определяется по формуле:

$$y'_x=f'_u(u)\cdot\varphi'_x(x).$$

Таблица производных основных функций

1. $(C)' = 0, \quad C = const$	7. $(tg\, u)' = \dfrac{1}{\cos^2 u} \cdot u'$
2. $(u^n)' = n \cdot u^{n-1} \cdot u'$	8. $(ctg\, u)' = -\dfrac{1}{\sin^2 u} \cdot u'$
3. $(a^u)' = a^u \ln a \cdot u'$	9. $(arctg\, u)' = \dfrac{1}{1+u^2} \cdot u'$
4. $(\log_a u)' = \dfrac{1}{u \cdot \ln a} \cdot u'$	10. $(arcctg\, u)' = -\dfrac{1}{1+u^2} \cdot u'$
5. $(\sin u)' = \cos u \cdot u'$	11. $(\arcsin u)' = \dfrac{1}{\sqrt{1-u^2}} \cdot u'$
6. $(\cos u)' = -\sin u \cdot u'$	12. $(\arccos u)' = -\dfrac{1}{\sqrt{1-u^2}} \cdot u'$

При вычислении производных достаточно часто встречаются производные следующих функций, которые следует запомнить:

$$(x)' = 1$$

$$\left(\sqrt{u}\right)' = \frac{1}{2\sqrt{u}} \cdot u' \qquad \left(\frac{1}{u}\right)' = -\frac{1}{u^2} \cdot u'$$

$$\left(e^u\right)' = e^u \cdot u' \qquad (\ln u)' = \frac{1}{u} \cdot u'$$

Пример. Вычислить производную $y=(3x^2-1)^5$.

Решение:

Данная функция является степенной функцией

$$y'=5(3x^2-1)^4\cdot(3x^2-1)'=5(3x^2-1)^4\cdot(6x-0)=$$
$$=30x(3x^2-1)^4.$$

Пример. Вычислить производную $y=\sin(\ln^3 x)$.

Решение:

Данная функция является тригонометрической функцией

$$y'=\cos(\ln^3 x)\cdot(\ln^3 x)'=\cos(\ln^3 x)\cdot 3\ln^2 x\cdot(\ln x)'=$$
$$=\cos(\ln^3 x)\cdot 3\ln^2 x\cdot\frac{1}{x}.$$

Основные правила дифференцирования

1.Постоянный множитель можно выносить за знак производной: $(Cu)' = C(u)', \quad C = const.$

2. Производная суммы функций равна сумме производных функций: $(u \pm v)' = u' \pm v'.$

3. Производная произведения двух функций определяется по формуле: $(uv)' = u'v + v'u.$

4. Производная частного двух функций определяется по формуле: $\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - v'u}{v^2}.$

Пример. Вычислить производную $y = tgx$.

Решение:

Воспользуемся формулой производной частного двух функций:

$$y' = (tgx)' = \left(\frac{\sin x}{\cos x}\right)' = \frac{(\sin x)' \cdot \cos x - \sin x \cdot (\cos x)'}{(\cos x)^2} =$$

$$= \frac{\cos x \cdot \cos x - \sin x \cdot (-\sin x)}{\cos^2 x} = \frac{\cos^2 x + \sin^2 x}{\cos^2 x} = \frac{1}{\cos^2 x}.$$

Пример: Вычислить производную

$$y=\sqrt{x^3+1}\cdot arctg\,2x+\ln 2.$$

Решение:

Воспользуемся формулами производной произведения и суммы двух функций:

$$y'=\left(\sqrt{x^3+1}\right)'\cdot arctg\,2x+\sqrt{x^3+1}\cdot\left(arctg\,2x\right)'+\left(\ln 2\right)'=$$

$$=\frac{1}{2\sqrt{x^3+1}}\cdot\left(x^3+1\right)'\cdot arctg\,2x+\sqrt{x^3+1}\cdot\frac{1}{1+(2x)^2}\left(2x\right)'=$$

$$=\frac{3x^2\cdot arctg\,2x}{2\sqrt{x^3+1}}+\frac{2\sqrt{x^3+1}}{1+4x^2}.$$

Производная логарифмической функции

При вычислении производной логарифмической функции иногда возможно функцию сначала упростить, используя свойства логарифмов:

1. $\log_a a = 1;$
2. $\log_a 1 = 0;$
3. $\log_a b^n = n \cdot \log_a b;$
4. $\log_a (b \cdot c) = \log_a b + \log_a c;$
5. $\log_a \left(\dfrac{b}{c} \right) = \log_a b - \log_a c.$

Пример: Вычислить производную $y = \ln \sqrt[5]{\dfrac{1-5x^2}{2x^5+3}}$.

Решение:

Преобразуем данную функцию:

$$y = \ln \sqrt[5]{\frac{1-5x^2}{2x^5+3}} = \ln\left(\frac{1-5x^2}{2x^5+3}\right)^{\frac{1}{5}} = \frac{1}{5}\ln\left(\frac{1-5x^2}{2x^5+3}\right) =$$

$$= \frac{1}{5}\left[\ln(1-5x^2) - \ln(2x^5+3)\right].$$

Тогда $$y' = \frac{1}{5}\left[\frac{1}{1-5x^2}(1-5x^2)' - \frac{1}{2x^5+3}(2x^5+3)'\right] =$$

$$= \frac{1}{5}\left[\frac{-10x}{1-5x^2} - \frac{10x^4}{2x^5+3}\right] = -2x\left[\frac{1}{1-5x^2} + \frac{x^3}{2x^5+3}\right].$$

Производная неявной функции

Пусть функция задана уравнением $F(x; y) = 0.$

При вычислении производной функции, заданной в неявном виде, необходимо продифференцировать обе части уравнения по аргументу x, считая, что y есть функция от x.

Пример: Вычислить производную $y^6 - y - x^2 = 0.$

Решение:

Продифференцируем обе части уравнения по x:

$$6y^5 \cdot y' - y' - 2x = 0.$$

Сгруппируем слагаемые, содержащие y', получим

$$y'\left(6y^5 - 1\right) = 2x \quad \Rightarrow y' = \frac{2x}{6y^5 - 1}.$$

Замечание: Для вычисления производной неявной функции при данном значении аргумента x нужно знать и значение функции у при данном значении аргумента x.

Логарифмическое дифференцирование

Определение: Сложной показательной функцией называется функция, у которой и основание и показатель степени являются функциями аргумента x: $y = u(x)^{v(x)}$.

Для вычисления производной сложной показательной функции прологарифмируем функцию

$$\ln y = \ln u(x)^{v(x)} = v(x) \cdot \ln u(x)$$

Дифференцируем полученное равенство по x, считая $y(x)$:

$$\frac{1}{y} \cdot y' = v' \cdot \ln u + v \cdot \frac{1}{u} \cdot u'.$$

Домножим на y левую и правую часть выражения:

$$y' = y\left(v' \cdot \ln u + v \cdot \frac{1}{u} \cdot u' \right).$$

Подставим вместо y выражение $y = u^v$, получим:

$$y' = u^v \cdot \left(v' \cdot \ln u + v \cdot \frac{1}{u} \cdot u' \right).$$

Прием вычисления производной при котором функцию сначала логарифмируют, а затем дифференцируют называется *логарифмическим дифференцированием*.

Пример: Вычислить производную $y = \left(x^3 + 4\right)^x$.

Решение:

Прологарифмируем данную функцию:

$$\ln y = \ln\left(x^3 + 4\right)^x = x \cdot \ln\left(x^3 + 4\right).$$

Продифференцируем левую и правую часть полученного выражения:

$$\frac{1}{y} \cdot y' = \ln\left(x^3 + 4\right) + x \cdot \frac{1}{x^3 + 4} \cdot \left(x^3 + 4\right)';$$

$$y' = y\left(\ln\left(x^3 + 4\right) + x \cdot \frac{3x^2}{x^3 + 4}\right);$$

Тогда

$$y' = \left(x^3 + 4\right)^x \left(\ln\left(x^3 + 4\right) + \frac{3x^3}{x^3 + 4}\right).$$

Пример: Вычислить производную $y=\dfrac{(4x-3)\cdot e^{x}}{\sqrt{x^4+3x^2-1}}$.

Решение:

Прологарифмируем данную функцию:

$$\ln y=\ln\frac{(4x-3)\cdot e^{x}}{\sqrt{x^4+3x^2-1}}=\ln\left(4x-3\right)\cdot e^{x}-\ln\sqrt{x^4+3x^2-1}=$$

$$=\ln(4x-3)+\ln e^{x}-\frac{1}{2}\ln\left(x^4+3x^2-1\right).$$

Продифференцируем левую и правую часть полученного выражения:

$$\frac{1}{y}\cdot y'=\frac{1}{4x-3}(4x-3)'+1-\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{x^4+3x^2-1}\left(x^4+3x^2-1\right)'=$$

$$=\frac{4}{4x-3}+1-\frac{1}{2}\cdot\frac{4x^3+6x}{x^4+3x^2-1}=\frac{4}{4x-3}+1-\frac{2x^3+3x}{x^4+3x^2-1}.$$

Откуда

$$y'=y\cdot\left(\frac{4}{4x-3}+1-\frac{2x^3+3x}{x^4+3x^2-1}\right).$$

Тогда

$$y'=\frac{(4x-3)\cdot e^x}{\sqrt{x^4+3x^2-1}}\cdot\left(\frac{4}{4x-3}+1-\frac{2x^3+3x}{x^4+3x^2-1}\right).$$