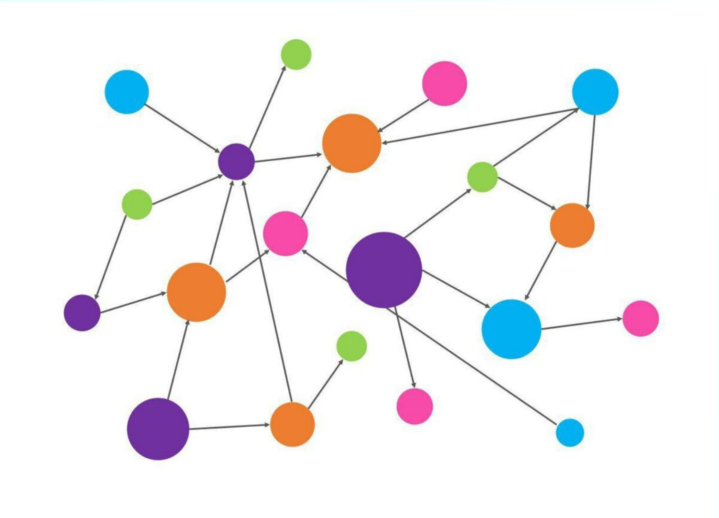
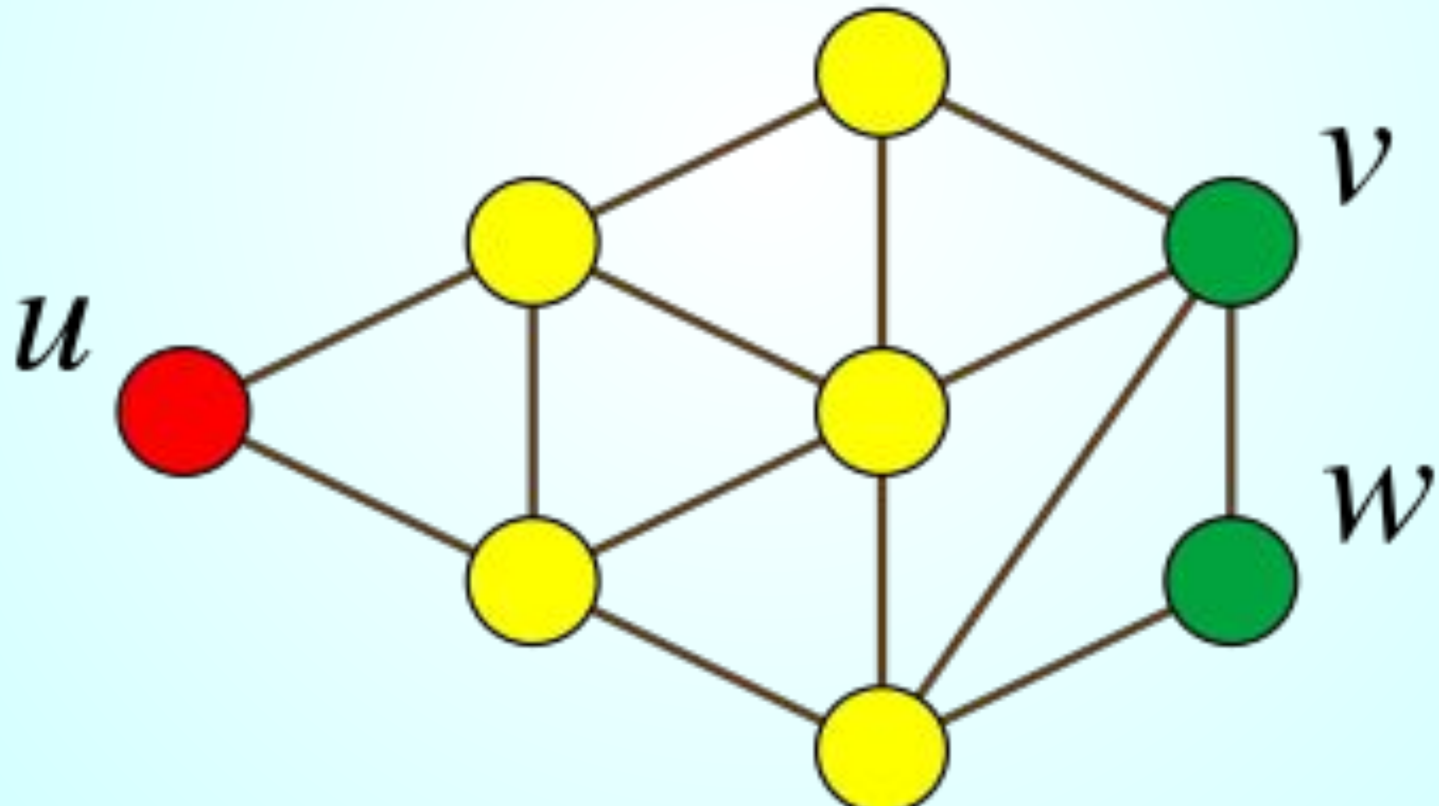
Тема урока

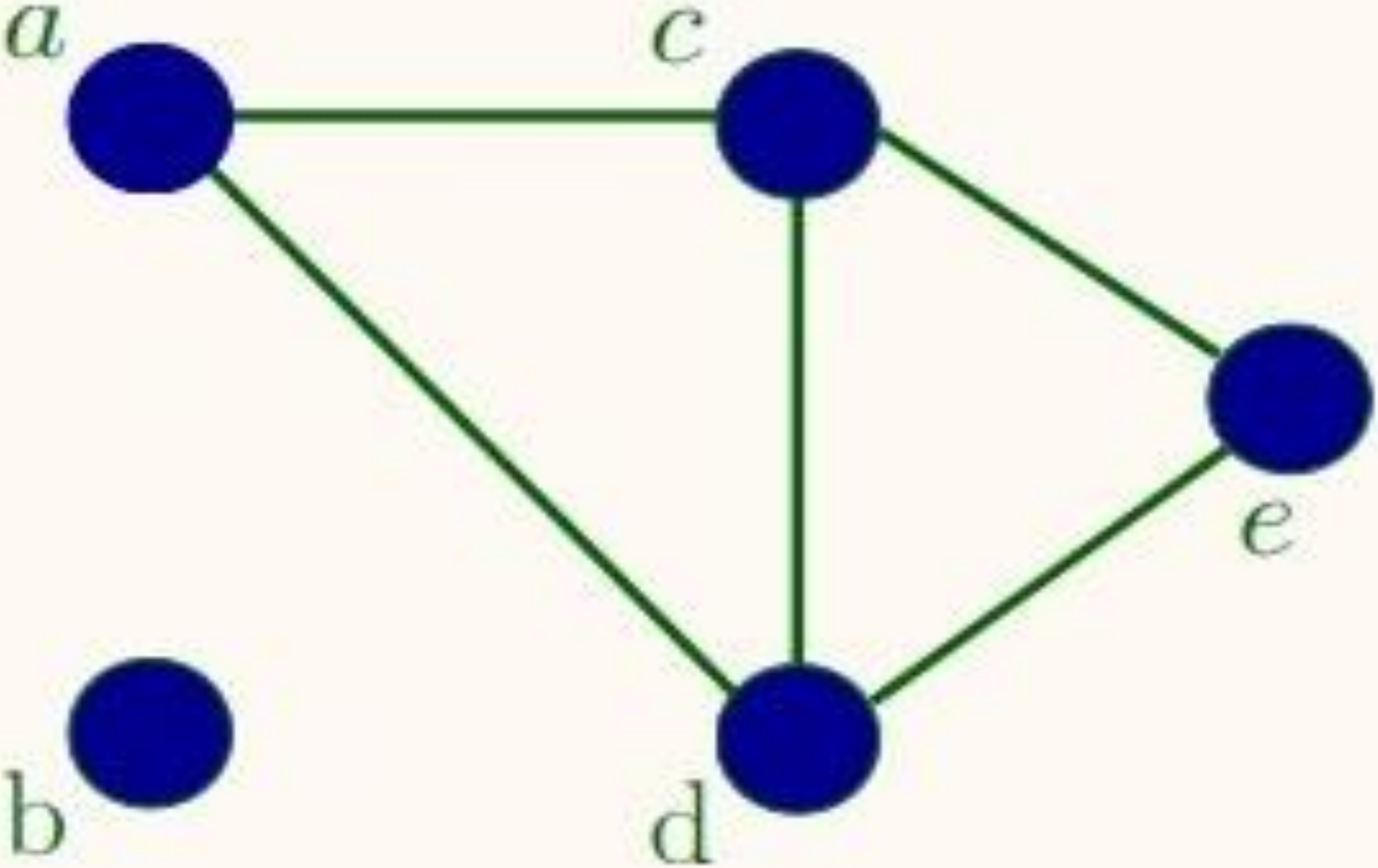
«Задача о Кёнигсберских мостах, эйлеровы пути и эйлеровы графы»



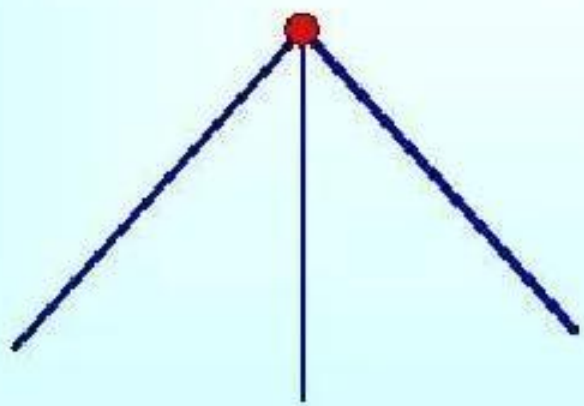
Граф называется связным, если все его вершины соединены между собой



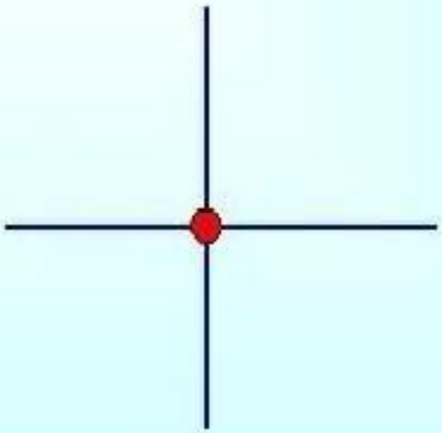
Несвязный граф



Количество рёбер, выходящих из вершины графа, называется ***степенью вершины***. Вершина графа, имеющая нечётную степень, называется ***нечетной***, а чётную степень – ***чётной***.



Нечётная степень

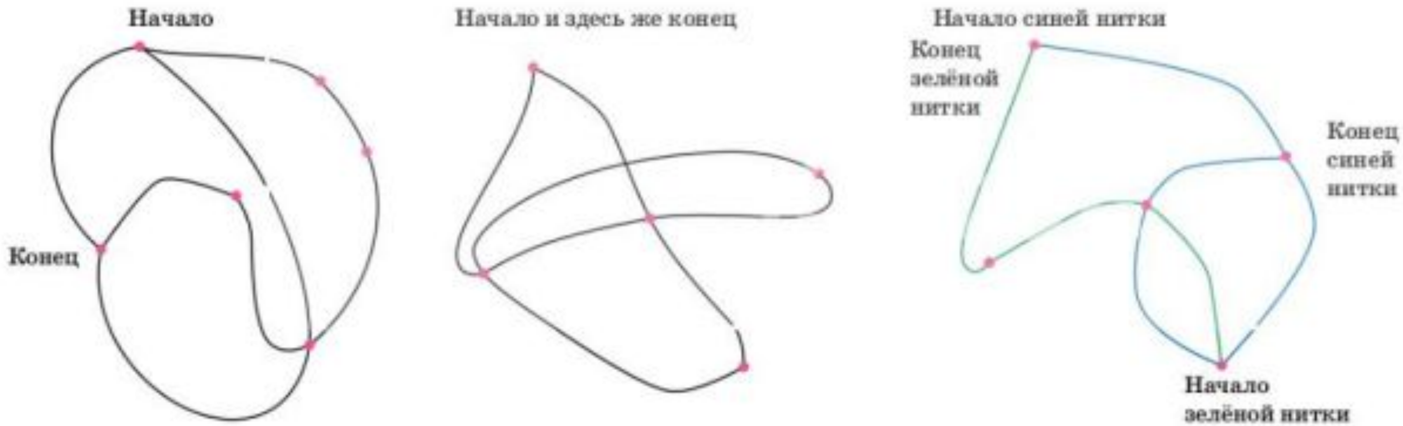


Чётная степень

Представим себе, что мы не рисуем какой-то связный граф карандашом, а выкладываем с помощью нитки, начав с какой-то вершины. Промежуточные вершины мы «проходим» насквозь: нитка входит в вершину и выходит из неё. При этом к степени вершины добавляется число 2. Значит, любая промежуточная вершина будет иметь чётную степень. Исключение могут составлять только две вершины — начальная и конечная. Если они различны, то их степени нечётны (один конец нитки в начальной вершине, а другой — в конечной).

Получается, что если в связном графе больше чем две вершины с нечётной степенью, то такой граф одной ниткой не выложить.

На рисунке 33 показаны три графа из ниток. Первые два удалось выложить одной ниткой, а третий — нет. Потребовалось две нитки.



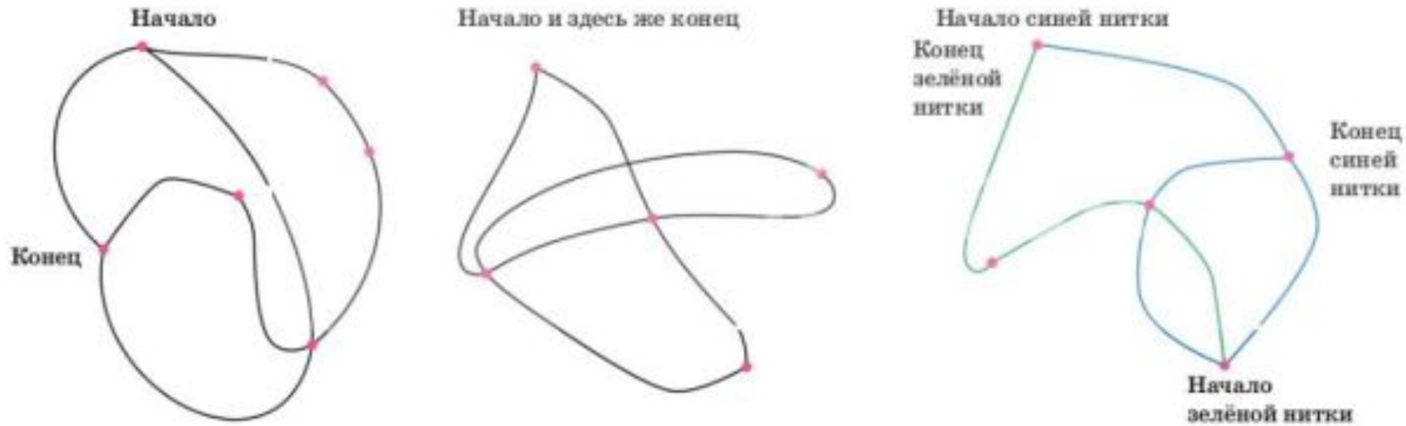
а) Граф из одной нитки. Две вершины с нечётными степенями

б) Граф из одной нитки. Начало и конец нитки совпадают. Все вершины имеют чётную степень

в) В графе четыре вершины с нечётной степенью. Такой граф можно выложить только двумя нитками

Рисунок 33

Эйлеров граф — это граф, в котором существует **эйлеров путь**, то есть путь, проходящий ровно один раз по каждому ребру.



а) Граф из одной нитки. Две вершины с нечётными степенями

б) Граф из одной нитки. Начало и конец нитки совпадают. Все вершины имеют чётную степень

в) В графе четыре вершины с нечётной степенью. Такой граф можно выложить только двумя нитками

Рисунок 33

Таким образом, графы на рисунках 33, *а* и 33, *б* эйлеровы, а граф на рисунке 33, *в* не является эйлеровым.

История возникновения графов

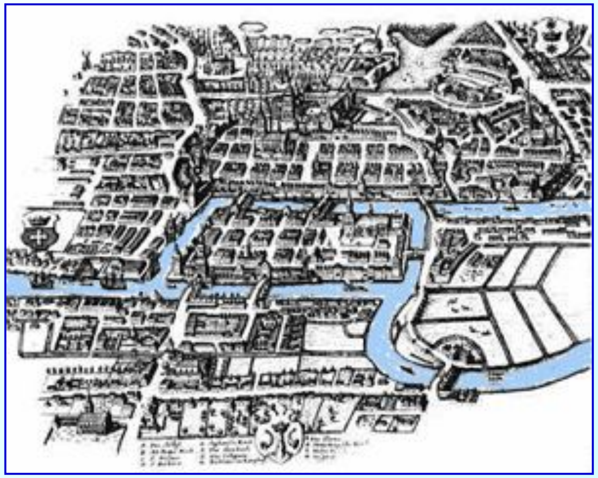
Термин "***граф***" впервые появился в книге венгерского математика Д. Кенига в 1936 г., хотя начальные важнейшие теоремы о графах восходят к Л. Эйлеру.

История возникновения графов

Основы теории графов как математической науки заложил в 1736 г. ***Леонард Эйлер***, рассматривая задачу о кенигсбергских мостах. Сегодня эта задача стала классической.

Задача о Кенигсбергских мостах

Бывший *Кенигсберг* (*ныне Калининград*) расположен на реке Прегель. В пределах города река омывает два острова. С берегов на острова были перекинуты мосты. Старые мосты не сохранились, но осталась карта города, где они изображены.



Задача о Кенигсбергских мостах

Древняя городская легенда гласила, что тот, кто сумеет обойти весь город, ровно по разу побывав на каждом из семи мостов, обретёт счастье и богатство. Кто только ни пытался это сделать, но никому не удавалось.

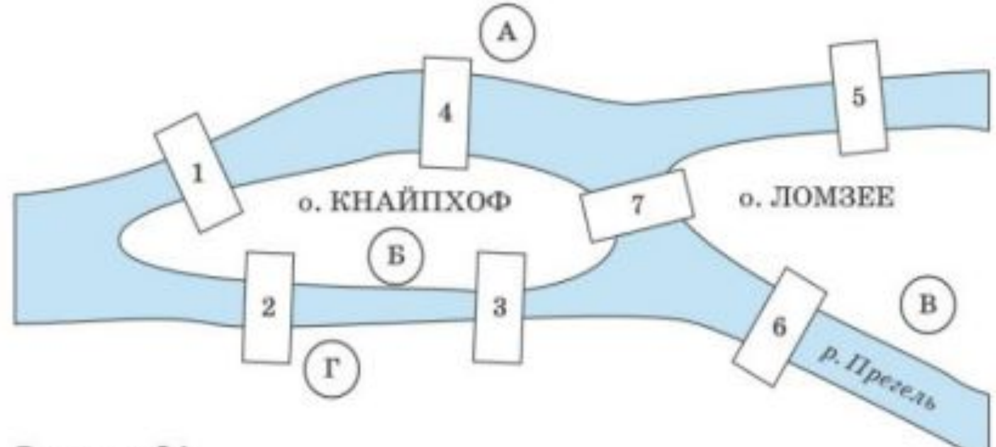
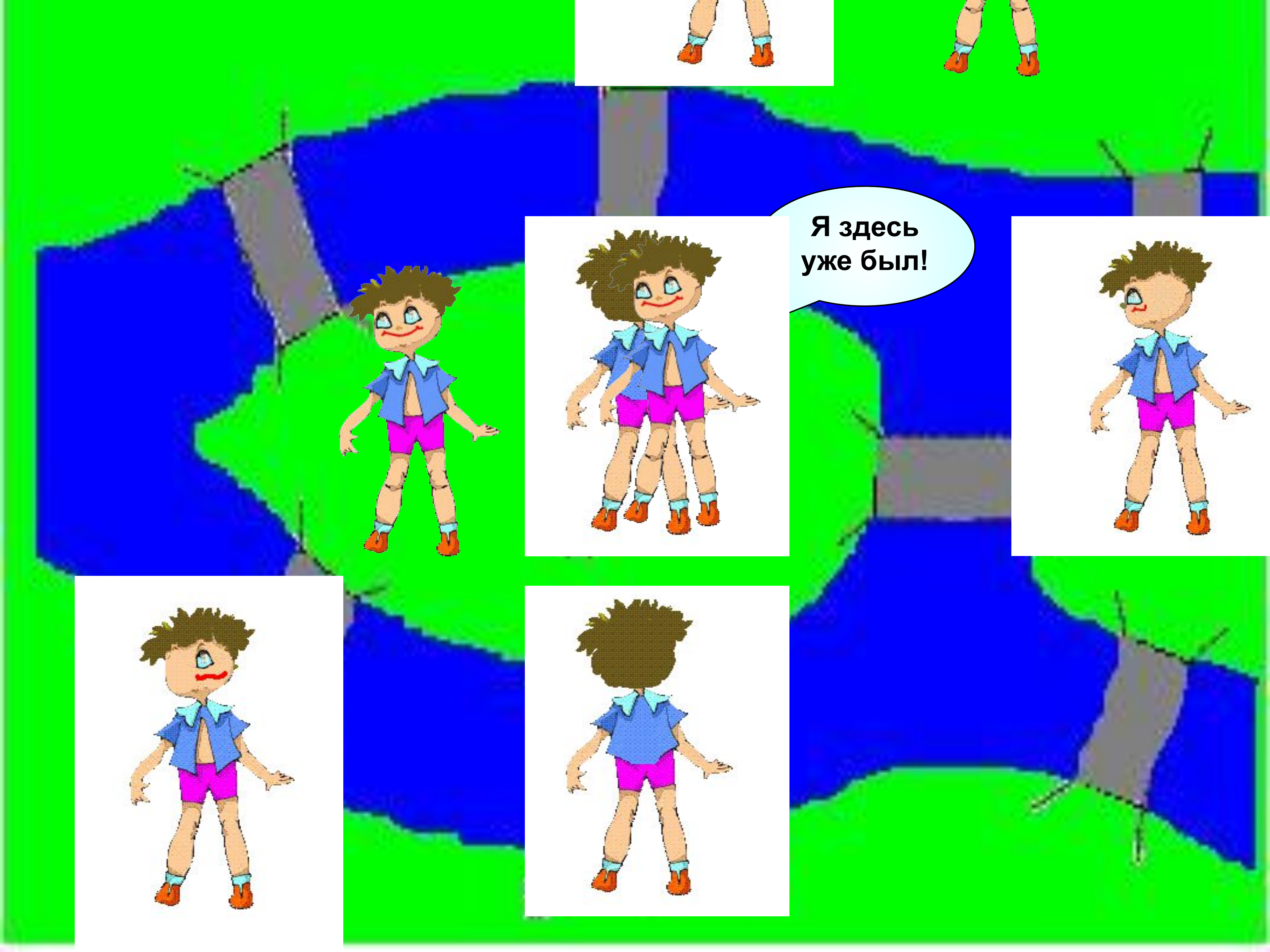


Рисунок 34


Я здесь
уже был!

Задача о Кенигсбергских мостах

Пройти по Кенигсбергским мостам, соблюдая заданные условия, нельзя. Прохождение по всем мостам при условии, что нужно на каждом побывать один раз и вернуться в точку начала путешествия, на языке теории графов выглядит как задача изображения «одним росчерком» графа.

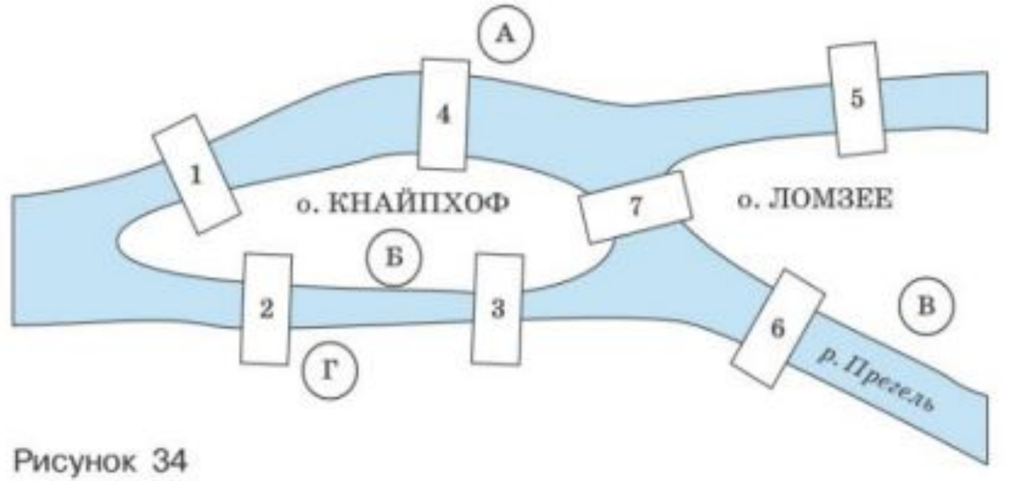


Рисунок 34

Теорема. Если в графе существует путь, проходящий через все рёбра ровно по одному разу, то в этом графе не больше двух вершин нечётной степени.

Теперь мы тоже можем решить задачу о мостах. Участки суши изобразим вершинами, мосты — рёбрами графа (рис. 35). Посмотрите ещё раз на план города и убедитесь, что мосты на графе показаны верно.

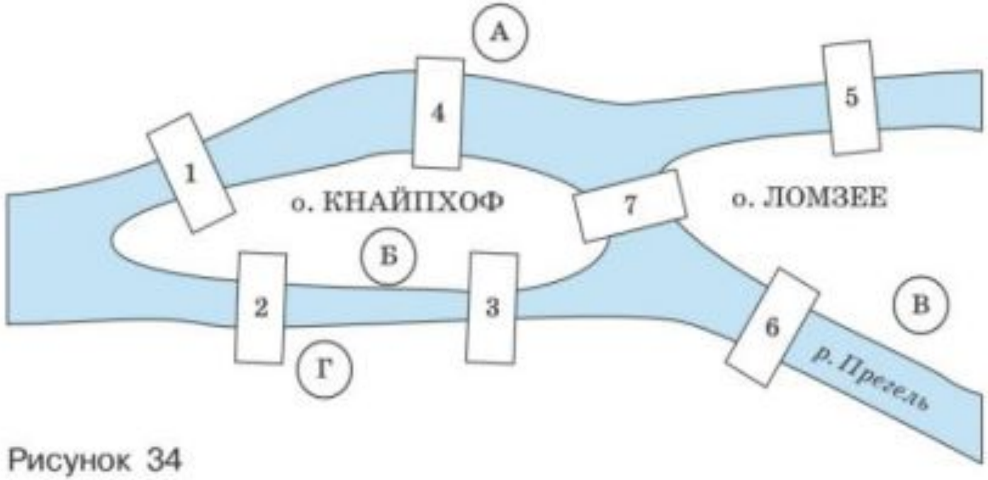


Рисунок 34

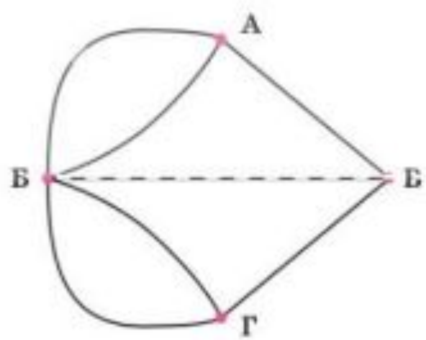
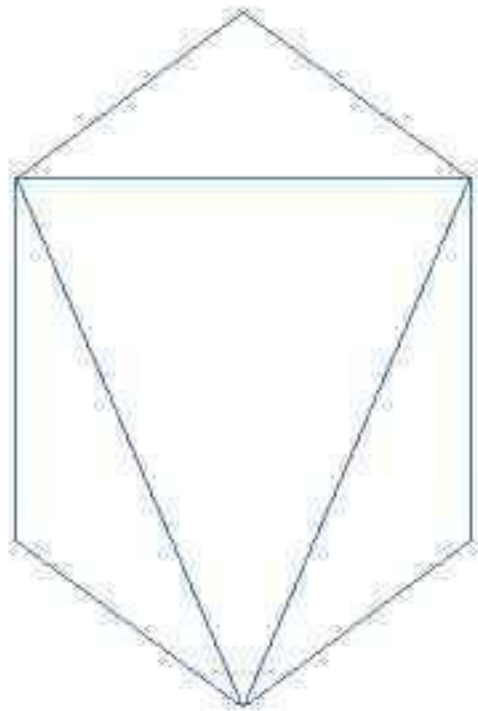


Рисунок 35

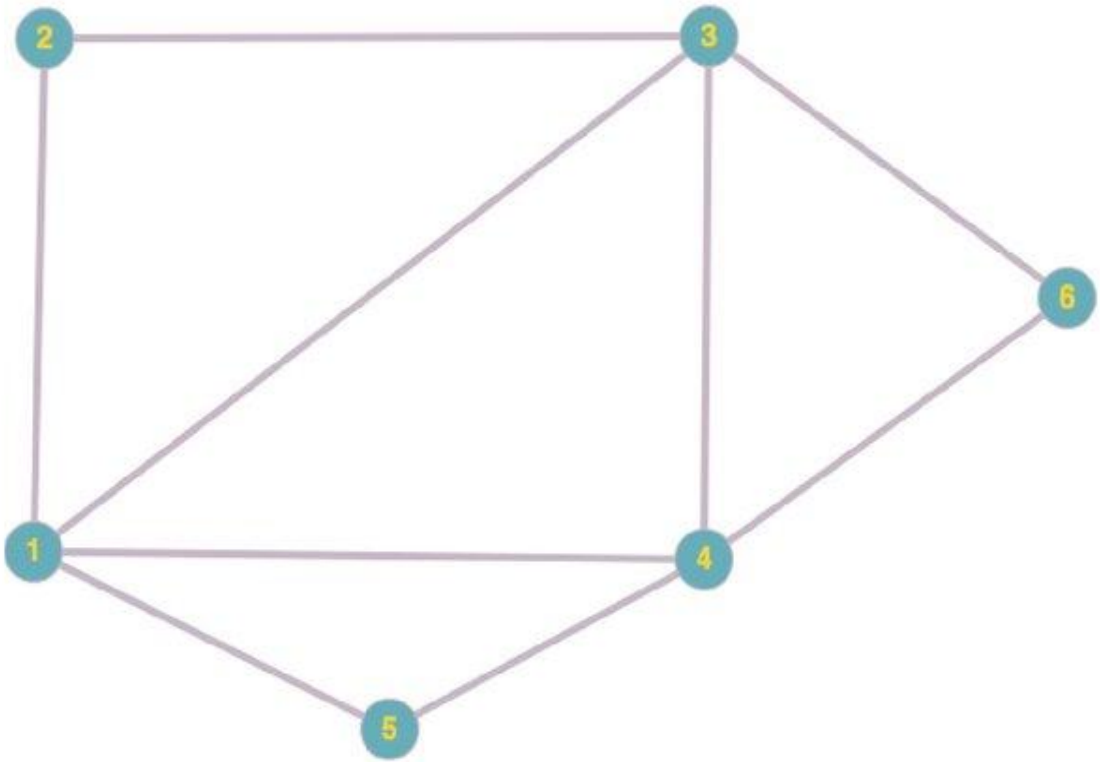
В получившемся графе все четыре вершины имеют нечётную степень: вершины А, В и Г имеют степень 3, а вершина Б — степень 5. Значит, обойти такой граф эйлеровым путём невозможно.

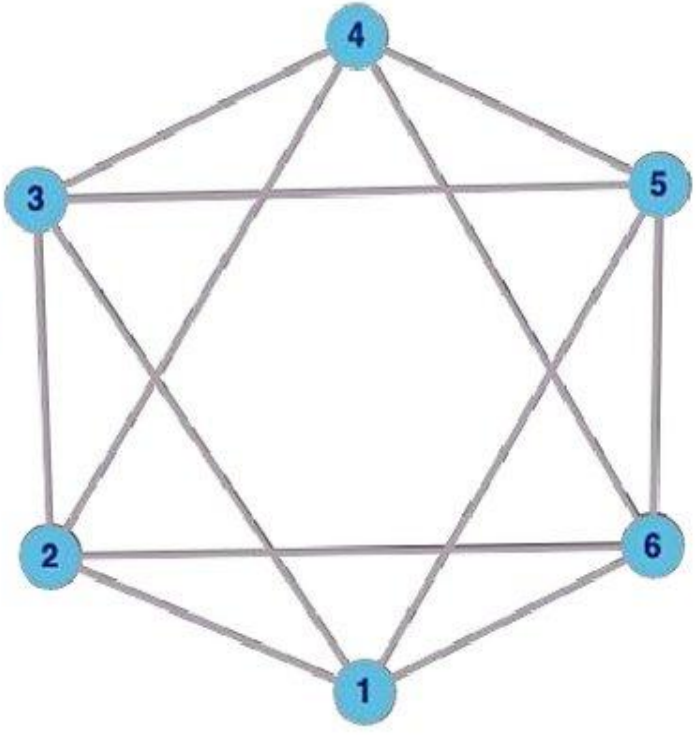
Эйлеров граф

Теорема. **Связный граф называется эйлеровым тогда и только тогда, когда степень каждой его вершины четная**

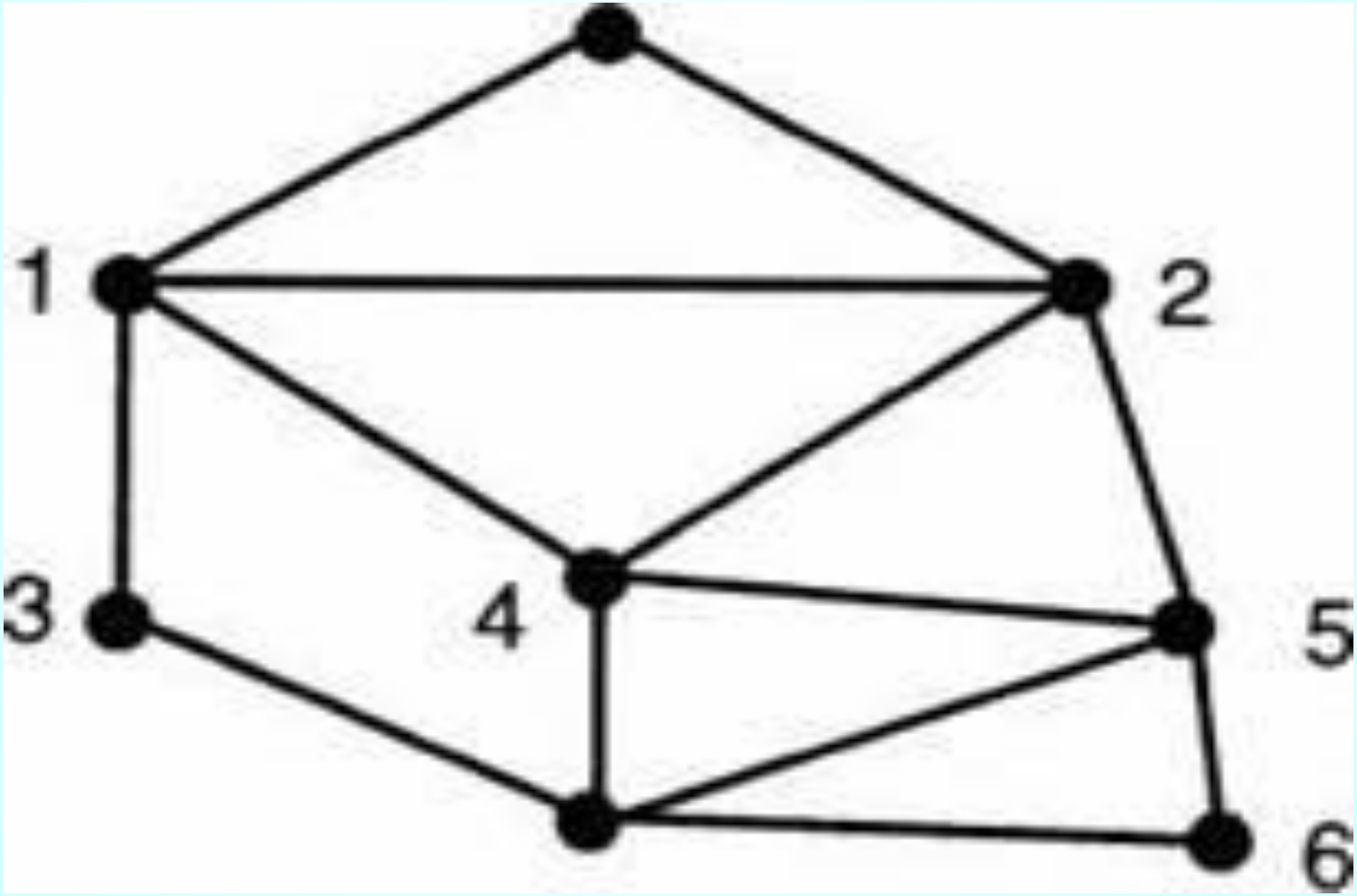


Эйлеровы графы

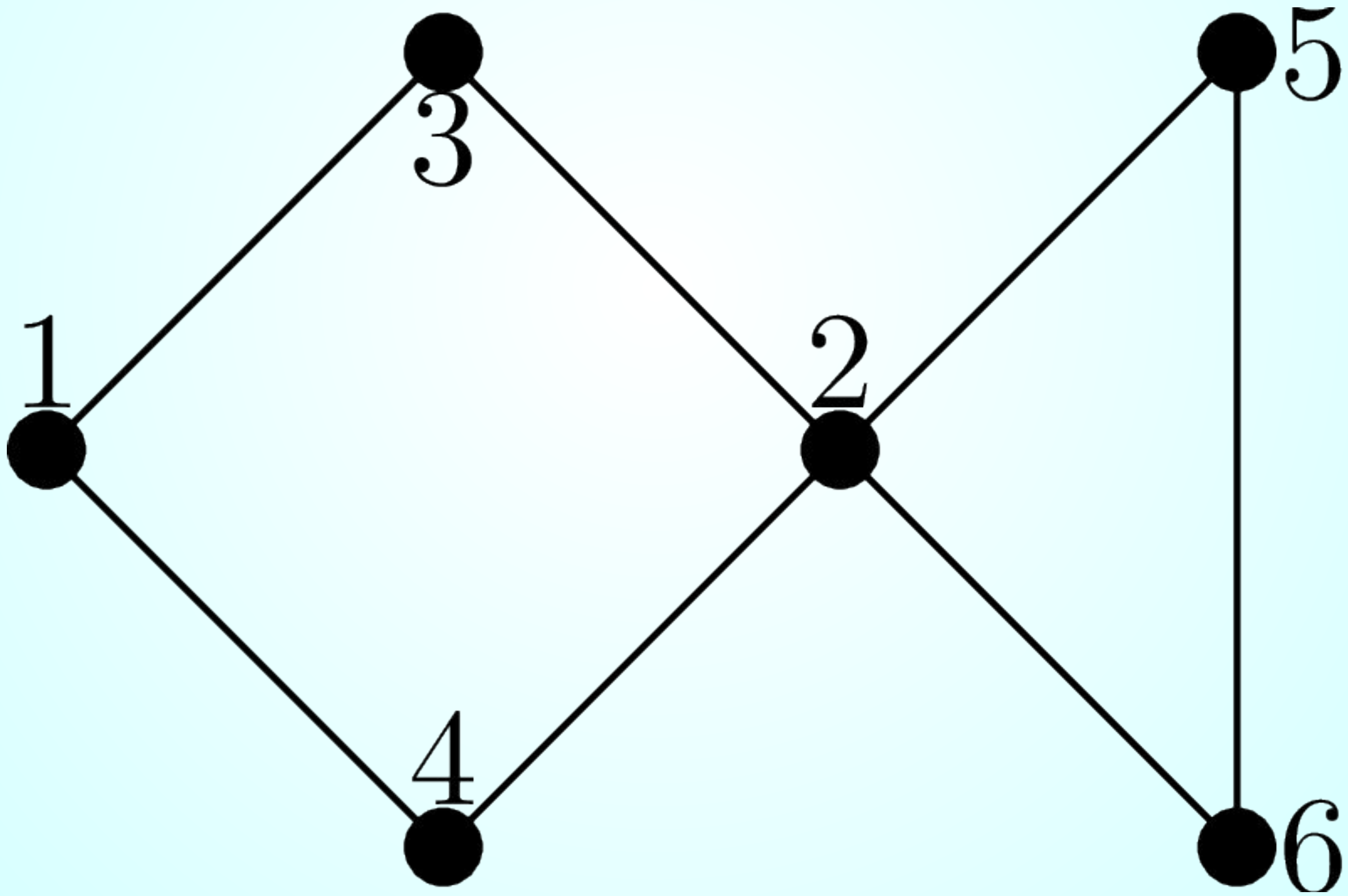




Будет ли данный граф Эйлеровым?

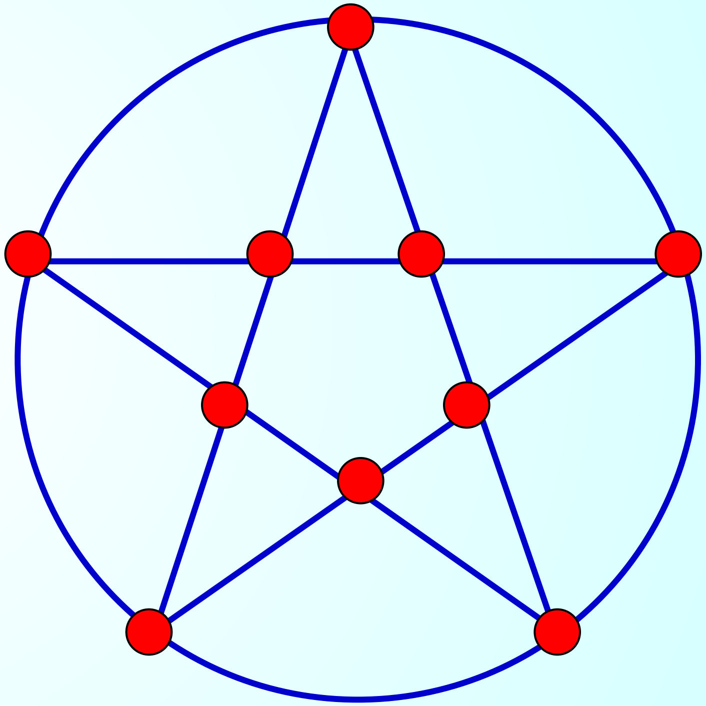


Будет ли данный граф Эйлеровым?



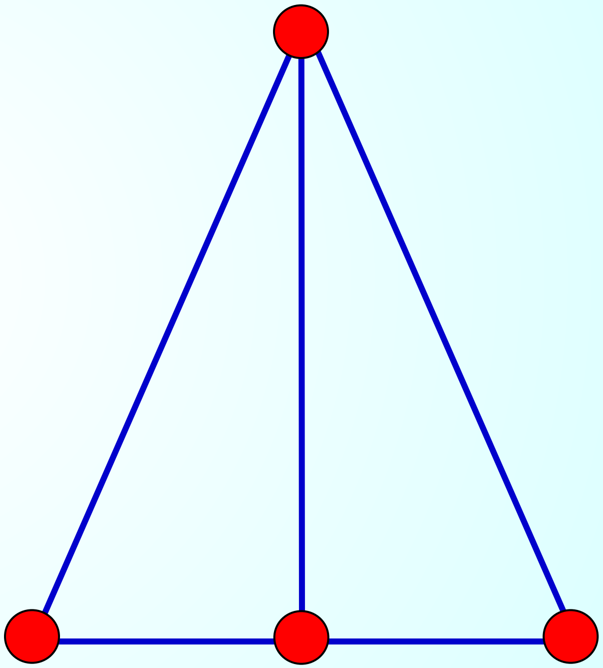
Эйлеров граф

Если все вершины графа четные, то можно не отрывая карандаш от бумаги («одним росчерком»), проводя по каждому ребру только один раз, начертить этот граф. Движение можно начать с любой вершины и закончить его в той же вершине.



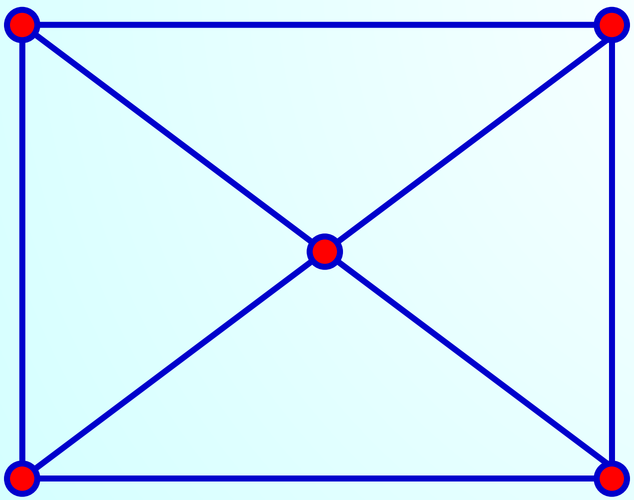
Одним росчерком

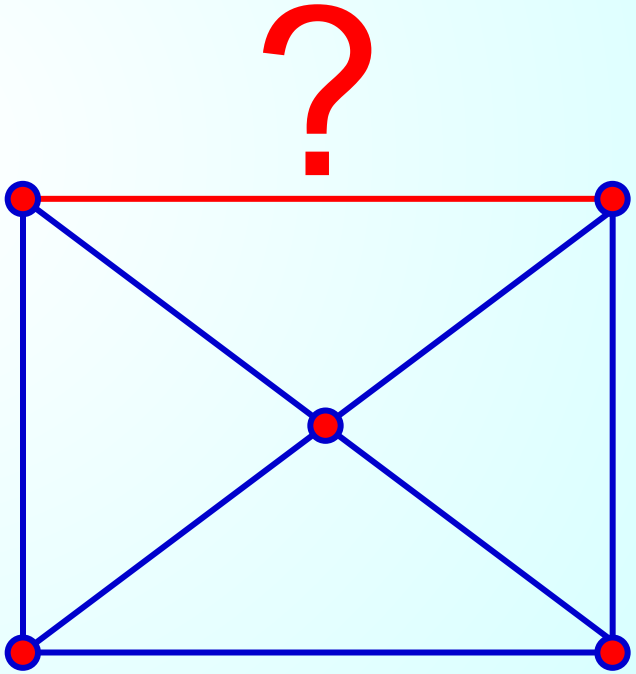
Граф, имеющий всего две нечетные вершины, можно начертить, не отрывая карандаш от бумаги, при этом движение нужно начать с одной из этих нечетных вершин и закончить во второй из них.



Одним росчерком

Граф, имеющий более двух нечетных вершин, невозможно начертить «одним росчерком».





Домашнее задание

Начертить фигуры одним росчерком